

**BLATT 9**

Abgabe: Mittwoch, den 17.12.2025, 18:00 Uhr

**Aufgabe 1.** Es seien Matrizen  $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$  und  $B \in \text{Mat}(m, k; \mathbb{K})$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  gegeben. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) Es gibt eine Matrix  $X \in \text{Mat}(n, k; \mathbb{K})$  mit  $A \cdot X = B$ .
- (ii) Es gilt  $\text{Rang}(A, B) = \text{Rang}(A)$ .

**Aufgabe 2.** Betrachte die beiden Permutationen

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma \circ \tau, \quad \tau \circ \sigma, \quad \sigma^{-1}, \quad \tau^{-1}, \quad \text{sg}(\sigma), \quad \text{sg}(\tau), \quad \text{sg}(\sigma^{-1}), \quad \text{sg}(\tau \circ \sigma).$$

**Aufgabe 3** (Kleinsche Vierergruppe). Zeige, dass folgende Teilmenge eine Untergruppe ist:

$$V_4 := \{\text{id}_{X_4}, (1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3)\} \subseteq S_4.$$

⊗ **Aufgabe 4.** Es seien  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis für  $\mathbb{K}^n$  und  $S_n$  die symmetrische Gruppe. Beweise folgende Aussagen:

- (i) Zu jedem  $\sigma \in S_n$  gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus  $\varphi_\sigma: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit

$$\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Für je zwei Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  gilt dabei  $\varphi_{\sigma \circ \tau} = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$ .

- (ii) Die darstellende Matrix  $A_\sigma$  von  $\varphi_\sigma$  bezüglich  $\mathcal{E}$  ist invertierbar und es gilt

$$A_\sigma = M_{\mathcal{E}}^\mathcal{E}(\varphi_\sigma) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Für je zwei Permutationen  $\sigma, \tau \in S_n$  gilt dabei  $A_{\sigma \circ \tau} = A_\sigma \cdot A_\tau$ .

- (iii) Die Abbildung  $S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K})$ ,  $\sigma \mapsto A_\sigma$  ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.