Satz 3.4

Es sei V *ein* K*-Vektorraum und* $r \geq 1$. *Setzen wir* $\bigwedge^r V := T^r(V)/V_r$ *und*

$$\varphi : V^r \to \bigwedge^r V : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_r := x_1 \otimes \ldots \otimes x_r (\mathrm{mod}\ V_r),$$

dann ist das Paar $\left(\bigwedge^r V, \varphi\right)$ *ein* r*-faches äußeres Produkt von* V.

Beweis: Wir beachten zunächst, daß die Abbildung $\varphi = \nu \circ \phi$ die Komposition der zum Tensorprodukt gehörenden multilinearen Abbildung $\phi : V^r \to T^r(V)$ mit der linearen Restklassenabbildung $\nu : T^r(V) \to T^r(V)/V_r$ ist. Damit ist φ insbesondere multilinear. Sind nun $x_1, \ldots, x_r \in V$ mit $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$, dann gilt zudem, daß $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \in V_r$, und mithin, $\varphi(x_1, \ldots, x_r) = 0$. D. h. φ ist auch alternierend. Es bleibt also, die universelle Eigenschaft zu überprüfen.

Sei dazu $\varphi' : V^r \to U'$ eine alternierende multilineare Abbildung. Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert, daß es genau eine lineare Abbildung $\psi' : T^r(V) \to U'$ gibt mit $\psi' \circ \phi = \varphi'$, d. h. so, daß folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V^r & \xrightarrow{\ \phi\ } & T^r(V). \\ & {\scriptstyle \varphi'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \exists_1 \psi'} & \\ & U' & \end{array}$$

Da φ' alternierend ist, ist $\psi'(V_r) = 0$, und das bedeutet nach Aufgabe 2.33, daß ψ' in eindeutiger Weise durch $T^r(V)/V_r$ faktorisiert, d. h. es gibt genau eine Abbildung $\psi : T^r(V)/V_r \to U'$, so daß $\psi' = \psi \circ \nu$, d. h. so, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T^r(V) & \xrightarrow{\ \nu\ } & T^r(V)/V_r. \\ & {\scriptstyle \psi'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \exists_1 \psi} & \\ & U' & \end{array}$$

Aber dann ist $\psi : T^r(V)/V_r = \bigwedge^r V \to U'$ eine Abbildung mit $\psi \circ \varphi = \psi \circ \nu \circ \phi = \psi' \circ \phi = \varphi'$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß ψ eindeutig ist mit dieser Eigenschaft. Sei also $\psi'' : T^r(V)/V_r = \bigwedge^r V \to U'$ eine zweite Abbildung mit $\psi'' \circ \varphi = \varphi'$. Setzen wir $\psi''' := \psi'' \circ \nu : T^r(V) \to U'$, dann gilt

$$\psi''' \circ \phi = \psi'' \circ \nu \circ \phi = \psi'' \circ \varphi = \varphi',$$

also folgt mit der oben angegebenen Eindeutigkeit von ψ' beim Tensorprodukt, daß $\psi''' = \psi'$. Aber dann gilt $\psi' = \psi'' \circ \nu$ und aus der ebenfalls oben angeführten Eindeutigkeit von ψ beim Quotientenraum folgt, daß $\psi'' = \psi$. □