

EINFÜHRUNG IN KOMMUTATIVE ALGEBRA UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

Wintersemester 2023/24

BLATT 9

Abgabe: 20.12.2023, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei F ein Funktor von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie \mathcal{D} . Zeige: Sind zwei Objekte X und X' aus \mathcal{C} isomorph zueinander, so sind auch die Objekte $F(X)$ und $F(X')$ aus \mathcal{D} isomorph zueinander.

Aufgabe 2. Betrachte die algebraischen Mengen $X := \mathbb{K}$ und $Y := V(T_1^3 - T_2^2)$ und die Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y, z \mapsto (z^2, z^3)$.

- (i) Zeige, dass φ eine bijektive algebraische Abbildung ist.
- (ii) Folgere aus Aufgabe 1 und dem Antiäquivalenzsatz, dass φ kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. Es seien R ein K1-Ring und $S \subseteq R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Monoid. Zeige:

- (i) Ist R noethersch, so ist auch $S^{-1}R$ noethersch.
- (ii) Ist R faktoriell, so ist auch $S^{-1}R$ faktoriell.

Aufgabe 4 (Singular). Diese Aufgabe bezieht sich auf das freie Computeralgebra-System Singular (<https://www.singular.uni-kl.de>). Eine Installation ist nicht notwendig; zur Bearbeitung der Aufgabe kann die direkt einsatzbereite Online-Version unter <https://www.singular.uni-kl.de:8003> verwendet werden.

Betrachte in $\mathbb{C}[T_1, T_2, T_3]$ das Ideal $\mathfrak{a} := \langle 2T_1T_2^3 + 4T_1T_3 + 5T_2^5, T_1^2T_2T_3^2 + T_1T_3^2 \rangle$ und das Ideal \mathfrak{b} , welches von folgenden Polynomen erzeugt wird:

$$\begin{aligned} &T_1^2T_2T_3^2 + T_1T_3^2, \quad 5T_2^5 + 2T_1T_2^3 + 4T_1T_3, \\ &4T_1^4T_3^3 + 5T_1T_2^3T_3^2 - 2T_1T_3^2, \quad 5T_1T_2^4T_3^2 - 4T_1^3T_3^3 - 2T_1T_2T_3^2. \end{aligned}$$

- (i) Berechne eine Gröbnerbasis bezüglich „ \geq_{lex} “ von \mathfrak{a} .
- (ii) Prüfe, ob $T_1^2T_2T_3^4 + T_1T_3^4 + 5T_2^{11}T_3^2 - 2T_2^8T_3^2 - 4T_2^5T_3^3 \in \mathfrak{a}$ gilt.
- (iii) Prüfe, ob $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ gilt.

Hinweise. Zur Bearbeitung dürfen alle Befehle von Singular benutzt werden. Speziell hier sind `groebner`, `reduce`, `interred` und `normalize` aus der Bibliothek `polylib.lib` nützlich. Diese kann mit dem Befehl `LIB "polylib.lib";` importiert werden.

Mit `?<Befehlname>`; erhält man Informationen über den gegebenen Befehl sowie Beispiele für dessen Benutzung, zum Beispiel gibt `?groebner`; Informationen zum Befehl `groebner` aus.

Als Abgabe für diese Aufgabe reicht die ausgedruckte Ein- und Ausgabe von Singular.