Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 2

Abgabe: 04.05.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1 (Quaternionengruppe)**.** Betrachte die folgenden Elemente in $\mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{C})$, wobei $i \in \mathbb{C}$ wie üblich die imaginäre Einheit bezeichnet:

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad K := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Zeige: Zusammen mit der Matrizenmultiplikation ist $\{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Gruppe. Stelle die Verknüpfungstafel auf und bestimme alle Untergruppen sowie Normalteiler.

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Betrachte folgende Untergruppen der Permutationsgruppe S_4:

$$S_3' := \{\sigma \in S_4;\ \sigma(4) = 4\}, \qquad V_4 := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle.$$

Bestimme alle Elemente von V_4 und beweise folgende Aussagen:

$$S_3' \cong S_3, \qquad V_4 \trianglelefteq S_4, \qquad S_4 = S_3' V_4, \qquad S_4/V_4 \cong S_3.$$

Hinweise: Zum Nachweis von $V_4 \trianglelefteq S_4$ beachte $\sigma \circ (i,j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$. Für $S_4/V_4 \cong S_3$ verwende den ersten Isomorphiesatz 1.3.20.

Aufgabe 3. Es seien G eine Gruppe und $H_1, H_2 \trianglelefteq G$ Normalteiler mit

(i) $G = H_1 H_2$,

(ii) $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$.

Zeige: Es gilt $G \cong H_1 \times H_2$.

Aufgabe 4. Zeige: Für die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ der invertierbaren (2×2)-Matrizen und die Untergruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \leq \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ aller (2×2)-Matrizen der Determinante 1 gelten

$$[\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})] = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \qquad [\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})] = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Die mit ($\star$) markierten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0-4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.