Übungen zur Vorlesung

ALGEBRA

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

BLATT 3

Abgabe: 11.05.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus endlicher Gruppen. Beweise folgende Aussagen:

(i) Es gilt $|G| = |\mathrm{Kern}(\varphi)| \cdot |\mathrm{Bild}(\varphi)|$.

(ii) $|\mathrm{Bild}(\varphi)|$ teilt $|G|$.

⊛ **Aufgabe 2.** Bestimme alle Homomorphismen $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. (i) Gib einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_n an.

(ii) Gib einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_4 an.

Aufgabe 4. Eine Operation $G \times X \to X$ heisst *frei*, falls jede Isotropiegruppe G_x trivial ist, wobei $x \in X$. Eine Operation $G \times X \to X$ heißt *transitiv*, falls es zu je zwei $x_1, x_2 \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $x_2 = g \cdot x_1$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Operiert eine Gruppe G frei auf einer endlichen Menge X, so ist G endlich und $|X|$ ist ein Vielfaches von $|G|$.

(ii) Operiert eine endliche Gruppe G transitiv auf einer Menge X, so ist X endlich und $|G|$ ist ein Vielfaches von $|X|$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.