1. Fehler:
Die Aussage 5.1.3 Teil 4 aus der Vorlesung ist falsch. Es gilt wohl, wenn f ein Isomorphismus ist, dann ist auch f^t ein Isomorphismus - und der Beweis dafür ist auch richtig. Die Umkehrung gilt i. a. jedoch nicht. Insbesondere geht der Beweis nicht analog. Siehe dazu folgendes Beispiel.

Beispiel 1
Es sei $R = \mathbb{Z}$ und $V = W = \mathbb{Z}_2$. Dann gilt $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \{0\}$, denn, für einen Homomorphismus $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ mit $\alpha([1]) = z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$0 = \alpha([0]) = \alpha([1] + [1]) = \alpha([1]) + \alpha([1]) = 2z,$$

also $\alpha([1]) = z = 0$.
Dann ist aber $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(W^*, V^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\{0\}, \{0\}) = \{\mathrm{id}_{\{0\}}\}$, und damit ist *jedes* Element von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(W^*, V^*)$ ein Isomorphismus.
Hingegen ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}, 0\}$, enthält also die Abbildung $0 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, die alles auf die Null abbildet und sicher kein Isomorphismus ist. Für diese Abbildung 0 gilt aber, daß $0^t = \mathrm{id}_{\{0\}}$ ein Isomorphismus ist.

Man beachte, daß im Fall, daß V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume sind, sehr wohl gilt, f ist ein Isomorphismus, genau dann, wenn f^t ein Isomorphismus ist, da dann ja $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^t)$.

2. Fehler:
Es steht noch der Beweis der Aussage

$$\mathrm{Im}\left(f^t\right) \supseteq \mathrm{Ker}(f)^o$$

aus, wenn $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, wobei V und W beliebige K-Vektorräume sind.
Sei also $g \in \mathrm{Ker}(f)^o$. Wir suchen ein $h \in W^*$ mit $g = f^t(h) = h \circ f$.
Schritt a.: Wir wählen nun eine Basis $B' = (y_i \mid i \in I)$ von $\mathrm{Im}(f)$ und ergänzen diese zu einer Basis $B = (y_i, z_j \mid i \in I, j \in J)$ von W. Sodann wählen wir zu jedem y_i, $i \in I$, ein $x_i \in f^{-1}(y_i)$, und definieren eine K-lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(W, K) = W^*$ durch

$$h : W \to K : \begin{cases} y_i \mapsto g(x_i) \in K, & i \in I, \\ z_j \mapsto 0 \in K, & j \in J. \end{cases}$$

Schritt b.: Wir zeigen nun, daß $f^t(h) = g$.
Sei dazu $x \in V$. Dann gibt es $\lambda_i \in K$, $i \in I$, mit $f(x) = \sum'_{i \in I} \lambda_i y_i$. Dann gilt aber für $x' := \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$,

$$f\left(x'\right) = \sum_{i \in I}{}' \lambda_i f(x_i) = \sum_{i \in I}{}' \lambda_i y_i = f(x),$$

und damit $f\bigl(x - x'\bigr) = f(x) - f\bigl(x'\bigr) = 0$, d. h. $x - x' \in \operatorname{Ker}(f)$. Also gilt:

$$0 = \bigl\langle g, x - x' \bigr\rangle = g(x) - g\bigl(x'\bigr),$$

und damit

$$g(x) = g\bigl(x'\bigr) = \sum_{i \in I}{}' \lambda_i g(x_i) = \sum_{i \in I}{}' \lambda_i h(y_i) = \sum_{i \in I}{}' \lambda_i h\bigl(f(x_i)\bigr)$$

$$= h\left(f\left(\sum_{i \in I}{}' \lambda_i x_i\right)\right) = h\Bigl(f\bigl(x'\bigr)\Bigr) = h\bigl(f(x)\bigr) = f^t(h)(x).$$

Also ist $f^t(h) = g$.