**Korollar 4.8**
*Jede Permutation läßt sich als Produkt von Transpositionen zweier aufeinanderfolgender Zahlen schreiben.*

**Beweis:** Wegen Proposition 4.7 reicht es, dies für eine Transposition $(i\,j)$ mit $i < j$ zu zeigen. Es gilt aber offenbar

$$\begin{aligned}(i\,j) &= (i\;i+1)\circ(i+1\;i+2)\circ\cdots\circ(j-2\;j-1)\circ(j-1\;j)\circ\\ &\quad\circ(j-2\;j-1)\circ\cdots\circ(i+1\;i+2)\circ(i\;i+1).\end{aligned}$$

□

**Satz 4.11**

a. *Für* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}_n$ *gilt:*

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2).$$

b. *Ist* $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \in \mathbb{S}_n$ *eine Komposition von* $k$ *Transpositionen, dann gilt:*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k.$$

**Beweis:** Gilt für $\sigma \in \mathbb{S}_n$ in $\mathbb{S}_n$ die Gleichung $\sigma = \tau \circ \sigma'$, wo $\tau = (i\;i+1)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist, so hat $\sigma$ entweder einen Fehlstand weniger oder einen Fehlstand mehr als $\sigma'$. Also gilt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma') = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma').$$

Seien nun $\sigma_1 = \tilde{\tau}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\tau}_r$ und $\sigma_2 = \tilde{\tau}_{r+1} \circ \cdots \circ \tilde{\tau}_{r+s}$ als Produkte solcher Transpositionen aufeinanderfolgender Zahlen gegeben. Dann folgt mit Induktion

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (-1)^{r+s} = (-1)^r \cdot (-1)^s = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2).$$

Damit ist a. gezeigt und b. folgt mittels Induktion nach k.

□