

LINEARE ALGEBRA 1

BLATT 8

Abgabe: Mittwoch, den 10.12.2025, 18:00 Uhr

- ⊛ **Aufgabe 1.** Bestimme den Rang folgender Matrizen $A \in \text{Mat}(3, 5; C_5)$ und $B \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$:

$$A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 2 & 3 & e \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } ad \neq bc.$$

- Aufgabe 2.** Schreibe folgende Matrix als Produkt von Elementarmatrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q}).$$

- Aufgabe 3.** Bestimme die Inversen für folgende Matrizen $A \in \text{Mat}(3, 3; C_7)$ und $B \in \text{Mat}(4, 4; \mathbb{C})$:

$$A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-I & 1 \\ -1 & 1 & I & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -I \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Aufgabe 4.** Es seien \mathbb{K} ein Körper und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorräume. Zeige folgende Aussagen:

- (i) φ ist genau dann injektiv, wenn φ^* surjektiv ist,
- (ii) φ ist genau dann surjektiv, wenn φ^* injektiv ist.

Hinweis: Wähle Basen \mathcal{B}, \mathcal{C} für V, W und vergleiche die Ränge der darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^*)$.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.