

BLATT 1

Abgabe: 27.04.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1 (★). Betrachte die vierelementige Menge $G := \{e, a, b, c\}$ und die “angefangenen” Verknüpfungstafeln

$(G, *)$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			e

$(G, *)$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b		
b	b	c		
c	c	e		

Zeige: Es gibt für jede der beiden Tafeln genau eine Möglichkeit sie zu vervollständigen, sodass G zusammen mit “ $*$ ” eine Gruppe ist.

Aufgabe 2. Es sei G eine Gruppe. Zeige:

(i) Gilt $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$, so ist G abelsch.

(ii) Gilt $g^2 = e_G$ für jedes $g \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe 3. Bestimme sämtliche Untergruppen der Einheitswurzelgruppe C_6 , der symmetrischen Gruppe S_3 und der Faktorgruppe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$. Gib jeweils an, ob es sich um Normalteiler handelt.

Aufgabe 4. Betrachte die Diedergruppe $D_n \leq S_n$ und die beiden erzeugenden Elemente $\delta, \sigma \in D_n$ aus Beispiel 1.2.9. Zeige:

$$\sigma^2 = e, \quad \delta^n = e, \quad \delta^k \neq e \text{ für } 0 < k < n, \quad \sigma\delta = \delta^{-1}\sigma.$$

Zeige weiter, dass D_n genau aus den Elementen der Form $\delta^k \circ \sigma^j$ besteht, wobei $0 \leq k < n$ und $j = 0, 1$. Schließe daraus $|D_n| = 2n$.

Die mit (★) markierten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0-4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.