Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 10

Abgabe: 06.07.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

⊛ **Aufgabe 1.** Zeige: Für $n = 3, 4, 6$ gilt $[\mathbb{Q}(e^{2\pi I/n}) : \mathbb{Q}] = 2$. Folgere daraus, dass die Menge C_n der n-ten komplexen Einheitswurzeln für $n = 3, 4, 6$ aus 0 und 1 konstruierbar ist.

Aufgabe 2. Zeige mittels expliziter Konstruktionen, dass die Menge C_n der n-ten komplexen Einheitswurzeln für $n = 3, 4, 5, 6$ aus 0 und 1 konstruierbar ist.

Aufgabe 3. Konstruiere die Lösungen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + 3z + 1 = 0$ aus 0 und 1.

Aufgabe 4. Betrachte die Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{L}_i \subseteq \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{L}_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{2}))$ und $\mathbb{L}_3 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$. Weiter sei $\mathbb{L}_i\mathbb{L}_j := \mathbb{Q}(\mathbb{L}_i \cup \mathbb{L}_j)$. Zeige:

(i) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 = \mathbb{Q}$,

(ii) $[\mathbb{L}_1 : \mathbb{Q}] = [\mathbb{L}_2 : \mathbb{Q}] = 3$, $[\mathbb{L}_3 : \mathbb{Q}] = 2$,

(iii) $\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1\mathbb{L}_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$,

(iv) $[\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2 : \mathbb{Q}] = [\mathbb{L}_1\mathbb{L}_3 : \mathbb{Q}] = 6$.

Zeige weiter, dass $(1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}})$ eine $\mathbb{Q}$-Basis für $\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2$ ist. *Hinweis:* Betrachte die Polynome $T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$ und $T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1) \in \mathbb{Q}[T]$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.