Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 5

Abgabe: 29.05.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, in der Produkte existieren.

(i) Beweise Bemerkung 3.1.3: Sind X_1, X_2 Objekte in $\mathfrak{C}$ und W mit $\pi_i\colon W \to X_i$ sowie W' mit $\pi_i'\colon W' \to X_i$ Produkte für X_1, X_2, so gilt $W \cong W'$.

(ii) Sind X, Y, Z Objekte in $\mathfrak{C}$, so gilt

$$X \times Y \ \cong \ Y \times X, \qquad\qquad (X \times Y) \times Z \ \cong \ X \times (Y \times Z).$$

Aufgabe 2. Beweise Bemerkung 3.2.7: Sind $\varphi_1\colon X_1 \to Y$ und $\varphi_2\colon X_2 \to Y$ Morphismen einer Kategorie $\mathfrak{C}$, sowie $\pi_i\colon W \to X_i$ und $\pi_i'\colon W' \to X_i$ Faserprodukte für φ_1, φ_2, so gilt $W \cong W'$.

Aufgabe 3. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Zeige: $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{P}_{n+m}$.

Aufgabe 4. Es seien $X_1 = X_2 = \mathbb{K}$ und $X_{12} = X_{21} = \mathbb{K}^*$. Wir haben verschiedene Möglichkeiten zu verkleben:

(i) Vermöge $\varphi_{12}\colon X_{12} \to X_{21}$, $z \mapsto z$. Die resultierende Prävarietät $X := (X_1 \sqcup X_2)/\sim$ nennt man die *Gerade mit dem doppelten Nullpunkt*. Bezeichnen $0_i \in X$ die Restklassen der Nullpunkte in $0 \in X_i$, so ist X als Menge gegeben durch

$$X = \mathbb{K}^* \cup \{0_1\} \cup \{0_2\}.$$

Beweise folgende Aussagen:

(a) Man hat einen Morphismus

$$\pi\colon \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} \ \to \ X, \qquad (z, w) \ \mapsto \ \begin{cases} zw & z \neq 0 \neq w, \\ 0_1 & w = 0 \neq z, \\ 0_2 & z = 0 \neq w. \end{cases}$$

(b) Man hat einen Isomorphismus $\varphi\colon X \to X$ mit

$$\varphi_{|\mathbb{K}^*} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^*} \qquad \varphi(0_1) = 0_2, \qquad \varphi(0_2) = 0_1.$$

(c) Die Prävarietät X ist glatt und irreduzibel.

(d) Die Prävarietät X ist nicht affin.

(e) Die Diagonale Δ_X ist nicht abgeschlossen in $X \times X$.

(ii) Vermöge $\varphi_{12}\colon X_{12} \to X_{21}$, $z \mapsto z^{-1}$. Zeige: Die resultierende Prävarietät $X := (X_1 \sqcup X_2)/\sim$ ist isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}_1$.