Übungen zur Vorlesung

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Sommersemester 2024

Blatt 3

Abgabe: 08.05.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei X eine irreduzible affine Varietät, sodass $\mathcal{O}(X)$ ein faktorieller Ring ist. Zeige: Sind $f, g \in \mathcal{O}(X)$ teilerfremd, so ist X_g der Definitionsbereich der rationalen Funktion $[X_g, f/g] \in \mathbb{K}(X)$.

Aufgabe 2. Betrachte die affine rationale Raumkurve $\gamma\colon \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}^3$, $z \mapsto (z, z^2, z^3)$ und beweise folgende Aussagen für das Bild $X := \gamma(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}^3$:

(i) Es gilt $X = V(f_1, f_2)$ mit $f_1 = T_2 - T_1^2$ und $f_2 = T_3 - T_1T_2$.

(ii) Der projektive Abschluss $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}_3$ ist eine echte Teilmenge von $V(\overline{f}_1, \overline{f}_2)$.

Aufgabe 3. Es sei $\imath_n : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$ die Veronese-Abbildung zum Grad 2. Zeige:

(i) Es gilt $\imath_1(\mathbb{P}_1) = V(T_1^2 - T_0T_2) \subseteq \mathbb{P}_2$.

(ii) Bestimme explizit Gleichungen für die *Veronese-Fläche* $\imath_2(\mathbb{P}_2) \subseteq \mathbb{P}_5$.

Aufgabe 4. Es sei $\imath : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_d$ die Veronese-Abbildung zum Grad d. Die *rationale Normalkurve* vom Grad d ist $C_d = \imath(\mathbb{P}_1) \subseteq \mathbb{P}_d$.

(i) Bestimme explizit Gleichungen für $C_3 \subseteq \mathbb{P}_3$. Vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 2.

(ii) Zeige, dass jede nicht triviale Hyperebene $H = V(a_0T_0 + \cdots + a_dT_d) \subseteq \mathbb{P}_d$ die Kurve C_d in höchstens d Punkten schneidet.