

LINEARE ALGEBRA 1

BLATT 12

Abgabe: Mittwoch, den 28.01.2026, 18:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Zeige, dass die folgenden Familien Basen des $V := \mathbb{R}^3$ sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &:= ((-2, 2, 1), (0, 1, 0), (1, 1, -1)), \\ \mathcal{C} &:= ((1, 1, -1), (-1, -1, 2), (1, 0, 1)).\end{aligned}$$

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und bezeichne mit \mathcal{E} die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$. Bestimme die folgenden Matrizen

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_V), \quad (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_V))^{-1}, \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_V), \\ (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_V))^{-1}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi).\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Es sei \mathbb{K} ein Körper. Untersuche, welche der folgenden Relationen Äquivalenzrelationen auf $\text{Mat}(n, n; \mathbb{K})$ sind:

- (i) $A \sim B : \iff B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ für ein $S \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$,
- (ii) $A \sim B : \iff \det(A \cdot B) = 0$,
- (iii) $A \sim B : \iff \ker(\mu_A) = \ker(\mu_B)$,
- (iv) $A \sim B : \iff A^2 + B^2 = E_n$.

Aufgabe 3. Es sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} . Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktion

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{nx}.$$

Zeige, dass (f_1, \dots, f_{999}) eine linear unabhängige Familie in dem Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4. Es sei \mathbb{K} ein Körper, V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^n := \varphi \circ \dots \circ \varphi = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\varphi = 0$ gilt.

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.