Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 10

Abgabe: 10.01.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

In der Weihnachtspause (23. Dezember - 7. Januar) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungs- und Übungsbetrieb beginnt wieder am Montag, den 8. Januar 2024.

Wir wünschen allen eine erholsame Zeit, frohe Festtage und alles Gute für das Jahr 2024!

Aufgabe 1. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ein echtes Ideal. Zeige: Es gibt bis auf Nummerierung eindeutig bestimmte Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ in $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ mit $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$.

Aufgabe 2. Prüfe, ob die folgenden algebraischen Mengen isomorph zueinander sind:

$$X := V(T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^3, \qquad Y := V(T_1T_2(T_1 - T_2)) \subseteq \mathbb{K}^2.$$

Aufgabe 3. Es seien $A := \mathbb{K}[T_1, T_2]/\langle T_1T_2 \rangle$ und $f \in A$ die Restklasse von $T_1 \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$. Zeige $A_f \cong \mathbb{K}[T]_T$ einmal algebraisch und einmal geometrisch, d. h. mithilfe der Theorie über algebraische Mengen.

Aufgabe 4 (Identitätssatz)**.** Es sei $X \subseteq \mathbb{K}^n$ eine irreduzible algebraische Menge und es seien $\emptyset \neq V \subseteq U$ offene Mengen in X.

(i) Zeige: Der Einschränkungshomomorphismus $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ ist injektiv, d. h., $f_{|V} = 0$ impliziert $f = 0$.

(ii) Zeige anhand eines Beispiels, dass man in (i) die Voraussetzung „X irreduzibel“ nicht durch „X zusammenhängend“ ersetzen kann.