Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 4

Abgabe: 15.05.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Betrachte $X := \mathbb{K}^n$, $Y := \mathbb{K}^m$. Zeige:

(i) Die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial T_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial T_n}$ entlang der Koordinatenachsen induzieren eine Basis des Tangentialraumes $T_{X,0}$.

(ii) Für eine algebraische Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit $\varphi(0) = 0$ ist die Jacobi-Matrix $J_0(\varphi)$ die darstellende Matrix des Differentials $T_{\varphi,0} : T_{X,0} \to T_{Y,0}$ bezüglich der Basen aus (i).

Aufgabe 2. Bestimme die Singularitätenmengen der projektiven Abschlüsse (in $\mathbb{P}_2$) von

$$V(T_1T_2) \ \subseteq\ \mathbb{K}^2, \qquad\qquad V(T_1^3 - T_2^2) \ \subseteq\ \mathbb{K}^2.$$

Aufgabe 3. Es sei $X \subseteq \mathbb{P}_3$ eine Quadrik vom Rang 3. Zeige: X besitzt genau eine Singularität x_0 und es gibt eine abgeschlossene Untervarietät $X' \subseteq \mathbb{P}_3$ mit

$$X' \cong \mathbb{P}_1, \qquad x_0 \not\in X', \qquad X = \bigcup_{x' \in X'} L(x_0, x'),$$

wobei $L(x_0, x') \subseteq \mathbb{P}_3$ die Gerade durch die Punkte $x_0, x' \in \mathbb{P}_3$ bezeichnet; d. h., X ist der projektive Kegel in $\mathbb{P}_3$ über einem $\mathbb{P}_1$.

Aufgabe 4. Es sei $0 \neq f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein klassisch homogenes Polynom vom Grad d und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) Es gilt $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle \cong \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$.

(ii) Es gilt $d = 1$.