Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 11

Abgabe: 13.07.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

⊛ **Aufgabe 1.** Bestimme eine explizite Darstellung $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_r)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ sowie den Grad $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ für den Zerfällungskörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ von $f \in \mathbb{Q}[T]$ für

$$f \ = \ T^2 - 3, \qquad f \ = \ T^3 - 5, \qquad f \ = \ T^4 - 2.$$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal (jeweils mit Begründung):

(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$,

(iii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ sind dabei als Unterkörper des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen aufzufassen.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathbb{K}$ ist algebraisch abgeschlossen.

(ii) Jedes $f \in \mathbb{K}[T]$ besitzt eine Nullstelle in k.

(iii) Die irreduziblen Elemente in $\mathbb{K}[T]$ sind genau die Polynome vom Grad 1.

(iv) Für jede algebraische Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ gilt $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$.

Aufgabe 4. Zeige: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper besitzt unendlich viele Elemente.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.