Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 1

Abgabe: 25.10.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei R ein Integritätsring. Zeige: Die Einheitengruppen des Polynomrings bzw. des Rings der Laurent-Polynome sind gegeben durch

$$R[T_1, \ldots, T_n]^* \ = \ \{aT^0;\ a \in R^*\}, \qquad R[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]^* \ = \ \{aT^\nu;\ a \in R^*,\ \nu \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Aufgabe 2. Zeige, dass $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[T]$, $\sum a_\nu T^\nu \mapsto \sum \overline{a_\nu} T^\nu$ ein Homomorphismus von K1-Ringen ist, aber kein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte den Polynomring $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ und darin die Monomialideale $\mathfrak{a} := \langle T_1^2 T_2 \rangle$ sowie $\mathfrak{b} := \langle T_1 T_2^2 \rangle$. Veranschauliche wie in Bemerkung 1.2.8 die Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

Aufgabe 4. Es seien R und S K1-Ringe, $\psi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ sowie $\mathfrak{c} \subseteq S$ Ideale. Beweise folgende Aussagen:

(i) $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$,

(ii) $\psi(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq \sqrt{\langle \psi(\mathfrak{a}) \rangle}$,

(iii) $\psi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{c}}) = \sqrt{\psi^{-1}(\mathfrak{c})}$.