Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/winter-2526/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2025/26

Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, den 03.12.2025, 18:00 Uhr

Aufgabe 1.

(i) Bestimme alle möglichen Produkte aus je zwei der folgenden drei Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte die folgenden (3×3)-Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad E(\lambda;3,1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E(2,3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E(\lambda;2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Produkte

$$E(\lambda;3,1)\cdot A, \quad A\cdot E(\lambda;3,1), \qquad E(2,3)\cdot A, \quad A\cdot E(2,3), \qquad E(\lambda;2)\cdot A, \quad A\cdot E(\lambda;2).$$

Was passiert dabei mit Zeilen und Spalten von A?

⊛ **Aufgabe 2.** Betrachte die Basen $\mathcal{B} := ((1,2),\ (1,1))$ und $\mathcal{C} := ((3,1),\ (2,1))$ von $\mathbb{R}^2$ und bestimme die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ für die linearen Abbildungen

(i) $\varphi_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (x_1,-x_2)$,

(ii) $\varphi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (x_1,2x_2)$,

(iii) $\varphi_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2) \mapsto (x_1+x_2,x_2)$.

Aufgabe 3. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $V := \mathrm{Lin}(T^0,\dots,T^n) \subseteq \mathbb{K}[T]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen T über $\mathbb{K}$ vom Grad $\le n$. Zeige, dass

$$D\colon V \ \to\ V, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \ \mapsto\ \sum_{k=1}^{n} k a_k T^{k-1}$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (T^0,\dots,T^n)$ von V für

$$\varphi \ =\ D, \qquad \varphi \ =\ D\circ D, \qquad \varphi \ =\ D\circ D - D.$$

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige: Ist φ bijektiv, so ist auch φ^* bijektiv und es gilt $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.