Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/winter-2526/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2025/26

Blatt 10

Abgabe: Mittwoch, den 14.01.2026, 18:00 Uhr

In der Lineare-Algebra-Weihnachtspause (22. Dezember - 7. Januar) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungsbetrieb beginnt wieder am Donnerstag, 8. Januar, der Übungsbetrieb am Montag, 12. Januar.

Wir wünschen allen eine erholsame Zeit, frohe Festtage und alles Gute für das Jahr 2026!

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zu $\sigma \in S_n$ sei $A_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeige: Man hat ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, "\sigma \mapsto A_\sigma"] \arrow[d, "\sigma \mapsto \mathrm{sg}(\sigma)"'] & \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \arrow[d, "A \mapsto \det(A)"] \\
\{\pm 1\} \arrow[r, "\pm 1 \mapsto \pm 1_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}^*
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Betrachte die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix}
\overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \overline{0} \\
\overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \ldots & \overline{0} \\
\overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \ldots & \overline{0} \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \overline{0} \\
\overline{0} & \ldots & \ldots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\
\overline{0} & \ldots & \ldots & \ldots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1}
\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n,n;C_2),$$

deren Eintrage auf der Diagonalen sowie der oberen und unteren Nebendiagonalen gleich $\overline{1}$ und ansonsten $\overline{0}$ sind.

(i) Zeige: Für $n \geq 3$ gilt $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$.

(ii) Für welche $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ist die Matrix A_n invertierbar?

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{Q})$:

$$A \;:=\; \begin{pmatrix}
1 & -2 & 3 & 1 \\
1 & 2 & -3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 \\
-2 & 1 & 3 & -2
\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{Z})$, d.h., alle Einträge von A seien ganze Zahlen. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{Z})$ mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

(ii) Es gilt $\det(A) = \pm 1$.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.