Satz 5.8
Es sei $(G, \cdot)$ *eine Gruppe.*

a. *Eine Untergruppe* $U \subseteq G$ *von* G *ist genau dann ein Normalteiler, wenn auf der Menge* G/U *die Operation*

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y], \quad \textit{für } [x], [y] \in G/U,$$

wohldefiniert ist, d. h. die Vorschrift $G/U \times G/U \to G/U : \big([x], [y]\big) \mapsto [x \cdot y]$ *definiert eine Abbildung.*

b. *Ist* $U \subseteq G$ *ein Normalteiler von* G*, dann ist* $(G/U, \cdot)$ *mit der in a. definierten Gruppenoperation eine Gruppe mit neutralem Element* $[e] = U$*. Für* $[x] \in G/U$ *gilt ferner* $[x]^{-1} = \big[x^{-1}\big]$.
Man nennt G/U *die* Faktorgruppe *von* G *nach* U.
Die Restklassenabbildung

$$\pi : G \to G/U : x \mapsto [x]$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\operatorname{Ker}(\pi) = U$.

Beweis: b. Nach Teil a. ist die Gruppenoperation wohldefiniert, und für $[x], [y], [z] \in G$ gilt:

$$\big([x] \cdot [y]\big) \cdot [z] = [xy] \cdot [z] = \big[(xy)z\big] = \big[x(yz)\big] = [x] \cdot [yz] = [x] \cdot \big([y] \cdot [z]\big).$$

Außerdem ist $[e] \cdot [x] = [ex] = [x]$, so daß $[e]$ das Neutrale von G/U ist, und es gilt

$$\big[x^{-1}\big] \cdot [x] = \big[x^{-1} \cdot x\big] = [e],$$

und somit besitzt $[x]$ ein Inverses, nämlich $[x]^{-1} = \big[x^{-1}\big]$.
Schließlich folgt aus den Definitionen

$$\pi(xy) = [xy] = [x] \cdot [y] = \pi(x) \cdot \pi(y)$$

und $\operatorname{Ker}(\pi) = \pi^{-1}\big([e]\big) = [e] = U$, so daß π ein Gruppenhomomorphismus mit $\operatorname{Ker}(\pi) = U$ ist.

□