

Vorkurs Mathematik

Aufgaben zum Themenkomplex Logik, Mengen und Abbildungen

1) Logik

Aufgabe 1: Negiere die folgenden Aussagen:

- Jedes Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
- Mindestens ein Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
- Am Samstag um 9:00 parkten rote Autos auf dem Parkplatz.
- Es gibt keine größte ganze Zahl.
- Keine Regel ohne Ausnahme.

Aufgabe 2:

- Drücke die folgenden Aussagen in Worten aus und, falls eine Aussage falsch sein sollte, ersetze sie dabei durch ihre Negation.
 - $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : m = n + n,$
 - $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (m \neq n) \wedge (m^n = n^m).$
- Drücke die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren aus:
 - Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine weitere reelle Zahl.
 - Es gibt keine größte Primzahl in den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Schlußfolgerungen ist korrekt?

- Falls es anfängt zu regnen, wird die Straße naß. Aber, da die Straße nicht naß werden wird, wird es auch nicht regnen.
- Einige Politiker sind ehrlich. Einige Frauen sind Politiker. Also sind einige weibliche Politiker ehrlich.

2) Mengen

Aufgabe 4: Bestimme die folgende Menge von Punkten in der Zahlenebene \mathbb{C} :

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 2 \cdot |z + 3|\}.$$

Aufgabe 5: Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in \mathbb{R} und in \mathbb{C} :

$$3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$$

Aufgabe 6: Bestimme die folgende von reellen Zahlen als Vereinigung von Intervallen:

$$M := (\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| > 5\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 100\}) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}.$$

Aufgabe 7: Es seien M, N, P Mengen. Verifiziere die folgenden Rechenregeln mit Hilfe von Venn Diagrammen:

a. *Assoziativgesetze*

- $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.
- $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.

b. *Distributivgesetze*

- $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
- $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

c. *De Morgansche Regeln*

- $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$.
- $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$.

3) Abbildungen

Aufgabe 8: Untersuche ob die folgenden Abbildungen bijektiv sind und bestimme ggf. die Umkehrabbildung:

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$
- $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto 3x + 2$
- $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (xy, x + 1)$
- $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + y)$

Aufgabe 9: Bestimme für die folgenden Abbildungen eine Umkehrabbildung:

- $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x + 1$.
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot |x|$.
- $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z+i}{i-z}$.

Aufgabe 10: Seien L, M, N Mengen und $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$ Abbildungen. Beweise oder widerlege - durch Gegenbeispiel - die folgenden Aussagen:

- Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g bijektiv.
- Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f bijektiv.

Aufgabe 11: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Gib außerdem ein konkretes Beispiel dafür an, dass in b. keine Gleichheit gilt.