Lineare Algebra 1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Wintersemester 2025/26

Blatt 11

Abgabe: Mittwoch, den 21.01.2026, 18:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Es sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit den punktweisen Verknüpfungen) und es seien

$$\begin{aligned} V^+ &:= \{f \in V;\ f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}, \\ V^- &:= \{f \in V;\ f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nach Blatt 4 sind die Teilmengen $V^+, V^- \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige: Es gilt $V = V^+ \oplus V^-$.

Aufgabe 2. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k\colon V \to V$ lineare Abbildungen mit

$$\varphi_j \circ \varphi_i = 0, \text{ falls } i \neq j, \quad \varphi_1 + \cdots + \varphi_k = \mathrm{id}_V.$$

Zeige: Es gilt $V = \varphi_1(V) \oplus \cdots \oplus \varphi_k(V)$.

Aufgabe 3 (Ein alternativer Beweis für 7.2.14)**.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U, W \leq_{\mathbb{K}} V$ Untervektorräume und $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis für $U \cap W$.

(i) Zeige: Es gibt Basen $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n)$ für U und $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m)$ für W.

(ii) Zeige: Die Familie $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m)$ ist eine Basis für die Summe $U + W$.

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq_{\mathbb{K}} V$ ein Untervektorraum. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V mit $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap U = \{0_V\}$ und $v_{k+1}, \ldots, v_n \in U$. Zeige, dass $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ eine Basis für V/U ist.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.