Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 3

Abgabe: 08.11.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Beweise Satz 1.5.8 für $n = 2$ direkt, d.h. ohne Verwendung des Hilbertschen Basissatzes bzw. des Dicksonschen Lemmas.

Aufgabe 2. Betrachte folgende Monomialideale in $\mathbb{K}[T_1, T_2]$:

$$\mathfrak{a} \ := \ \langle T_1^7 T_2^2,\, T_1^3 T_2^4,\, T_1^5 T_2,\, T_1^6,\, T_1^2 T_2^5,\, T_1^4 T_2^2,\, T_1 T_2^5 \rangle, \qquad \mathfrak{b} \ := \ \langle T_2^5,\, T_1^2 T_2^3,\, T_1 T_2^6,\, T_1^3 \rangle.$$

Berechne die Spitzen von $\lambda(\sqrt{\mathfrak{a}})$ und $\lambda(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

Aufgabe 3. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2]$ ein Monomialideal. Zeige: Die Ordnung der Menge $\mathbb{Z}^2_{\geq 0} \setminus \lambda(\mathfrak{a})$ ist gleich

(i) dem Supremum über die Längen r von Ketten echt aufsteigender Monomialideale

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}_r \subsetneq \mathbb{K}[T_1, T_2],$$

(ii) der Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}[T_1, T_2]/\mathfrak{a}$.

Aufgabe 4. Es sei $\mathfrak{a} := \langle T_2^3, T_2^2 T_1, T_1^2 T_2, T_1^4 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Bestimme eine Kette maximaler Länge von echt aufsteigenden Monomialidealen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \subsetneq \ldots \mathfrak{a}_k \subsetneq \mathbb{K}[T_1, T_2]$.