Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 6

Abgabe: 29.11.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Gib ein Beispiel dafür, dass bereits im Falle $s = 1$ der Rest r in Konstruktion 3.1.10 von der Wahl der Monomordnung abhängt.

Aufgabe 2. Es seien „$\ge$“ eine Monomordnung auf $\mathfrak{M}(n)$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Monomialideal ist, wenn $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ gilt.

Aufgabe 3. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ von der Form $f_i = a_{i1}T_1 + \ldots + a_{in}T_n$ und es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(r, n; \mathbb{K})$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Betrachte das Ideal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und beweise folgende Aussagen:

(i) Ist $S \in \mathrm{GL}(r; \mathbb{K})$ und $B := S \cdot A$, so wird $\mathfrak{a}$ erzeugt durch die Polynome $g_1, \ldots, g_r$, wobei $g_i := b_{i1}T_1 + \ldots + b_{in}T_n$ mit den Einträgen b_{ij} von B.

(ii) Besitzt $B = S \cdot A$ aus (i) Zeilenstufenform, so ist $\{g_1, \ldots, g_r\}$ mit den g_i aus (i) eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung.

Aufgabe 4. Betrachte die Polynome $g_1 := T_2 - T_1^2,\ g_2 := T_3 - T_2^3 \in \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$ und das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{a} := \langle g_1, g_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2, T_3]$.

(i) Zeige, dass $\{g_1, g_2\}$ eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bezüglich „$\ge_{\mathrm{hlex}}$“ ist.

(ii) Beweise oder widerlege: $T_2^4 - 2T_2^3T_1^2 + T_2^2T_1^4 - T_1T_3 + T_1T_2^3$ ist ein Element aus $\mathfrak{a}$.