Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 1

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/winter-2526/lina1

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Wintersemester 2025/26

Blatt 13

Abgabe: Keine

Aufgabe 1. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass φ diagonalisierbar ist und ± 1 die einzig möglichen Eigenwerte von φ sind.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige: Die Menge der Einheiten des Polynomrings $\mathbb{K}[T]$ ist gegegeben durch $\mathbb{K}[T]^* = \{aT^0;\ a \in \mathbb{K}^*\}$.

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Eigenwerte der Abbildung $\mu_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$ und untersuche μ_A weiterhin auf Diagonalisierbarkeit, wobei

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gib gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$ an, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ Diagonalgestalt besitzt.

Zwischenergebnisse als Hinweis: In (i) besitzt μ_A die Eigenwerte 1 und 3. In (ii) besitzt μ_A die Eigenwerte 1 und 2.

Aufgabe 4. Bestimme eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{C}).$$

Die mit ⊛ gekennzeichnete Aufgabe ist zur sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und wird mit 0–4 Punkten bewertet. Für das Vorrechnen einer Aufgabe in der Übungsgruppe gibt es jeweils einen Punkt für die Studienleistung.