Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 6

Abgabe: 09.06.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

⊛ **Aufgabe 1.** Betrachte die Ideale $\mathfrak{a} := \langle 9 \rangle$ und $\mathfrak{b} := \langle 12 \rangle$ in $\mathbb{Z}$ sowie $\mathfrak{c} := \langle T^2 \rangle$ und $\mathfrak{d} := \langle T^2 + T \rangle$ in $\mathbb{Q}[T]$ und bestimme jeweils einen Erzeuger für

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{d}.$$

Aufgabe 2. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Ideale in einem K1-Ring R. Zeige:

(i) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$,

(ii) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \supseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$; Gleichheit gilt, falls $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ gilt,

(iii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Aufgabe 3. Es seien R ein endlicher K1-Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) Ist R ein Integritätsring, so ist R ein Körper.

(ii) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ Primideal, so ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ bereits ein maximales Ideal in R.

Aufgabe 4. Zeige: Der Unterring $\mathbb{Q}[T^2, T^3] \subseteq \mathbb{Q}[T]$. ist noethersch, aber er ist kein Hauptidealring.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.