Wir werden den Satz zunächst für nilpotente Endomorphismen zeigen, d. h. für Endomorphismen, die nur einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 0$, besitzen, und den allgemeinen Fall dann auf diesen zurückführen.

Lemma 4.3
Es sei $f \in \operatorname{End}_K(V)$ *ein nilpotenter Endomorphismus mit* $\mu_f = t^m$. *Dann gibt es für jedes* $1 \leq j \leq m$ *je ein natürliche Zahl* t_j *und es gibt eine Basis* B *so, daß* $\sum_{j=1}^m j \cdot t_j = n = \dim_K\big(\operatorname{Hau}(f,0)\big) = \dim_K(V)$, $\sum_{j=1}^m t_j = \dim_K\big(\operatorname{Eig}(f,0)\big)$, $t_m \geq 1$ *und*

$$J_f := M_B^B(f) = \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{k=1}^{t_j} J_j(0).$$

Beweis: Wir beachten zunächst, daß nach Proposition 3.33 bereits gilt

$$V = \operatorname{Hau}(f,0) = \operatorname{Ker}\left(f^m\right)$$

und mithin insbesondere $f^m = 0$.

Wir führen den Beweis konstruktiv, so daß sich daraus auch ein Algorithmus zur Bestimmung der Basis B herleiten läßt. Dabei gehen wir schrittweise vor und konstruieren in jedem Schritt alle Jordanblöcke gleicher Größe, beginnend mit dem größten.

Für $j = 0, \ldots, m+1$ definieren wir $V^j := \operatorname{Ker}(f^j)$. Da m der Nilpotenzindex ist, gilt mithin

$$0 = V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V^m = V.$$

Außerdem gilt $f\big(V^{j+1}\big) \subseteq V^j$ für $j = 0, \ldots, m$, so daß folgende Definition Sinn macht:

$$\overline{V}^j := V^j / \big(V^{j-1} + f\big(V^{j+1}\big)\big).$$

Schließlich setzen wir für $j = 1, \ldots, m$

$$t_j := \dim_K\left(\overline{V}^j\right).$$

Unter Berücksichtigung des Austauschsatzes von Steinitz wählen wir rekursiv für $j = m, \ldots, 1$ Vektoren $e_{j1}, \ldots, e_{jt_j} \in V^j$, deren Restklassen eine Basis von $\overline{V}^j$ bilden.

Sodann bilden wir für $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, t_j$ und $r \in \mathbb{N}$ die Familien von Vektoren[9]

$$B_{jk}^r = \big(f^{j-1}(e_{jk}), f^{j-2}(e_{jk}), \ldots, f^{r+1}(e_{jk}), f^r(e_{jk})\big).$$

Wir behaupten

a. $B = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{t_j} B_{jk}^0$ ist linear unabhängig.

[9]Beachte, für $r > j-1$ ist die Familie $B_{jk}^r = \emptyset$ leer. Außerdem beachte man, daß stets $B_{jk}^{r+1} \subseteq B_{jk}^r$ gilt.

b. $V^{j-1} + f\big(V^{j+1}\big) = V^{j-1} + \big\langle f^l(e_{j+l,k}) \mid l = 1, \ldots, m-j; k = 1, \ldots, t_{j+l}\big\rangle$ für $j = 1, \ldots, m$.

c. $V^j = V^{j-1} + \big\langle f^l(e_{j+l,k}) \mid l = 0, \ldots, m-j; k = 1, \ldots, t_{j+l}\big\rangle$ für $j = 1, \ldots, m+1$.

d. Für $j = 0, \ldots, m$ ist $B_j = \Big(\bigcup_{l=1}^{j} \bigcup_{k=1}^{t_l} B_{lk}^0\Big) \cup \Big(\bigcup_{l=j+1}^{m} \bigcup_{k=1}^{t_l} B_{lk}^{l-j}\Big)$ eine Basis von V^j.[10]

e. $B = B_m$ ist eine Basis von V und $n = \sum_{j=1}^{m} j \cdot t_j$.

f. B_1 ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, 0) = \mathrm{Ker}(f)$ und $\dim_K\big(\mathrm{Eig}(f, 0)\big) = \sum_{j=1}^{m} t_j$.

g. Für $j = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, t_j$ ist $W_{jk} = \big\langle B_{jk}^0\big\rangle$ ein f-invarianter, zyklischer Unterraum mit

$$M_{B_{jk}^0}^{B_{jk}^0}\big(f_{W_{jk}}\big) = J_j(0).$$

h. $M_B^B(f) = \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{k=1}^{t_j} J_j(0)$.

i. $t_m \geq 1$.

Zu a.: Angenommen, B wäre linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{t_j} \sum_{l=0}^{j-1} \lambda_{jkl} f^l(e_{jk}) = 0. \tag{49}$$

Wir setzen zunächst $\mathcal{N} := \{(j, l) \mid \exists k : \lambda_{jkl} \neq 0\} \neq \emptyset$. Sodann wählen wir

$$\tau := \max\{j - l \mid (j, l) \in \mathcal{N}\} > 0$$

und setzen $\mathcal{N}_\tau := \{(j, l) \in \mathcal{N} \mid j - l = \tau\} \neq \emptyset$. Ferner definieren wir

$$j_0 := \max\{j \mid \exists\, l : (j, l) \in \mathcal{N}_\tau\}.$$

Schließlich wählen wir noch

$$j' := \min\{j \mid \exists\, l : (j, l) \in \mathcal{N}_\tau\} = \min\{j \mid \tau \leq j \leq j_0, \exists\, k : \lambda_{j,k,j-\tau} \neq 0\}.$$

Sei nun $1 \leq j \leq m$ gegeben, dann folgt aus der Wahl von τ

$$\lambda_{jkl} = 0 \quad \forall\, l < j - \tau \;\; \forall\, k = 1, \ldots, t_j.$$

Ist $j > j_0$ dann gilt zudem nach Wahl von j_0

$$\lambda_{jkl} = 0 \quad \forall\, l = j - \tau \;\; \forall\, k = 1, \ldots, t_j.$$

Damit reduziert sich (49) auf

$$0 = \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \sum_{l=\max\{0,j-\tau\}}^{j-1} \lambda_{jkl} f^l(e_{jk}) + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{t_j} \sum_{l=j-\tau+1}^{j-1} \lambda_{jkl} f^l(e_{jk}). \tag{50}$$

Beachten wir nun, daß für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt $f^\nu(e_{jk}) = 0$ für alle $\nu \geq j$, dann verschwindet der zweite Summand in (50) nach Anwenden von $f^{\tau-1}$ und

[10] Wobei wir für $j = 0$ die Familie $B_0 = \emptyset$ als Ergebnis der leeren Vereinigung erhalten, da es keine B_{0k} gibt.

wir erhalten

$$0 = f^{\tau-1}(0) = \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \sum_{l=\max\{0,j-\tau\}}^{j-1} \lambda_{jkl} f^{l+\tau-1}(e_{jk}). \tag{51}$$

Da aber mit dem gleichen Argument $f^{l+\tau-1}(e_{jk}) = 0$ gilt für alle $l > j-\tau \geq 0$ (sowie für alle $l \geq 0$, falls $j < \tau$), reduziert sich (51) auf

$$0 = \sum_{j=\tau}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_{j,k,j-\tau} f^{j-1}(e_{jk}).$$

Nach Wahl von j' wiederum ist dies gerade

$$0 = \sum_{j=j'}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_{j,k,j-\tau} f^{j-1}(e_{jk}) = f^{j'-1}\left(\sum_{j=j'}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_{j,k,j-\tau} f^{j-j'}(e_{jk}) \right),$$

also

$$w := \sum_{j=j'}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_{j,k,j-\tau} f^{j-j'}(e_{jk}) \in \operatorname{Ker}\left(f^{j'-1}\right) = V^{j'-1}.$$

Aber damit folgt

$$\sum_{k=1}^{t_{j'}} \lambda_{j',k,j'-\tau} e_{j'k} = w - f\left(\sum_{j=j'+1}^{j_0} \sum_{k=1}^{t_j} \lambda_{j,k,j-\tau} f^{j-j'-1}(e_{jk}) \right) \in V^{j'-1} + f\big(V^{j'+1}\big).$$

Da $(e_{j'k} \mid k = 1, \ldots, t_{j'})$ aber linear unabhängig modulo $V^{j'-1} + f\big(V^{j'+1}\big)$ ist, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{t_{j'}} \lambda_{j',k,j'-\tau} e_{j'k} = 0,$$

und sogar $\lambda_{j',k,j'-\tau} = 0$ für alle k, im Widerspruch zur Wahl von j'.

Zu b.: Wir führen den Beweis durch absteigende Induktion nach j.

Sei also zunächst $j = m$. Man beachte dabei, daß die Familie der $e_{m_i+1,k}$ leer ist! Ferner gilt $V^{m+1} = V = V^m$ und $f\big(V^m\big) = f\big(\operatorname{Ker}\left(f^m\right)\big) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{m-1}\right) = V^{m-1}$. Damit folgt insbesondere

$$V^{m-1} + f\big(V^{m+1}\big) = V^{m-1},$$

womit der Induktionsanfang gezeigt ist.

Sei nun $1 \leq j < m$. Es reicht zu zeigen, daß $f\big(V^{j+1}\big) \subseteq V^{j-1} + \langle f(e_{j+1,k}) \mid k = 1, \ldots, t_{j+1}\rangle$. Nach Definition der $e_{j+1,k}$ und Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} V^{j+1} &= \langle e_{j+1,k} \mid k = 1, \ldots, t_{j+1}\rangle + V^j + f\big(V^{j+2}\big) \\ &= \langle e_{j+1,k} \mid k = 1, \ldots, t_{j+1}\rangle + V^j \\ &\quad + \big\langle f^l(e_{j+1+l,k}) \mid l = 1, \ldots, m-(j+1); k = 1, \ldots, t_{j+1+l}\big\rangle \\ &= V^j + \big\langle f^l(e_{j+1+l,k}) \mid l = 0, \ldots, m-(j+1); k = 1, \ldots, t_{j+1+l}\big\rangle. \end{aligned} \tag{52}$$

Dabei gilt $f\big(V^j\big) \subseteq V^{j-1}$. Dann folgt aber

$$f\big(V^{j+1}\big) \subseteq V^{j-1} + \big\langle f^l(e_{j+l,k}) \mid l = 1, \ldots, m-j; k = 1, \ldots, t_{j+1}\big\rangle.$$

Zu c.: Wir führen den Beweis durch absteigende Induktion nach j. Wegen $V^{m+1} = V = V^m$ ist für $j = m+1$ nichts zu zeigen. Sei also $2 \leq j \leq m$, dann folgt die Behauptung aus Gleichung (52), und der Fall $j = 1$ folgt analog.

Zu d.: Nach a. ist $B_j \subseteq B$ linear unabhängig für $j = 0, \ldots, m$. Es reicht also, zu zeigen, daß $V_j = \langle B_j \rangle$. Dies tun wir durch Induktion nach j. Dabei ist für den Induktionsanfang mit $j = 0$ nichts zu zeigen, da $V_0 = \{0\} = \langle \emptyset \rangle$ gilt.

Sei also $j \geq 1$. Dann gilt nach Teil c.

$$V^j = V^{j-1} + \left\langle f^l(e_{j+l,k}) \;\middle|\; l = 0, \ldots, m-j; k = 1, \ldots, t_{j+l} \right\rangle$$

Da $f^l(e_{j+l}, k) \in B^l_{j+l,k}$ für $l = 0, \ldots, m-j$ und $k = 1, \ldots, t_{j+l}$ gilt und wegen $B^1_{j,k} \subset B^0_{j,k}$ für $k = 1, \ldots, t_j$, folgt mit Induktion

$$\begin{aligned} V^j &\subseteq \left\langle \left(\bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=1}^{t_l} B^0_{lk} \right) \cup \left(\bigcup_{l=j}^{m} \bigcup_{k=1}^{t_l} B^{l-j+1}_{lk} \right) \right\rangle + \left\langle \bigcup_{l=0}^{m-j} \bigcup_{k=1}^{t_{j+l}} B^l_{j+l,k} \right\rangle \\ &\subseteq \left\langle \left(\bigcup_{l=1}^{j} \bigcup_{k=1}^{t_l} B^0_{lk} \right) \cup \left(\bigcup_{l=j+1}^{m} \bigcup_{k=1}^{t_l} B^{l-j}_{lk} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Inklusion "$\supseteq$" ist hingegen klar.

Zu e.: Offenbar ist $B = B_m$ und die Aussage folgt somit aus d..

Zu f.: Da $V^1 = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Eig}(f, 0)$ ist, folgt aus d., daß B_1 eine Basis von $\operatorname{Eig}(f, 0)$ ist. Aus der Definition von B_1 folgt unmittelbar, daß $\dim_K \left(\operatorname{Eig}(f, 0) \right) = |B_1| = \sum_{j=1}^m t_j$, da $\left| B^{j-1}_{jk} \right| = 1$ für $j = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, t_j$.

Zu g.: Dies folgt unmittelbar aus der Definition von B^0_{jk}.

Zu h.: Dies folgt unmittelbar aus g. und dem Umstand, daß $B = B^m$, d. h. $V = \bigoplus_{j=1}^m \bigoplus_{k=1}^{t_j} W_{jk}$.

Zu i.: Wäre $t_m = 0$, so wäre $J_f^{m-1} = 0$ und mithin $f^{m-1} = 0$, im Widerspruch zu $\mu_f = t^m$.

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$