

## BLATT 4

Abgabe: 19.05.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

- ⊗ **Aufgabe 1.** Zeige: Die Diedergruppe  $D_4$  besitzt eine Untergruppe  $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und eine Untergruppe  $H' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Insbesondere sind nicht je zwei 2-Untergruppen der Ordnung vier in  $D_4$  konjugiert zueinander.

**Aufgabe 2.** Es seien  $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  Primzahlen mit  $p < q$  und  $p \nmid q - 1$ . Weiter sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $pq$ . Zeige:

- (i) Es gibt genau eine  $q$ -Sylow-Gruppe  $H_q \subseteq G$  und diese ist ein Normalteiler in  $G$ .
- (ii) Es gibt genau eine  $p$ -Sylow-Gruppe  $H_p \subseteq G$  und diese ist ein Normalteiler in  $G$ .
- (iii) Es gilt  $H_p \cap H_q = \{e_G\}$  und man hat Isomorphismen

$$G \cong G/H_q \times G/H_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 3.** Es sei  $q \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$  eine Primzahl. Zeige: Eine Gruppe  $G$  der Ordnung  $2q$  ist entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe  $D_q$ . *Hinweise:*

- Zeige, dass es genau eine  $q$ -Sylowgruppe  $H_q \subseteq G$  gibt, und dass für die Anzahl  $s_2$  der 2-Sylowgruppen in  $G$  gilt:  $s_2 = 1$  oder  $s_2 = q$ . Zeige wie in Aufgabe 2, dass  $G$  im Falle  $s_2 = 1$  zyklisch ist.
- Im Fall  $s_2 = q$  beachte, dass  $G = \langle \alpha, \beta \rangle$  gilt, wobei  $\alpha$  ein Erzeuger von  $H_q$  ist und  $\beta \in G$  ein Element mit  $G = H_q \sqcup \beta H_q$  ist. Zeige, dass  $\beta$  sowie  $\beta\alpha$  die Ordnung 2 besitzen und dass es einen Isomorphismus  $G \rightarrow D_q$  gibt mit  $\alpha \mapsto \delta$  und  $\beta \mapsto \sigma$ .

**Aufgabe 4.** Es seien  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = p^k$ , wobei  $k \geq 1$ . Zeige:

- (i) Gilt  $k = 1$  oder  $k = 2$ , so ist  $G$  abelsch.
- (ii) Gilt  $k = 3$ , so ist  $G$  entweder abelsch, oder es gilt  $|Z_G| = p$ .

---

Die mit ⊗ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.