Übungen zur Vorlesung

Einführung in Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Wintersemester 2023/24

Blatt 11

Abgabe: 17.01.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei X ein Raum mit Funktionen und es sei $Y \subseteq X$ ein Unterraum. Zeige: Die Inklusionsabbildung $Y \to X$ ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen.

Aufgabe 2. Es seien X eine affine Varietät und $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $f \in \mathcal{O}(X)$.

(ii) $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist ein Morphismus.

Aufgabe 3. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen und es sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeige: Ist $s \in \mathcal{F}(U)$ ein Element mit $s_x = 0 \in \mathcal{F}_x$ für alle $x \in U$, so gilt $s = 0$.

Aufgabe 4. Es sei X eine irreduzible affine Varietät, und es sei $\mathbb{K}(X)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_X(X)$. Zeige: Man hat kanonische Monomorphismen:

(i) $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}(X)$ für jeden Punkt $x \in X$,

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathbb{K}(X)$ für jede offene Menge $U \subseteq X$.

Zeige weiter: Ist $U \subseteq X$ eine offene Menge, so gilt in dem Körper $\mathbb{K}(X)$ die Gleichung

$$\mathcal{O}_X(U) \quad = \quad \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$