Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 8

Abgabe: 22.06.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

⊛ **Aufgabe 1.** Es seien $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Betrachte die Eulersche ϕ-Funktion und beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Zahlen m und n sind teilerfremd.

(ii) Es gilt $m^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Aufgabe 2. Zeige: Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist euklidisch für $d = \pm 2$ und für $d = 3$. Zeige weiter, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ für $d = -3$ nicht euklidisch ist.

Aufgabe 3. Es sei R ein Integritätsring, und es seien Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ sowie $b_1, \ldots, b_m \in R$ gegeben. Zeige: Ist $p \in R$ ein Primelement mit

$$p \mid \sum_{i+j=k} a_i b_j, \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, m+n,$$

so gilt $p \mid a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ oder $p \mid b_j$ für $j = 1, \ldots, m$. *Hinweis:* Arbeite in dem Polynomring $R[T]$.

Aufgabe 4. Es seien R ein faktorieller Ring und $f, g \in Q(R)[T]$. Zeige: Gilt $fg \in R[T]$ und ist $g \in R[T]$ primitiv, so gilt $f \in R[T]$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.