

LINEARE ALGEBRA 1

BLATT 9

Abgabe: Mittwoch, den 17.12.2025, 18:00 Uhr

Aufgabe 1. Es seien Matrizen $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in \text{Mat}(m, k; \mathbb{K})$ über einem Körper \mathbb{K} gegeben. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) Es gibt eine Matrix $X \in \text{Mat}(n, k; \mathbb{K})$ mit $A \cdot X = B$.
- (ii) Es gilt $\text{Rang}(A, B) = \text{Rang}(A)$.

Aufgabe 2. Betrachte die beiden Permutationen

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tau := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und berechne die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma \circ \tau, \quad \tau \circ \sigma, \quad \sigma^{-1}, \quad \tau^{-1}, \quad \text{sg}(\sigma), \quad \text{sg}(\tau), \quad \text{sg}(\sigma^{-1}), \quad \text{sg}(\tau \circ \sigma).$$

Aufgabe 3 (Kleinsche Vierergruppe). Zeige, dass folgende Teilmenge eine Untergruppe ist:

$$V_4 := \{\text{id}_{X_4}, (1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3)\} \subseteq S_4.$$

⊛ **Aufgabe 4.** Es seien \mathbb{K} ein Körper, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis für \mathbb{K}^n und S_n die symmetrische Gruppe. Beweise folgende Aussagen:

- (i) Zu jedem $\sigma \in S_n$ gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\varphi_\sigma: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit

$$\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Für je zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt dabei $\varphi_{\sigma \circ \tau} = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau$.

- (ii) Die darstellende Matrix A_σ von φ_σ bezüglich \mathcal{E} ist invertierbar und es gilt

$$A_\sigma = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi_\sigma) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Für je zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt dabei $A_{\sigma \circ \tau} = A_\sigma \cdot A_\tau$.

- (iii) Die Abbildung $S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K}), \sigma \mapsto A_\sigma$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.