Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 1

Abgabe: 24.04.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Betrachte die abgeschlossenen Unterräume $V(T_i) := \{[z] \in \mathbb{P}_n;\ z_i = 0\}$ des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n$. Zeige, dass für jedes $0 \le m \le n$ gilt

$$V(T_{m+1}) \cap \ldots \cap V(T_n) \quad \cong \quad \mathbb{P}_m.$$

Aufgabe 2. Zeige: Zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $x, y, z \in \mathbb{P}_1$ gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ mit

$$\varphi(x) \ = \ [1,0], \qquad \varphi(y) \ = \ [1,1], \qquad \varphi(z) \ = \ [0,1].$$

Aufgabe 3. Beweise folgende Aussagen:

(i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}_1$ ist $\mathbb{P}_1 \setminus \{x\}$ eine affine Varietät.

(ii) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}_2$ ist $\mathbb{P}_2 \setminus \{x\}$ keine affine Varietät.

Aufgabe 4. Beweise folgende Version von Lemma 1.2.10: Es sei A eine nullteilerfreie $\mathbb{Z}^n$-graduierte $\mathbb{K}$-Algebra.

(i) Es seien $f, g \in A$ mit $g \mid f$. Ist $f \in A$ homogen, so ist auch g homogen.

(ii) Jede Einheit $f \in A^*$ ist homogen.

(iii) Ist A faktoriell, so ist jedes homogene $0 \neq f \in A \setminus A^*$ ein Produkt homogener Primelemente.

Gib ein Beispiel für eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra an, die homogene Einheiten echt positiven Grades besitzt.