

LINEARE ALGEBRA 1

BLATT 3

Abgabe: Mittwoch, den 05.11.2025, 18:00 Uhr

Aufgabe 1. Eine Gruppe $G = \{e_G, g_1, \dots, g_r\}$ mit Verknüpfung “ $*$ ” wird durch ihre *Verknüpfungstafel* beschrieben:

$(G, *)$	e_G	g_1	$\dots$	g_r
e_G	$e_G * e_G$	$e_G * g_1$	$\dots$	$e_G * g_r$
g_1	$g_1 * e_G$	$g_1 * g_1$	$\dots$	$g_1 * g_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
g_r	$g_r * e_G$	$g_r * g_1$	$\dots$	$g_r * g_r$

- (i) Bestimme die Einheitsgruppe C_{12}^* des Ringes C_{12} .
- (ii) Stelle die Verknüpfungstafeln für C_{12}^* und C_4 auf.
- (iii) Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $C_{12}^* \rightarrow C_4$.

Aufgabe 2. Zeige, dass die folgende Abbildung ein bijektiver Körperhomomorphismus ist:

$$\kappa: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a_1 + a_2 \cdot I \mapsto a_1 - a_2 \cdot I.$$

Zeige weiter:

- (i) Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, d.h., von der Form $z = (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$, wenn $\kappa(z) = z$ gilt.
- (ii) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist die Summe $z + \kappa(z)$ sowie das Produkt $z \cdot \kappa(z)$ reell.

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über C_7 :

$$\begin{array}{rclcl} \bar{2}x_1 & + & x_2 & - & \bar{4}x_3 & = & \bar{2}, \\ x_1 & - & \bar{6}x_2 & - & \bar{3}x_3 & = & -\bar{2}, \\ & & -\bar{4}x_2 & + & \bar{2}x_3 & = & \bar{3}. \end{array}$$

Aufgabe 4. Es sei $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Bestimme zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $z^2 + az + b = 0$ gilt.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.