

## BLATT 8

Abgabe: Mittwoch, den 10.12.2025, 18:00 Uhr

⊗ **Aufgabe 1.** Bestimme den Rang folgender Matrizen  $A \in \text{Mat}(3, 5; C_5)$  und  $B \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ :

$$A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 2 & 3 & e \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } ad \neq bc.$$

**Aufgabe 2.** Schreibe folgende Matrix als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q}).$$

**Aufgabe 3.** Bestimme die Inversen für folgende Matrizen  $A \in \text{Mat}(3, 3; C_7)$  und  $B \in \text{Mat}(4, 4; \mathbb{C})$ :

$$A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 - I & 1 \\ -1 & 1 & I & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -I \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4.** Es seien  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Zeige folgende Aussagen:

- (i)  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn  $\varphi^*$  surjektiv ist,
- (ii)  $\varphi$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\varphi^*$  injektiv ist.

*Hinweis: Wähle Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  für  $V, W$  und vergleiche die Ränge der darstellenden Matrizen  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$  und  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^*)$ .*