

LINEARE ALGEBRA 1

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/winter-2526/lina1>

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Wintersemester 2025/26

BLATT 2

Abgabe: Mittwoch, den 29.10.2025, 18:00 Uhr

Aufgabe 1. Es seien X sowie Y Mengen, $\varphi: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige:

$$A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A)), \quad \varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B.$$

Zeige anhand von Beispielen, dass man bei keiner der beiden Aussagen Gleichheit erwarten darf. Zeige weiter

$$\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(A))) = \varphi(A).$$

Aufgabe 2. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

- (i) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
- (ii) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, y, 0)$.
- (iii) $\mathbb{R} \rightarrow \{2\}, x \mapsto 2$.
- (iv) $C_3 \rightarrow C_3, x \mapsto x + x$.

Aufgabe 3. Berechne für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ den folgenden Ausdruck in der Gruppe $(C_n, +)$:

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \cdots + \overline{n-2} + \overline{n-1}.$$

⊛ **Aufgabe 4.** Beweise folgende Aussagen:

- (i) Sind $\varphi: G \rightarrow H$ und $\psi: H \rightarrow F$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi: G \rightarrow F$ ein Gruppenhomomorphismus.
- (ii) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Dann ist die folgende Abbildung ein Gruppenhomomorphismus:

$$\mathbb{Z} \rightarrow C_n, \quad a \mapsto \overline{r(la; n)}.$$

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.