Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 7

Abgabe: 06.12.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale in R. Beweise folgende Aussagen:

(i) Für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{k+1}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^k) : \mathfrak{b})$.

(ii) Die *Saturierung* $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty) := \bigcup_{k=1}^\infty (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^k)$ ist ein Ideal in R.

(iii) Falls R noethersch ist, existiert ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^m)$.

Betrachte nun den Fall $R = \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$, $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Gib ein Verfahren an, um eine Gröbnerbasis bezüglich „$\geq_{\text{lex}}$" für die Saturierung $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^\infty)$ zu bestimmen.

Hinweis. Baue auf die Verfahren 3.3.10 und 3.3.16 auf.

Aufgabe 2. Berechne mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus:

(i) Die reduzierte Gröbnerbasis von $\langle T^3 - 3T + 2,\ T^2 - 1 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$,

(ii) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal $\langle 2T_1 + T_2,\ 5T_1 + 3T_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T_1, T_2]$.

Aufgabe 3. Es sei $k \subseteq \mathbb{K}$ eine transzendente Körpererweiterung. Zeige: $k \subseteq \mathbb{K}$ besitzt unendlich viele echte Zwischenkörper.

Aufgabe 4. Es sei $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Sequenz $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ spaltet.

(ii) Für jedes $v \in \mathbb{Z}^n$ und jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt $kv \in \varphi(M') \Rightarrow v \in \varphi(M')$.

(iii) Der Modul M'' ist torsionsfrei.