

EINFÜHRUNG IN KOMMUTATIVE ALGEBRA UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

Wintersemester 2023/24

BLATT 4

Abgabe: 15.11.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei $A \in \text{Mat}(n, m; \mathbb{Z})$. Betrachte für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den zugehörigen Homomorphismus $\varphi_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$ und zeige $A = J_{\varphi_A}(1, \dots, 1)$, wobei $J_{\varphi_A}(1, \dots, 1)$ die Jacobimatrix von φ_A im Punkt $(1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 2. Bestimme die Lösungsmenge in \mathbb{C}^4 für das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}T_2^5 T_3^4 T_4^6 - T_2^3 &= 0 \\T_1^2 T_2^5 T_4 - T_1 T_2^2 T_3^2 &= 0 \\T_1 T_2^6 T_3^7 T_4^{12} - T_2 T_3 T_4 &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Gib Polynome $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ an, sodass Folgendes gilt:

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{(0, 0), (1, 2), (3, 4)\}.$$

Aufgabe 4. Zeige, dass die beiden folgenden Mengen algebraisch sind:

- (i) Die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen A mit $\text{rg}(A) \leq k$ als Teilmenge von $\mathbb{K}^{m \times n}$.
- (ii) Die Gruppe $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ aller $(n \times n)$ -Matrizen der Determinante 1 als Teilmenge von $\mathbb{K}^{n \times n}$.