Bemerkung 2.21

Wir bezeichnen mit L die Menge der K-Vektorräume.

a. Durch $V \sim W$, falls $V \cong W$ für $V, W \in L$, wird auf L eine Äquivalenzrelation definiert.
   Wir setzen nun $\mathcal{L} = L/\sim$ und definieren für $[V], [W] \in \mathcal{L}$
   $$[V] \oplus [W] := [V \oplus W] \quad \text{und } [V] \otimes [W] := [V \otimes W].$$
   Dann folgt aus Lemma 2.20, daß $(\mathcal{L}, \oplus)$ und $(\mathcal{L}, \otimes)$ kommutative Halbgruppen sind, mit neutralen Elementen $\big[\{0\}\big]$ respektive $[K]$.
b. Analog wird durch
   $$\big(V, V'\big) \sim \big(W, W'\big) \Leftrightarrow V \oplus W' \cong W \oplus V', \text{ für } \big(V, V'\big), \big(W, W'\big) \in L \times L,$$
   eine Äquivalenzrelation auf $L \times L$ definiert, und wir können die Menge $\mathcal{R} = L \times L/\sim$ betrachten.
   Definieren wir nun für $\big[(V, V')\big], \big[(W, W')\big] \in \mathcal{R}$
   $$\big[(V, V')\big] \oplus \big[(W, W')\big] := \big[(V \oplus W, V' \oplus W')\big]$$
   und
   $$\big[(V, V')\big] \otimes \big[(W, W')\big] := \big[\big(V \otimes W\big) \oplus \big(V' \otimes W'\big), \big(V \otimes W'\big) \oplus \big(V' \otimes W\big)\big],$$
   dann folgt aus Lemma 2.20 – im Wesentlichen –, daß $(\mathcal{R}, \oplus, \otimes)$ ein kommutativer Ring mit Eins $1_{\mathcal{R}} = \big[(K, 0)\big]$ ist.
   Die Abbildung
   $$\mathcal{L} \to \mathcal{R} : [V] \mapsto \big[(V, 0)\big]$$
   ist dabei ein Homomorphismus von Halbgruppen bezüglich der beiden Operationen $\oplus$ und $\otimes$.
   Man beachte, daß die Konstruktion von $\mathcal{R}$ der Konstruktion des Ringes $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ aus der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ nachempfunden ist.