Übungen zur Vorlesung

Algebra

Prof. Dr. Jürgen Hausen
Justus Springer

Sommersemester 2023

Blatt 9

Abgabe: 29.06.2023, 10:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Betrachte die Körperweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$. Zeige, dass die Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(I)$ zwar als $\mathbb{Q}$-Vektorräume isomorph zueinander sind, jedoch nicht als Körper.

⊛ **Aufgabe 2.** Es seien $f := T^3 + T + \overline{1} \in \mathbb{F}_2[T]$ und $\mathbb{K} := \mathbb{F}_2[T]/\langle f \rangle$.

(i) Zeige: Das Polynom f ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[T]$ und der Faktorring $\mathbb{K}$ ist ein Körper.

(ii) Zeige: Mit $\eta := T + \langle f \rangle$ und $\zeta := T^2 + \langle f \rangle$ besitzt jedes Element $u \in \mathbb{K}$ eine eindeutige Darstellung $u = a\zeta + b\eta + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{F}_2$.

(iii) Stelle die Verknüpfungstafeln der Gruppen $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K}, \cdot)$ auf. Stelle beide Gruppen als Produkt zyklischer Gruppen dar.

Aufgabe 3. Bestimme, jeweils mit Begründung, den Grad $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ für

$$a \ = \ \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}} \ \in \ \mathbb{R}, \qquad\qquad a \ = \ \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \ \in \ \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine Körpererweiterung. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $[\mathbb{K} : k]$ eine Primzahl, so gilt $\mathbb{K} = k(a)$ mit einem $a \in \mathbb{K}$.

(ii) Sind $m := [k(a) : k]$ und $n := [k(b) : k]$ teilerfremd, so gilt $[k(a,b) : k] = mn$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Zu den restlichen Aufgaben erhalten Sie Feedback von Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor.