Übungen zur Vorlesung

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Sommersemester 2024

Blatt 2

Abgabe: 02.05.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es seien $0 \neq f, g \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ quadratfreie homogene Polynome mit $\deg(f) = \deg(g) > 0$. Zeige: Gilt $V(g) = V(f)$ in $\mathbb{P}_n$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}^*$ mit $g = \alpha f$.

Aufgabe 2. Eine *Gerade* in der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ ist ein linearer Unterraum $V(L)$ mit einer nichttrivialen Linearform $L = aT_0 + bT_1 + cT_2$. Zeige:

(i) Jede Gerade in $\mathbb{P}_2$ ist isomorph zu $\mathbb{P}_1$.

(ii) Je zwei verschiedene Geraden $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{P}_2$ schneiden sich in genau einem Punkt.

(iii) Zu $x, y \in \mathbb{P}_2$ mit $x \neq y$ gibt es genau eine Gerade $G \subseteq \mathbb{P}_2$ mit $x, y \in G$.

Aufgabe 3. Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_0, T_1]$ ein klassisch homogenes Polynom vom Grad d. Beweise folgende Aussagen:

(i) f ist ein Produkt von d Linearformen.

(ii) $V_{\mathbb{P}_1}(f)$ besteht aus höchstens d Punkten.

(iii) $V_{\mathbb{P}_1}(f)$ besteht genau dann aus genau d Punkten, wenn f quadratfrei ist.

Aufgabe 4. Beweise folgende Aussagen über den projektiven Raum $\mathbb{P}_n$.

(i) Es sei $L = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ eine nichttriviale Linearform. Zeige: Der offene Unterraum $\mathbb{P}_n \setminus V(L)$ ist eine affine Varietät.

(ii) Zeige: Zu jeder endlichen Menge $M \subseteq \mathbb{P}_n$ gibt es eine nichttriviale Linearform $L = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ mit $M \subseteq \mathbb{P}_n \setminus V(L)$.