

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Dienstag, 10/12/2013, 10:00

Aufgabe Nummer 32 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenden zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 29: Es sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index $|G : U| = 2$. Zeige, U ist ein Normalteiler von G .

Aufgabe 30:

Zeige, daß die Untergruppe $U = \langle (1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle \leq S_4$ die Ordnung $|U| = 12$ hat.

Hinweis: wenn man die Ergebnisse aus Kapitel 4 der Vorlesung verwendet, braucht man die Elemente von U nicht auszurechnen!

Aufgabe 31:

- a. Betrachte für $m, n, a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Element $(\bar{a}_m, \bar{b}_n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$. Zeige, daß sich die Ordnung dieses Elementes wie folgt berechnen läßt

$$o((\bar{a}_m, \bar{b}_n)) = \text{kgv}(o(\bar{a}_m), o(\bar{b}_n)) = \text{kgv}\left(\frac{\text{kgv}(a, m)}{a}, \frac{\text{kgv}(b, n)}{b}\right)$$

und daß sie ein Teiler von $\text{kgv}(m, n)$ ist.

- b. Zeige, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ist nicht zyklisch, wenn m und n nicht teilerfremd sind.
c. Berechne die Ordnung von $(\bar{10}_{24}, \bar{12}_{34}) \in \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{34}$.

Aufgabe 32:

- a. Bestimme alle Normalteiler von \mathbb{Z}_{34} .
b. Bestimme alle Normalteiler der Gruppe $\mathbb{D}_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 4) \circ (1\ 5) \rangle$.