Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 2

Abgabe: 02.11.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Zeige: Das von den Polynomen $T_1 - a_1, \ldots, T_n - a_n$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ erzeugte Ideal ist maximal.

Aufgabe 2. Betrachte den Ring $R := \mathbb{K}[T^2, T^3] \subseteq \mathbb{K}[T]$ und zeige folgende Aussagen:

(i) R ist noethersch.

(ii) T^2 ist irreduzibel aber nicht prim.

(iii) $\langle T^2, T^3 \rangle$ ist ein maximales Ideal.

(iv) Es gilt $\sqrt{\langle T^2 \rangle} = \langle T^2, T^3 \rangle$.

Aufgabe 3. Es seien R ein faktorieller Ring und $\{0\} \neq \mathfrak{p} \leq R$ ein Primideal. Zeige: Das Ideal $\mathfrak{p}$ wird von Primelementen erzeugt. Ist R zudem noethersch, so wird $\mathfrak{p}$ von endlich vielen Primelementen erzeugt.

Beweise weiter folgende Aussagen über den Polynomring $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

(i) Die Polynome $T_2 - T_1^2$ und T_2 sind Primelemente in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Das Ideal $\langle T_2 - T_1^2, T_2 \rangle$ ist kein Primideal in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

(ii) Das $\langle T_1 T_2, T_2 - 1 \rangle$ ist ein Primideal in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$. Das Polynom $T_1 T_2$ ist kein Primelement in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimme alle Primelemente in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$ der Form

$$aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + dT_1 + eT_2 + f,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}$.