

## Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 05/01/2009, 12:00

Aufgabe Nummer 40 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 37:** Überprüfe, ob die folgenden Nummern gültige EAN-13 sind:

- a. 9002986140573
- b. 4000171060055

**Aufgabe 38:** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \in R[[t]]$  eine formale Potenzreihe über  $R$ . Zeige,  $f$  ist genau dann eine Einheit in  $R[[t]]$ , wenn  $a_0$  eine Einheit in  $R$  ist.

Hinweis, wenn  $a_0$  eine Einheit in  $R$  ist, so ist eine Reihe  $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k$  mit  $f \cdot g = t^0$  gesucht. Multipliziere die linke Seite der Gleichung aus und löse die Gleichungen, die sich für die Koeffizienten ergeben rekursiv.

**Aufgabe 39:**

a. Es sei  $R$  ein Ring mit Eins und  $S \subset R$  ein nicht-leere Teilmenge für die gilt:

- $x + y \in S$  für alle  $x, y \in S$ ,
- $-x \in S$  für alle  $x \in S$ ,
- $x \cdot y \in S$  für alle  $x, y \in S$  und
- $1_R \in S$ .

Zeige,  $S$  ist ein Ring mit Eins bezüglich der Einschränkung der Addition und der Multiplikation von  $R$  auf  $S$ .

b. Zeige,  $\mathbb{Z}[i] := \{a + i \cdot b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

c. Bestimme die Einheitengruppe  $\mathbb{Z}[i]^*$  des Ringes  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Aufgabe 40:** Für  $\omega \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega \geq 2$ , bezeichnen wir mit  $\sqrt{-\omega}$  die komplexe Zahl  $i \cdot \sqrt{\omega}$ .

a. Zeige,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}] := \{a + b \cdot \sqrt{-\omega} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

b. Zeige,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]^* = \{1, -1\}$ .