Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 8

Abgabe: 13.12.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine algebraische Menge. Zeige, dass zu je zwei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ ein $f \in \mathbb{K}[X]$ existiert mit $f(x) = 0$ und $f(x') = 1$.

Aufgabe 2. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Primelement, und es sei $X := V(f)$. Zeige:

$$I(X) \;=\; \langle f \rangle, \qquad \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\langle f \rangle.$$

Aufgabe 3. Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein Polynom mit Primfaktorzerlegung $f = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$, wobei $\nu_i \geq 1$. Zeige:

(i) $V(f) = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_s)$ ist die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

(ii) Es gilt $I(V(f)) = \langle p_1 \cdots p_s \rangle$.

Gelten diese Aussagen auch für nicht algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{K}$?

Aufgabe 4. Betrachte die Polynome $f_1 := T_1^2 + T_2^2 - 2$, $f_2 := T_2^2 + T_3^2 - 2$, $f_3 := T_1^2 + T_3^2 - 2$ und das von ihnen erzeugte Ideal $\mathfrak{a} := \langle f_1,\, f_2,\, f_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3]$. Zeige folgende Aussagen:

(i) $G := \{T_1^2 - 1,\, T_2^2 - 1,\, T_3^2 - 1\}$ ist eine Gröbnerbasis für $\mathfrak{a}$ bzgl. „$\geq_{\mathrm{lex}}$“.

(ii) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[T_1, T_2, T_3] \,/\, \mathfrak{a}) = 8$.

(iii) $\mathfrak{a}$ ist ein Radikalideal.