

## Vorkurs Mathematik

### Aufgaben zum Themenkomplex Zahlbereiche

#### 1) Die natürlichen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen

**Aufgabe 1:** Kürze die folgenden rationalen Zahlen vollständig:

$$\frac{4}{8}, \quad -\frac{36}{42}, \quad \frac{-39}{81}, \quad \frac{15}{-25}.$$

**Aufgabe 2:** Ordne die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach an:

$$\frac{9}{11}, \quad \frac{37}{45}, \quad \frac{121}{78}, \quad \frac{178}{222}, \quad \frac{76}{88}.$$

**Aufgabe 3:** Berechne die folgenden rationalen Zahlen:

$$\frac{18}{17} + \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{15}, \quad \frac{18}{17} - \frac{9}{2}, \quad \frac{11}{5} + \frac{7}{15}.$$

**Aufgabe 4:** Es seien  $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$  zwei ganze Zahlen. Mit welchen der folgenden Zahlen stimmt  $q = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  für jede Wahl von  $a$  und  $b$  überein:

$$r = \frac{1}{a-b}, \quad s = \frac{ab}{a+b}, \quad t = \frac{b-a}{ab}, \quad u = \frac{a-b}{ab}.$$

**Aufgabe 5:** In einem elektrischen Netzwerk gilt für den Widerstand  $R$  zweier hintereinander geschalteter Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  (siehe Abbildung 1)

$$R = R_1 + R_2.$$

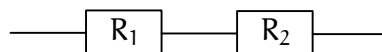


Abbildung 1: Hintereinander geschaltete Widerstände  $R = R_1 + R_2$

Analog gilt für den Widerstand  $R$  zweier parallel geschalteter Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  (siehe Abbildung 2)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Gib eine Formel für den Widerstand  $R$  der Schaltung in Abbildung 3 in Form eines Bruches an.

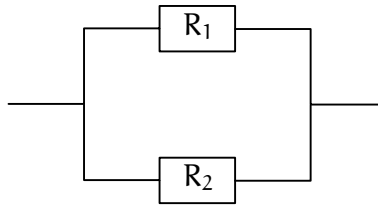


Abbildung 2: Parallel geschaltete Widerstände  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

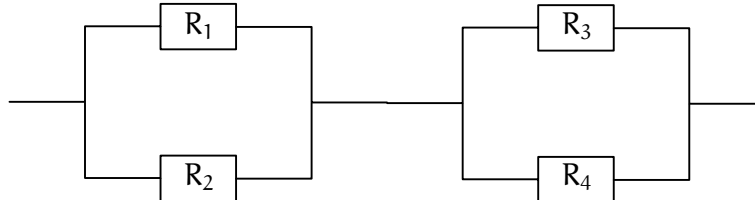


Abbildung 3: Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung.

**Aufgabe 6:** Rechne nach, daß die Menge  $K = \{0, 1\}$  mit der in den folgenden Tabellen definierten Addition und Multiplikation ein Körper ist, d.h. den Körperaxiomen (A1-4), (M1-4) und (DG) genügt:

$$\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Zeige außerdem, daß  $K$  kein angeordneter Körper sein kann, d.h. es gibt keine Anordnung der Zahlen 0 und 1 so, daß für je drei Zahlen  $x, y, z \in K$  die folgenden Regeln gelten:

$$x < y \implies x + z < y + z$$

und

$$x < y, 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z.$$

**Aufgabe 7:** Schreibe die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| > 0 \text{ und } |x - 1| \leq 10\}$$

als Vereinigung von Intervallen.

**Aufgabe 8:** Finde eine obere und eine untere Schranke für die Menge

$$A = \left\{ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \mid x \in [-1, 1] \right\}$$

durch Abschätzen des Betrags

$$\left| \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \right|.$$

**Aufgabe 9:** Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

a.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}.$

b.  $B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

c.  $C = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

**Aufgabe 10:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen, so daß  $\sup(A)$  und  $\sup(B)$  existieren. Wir setzen

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Begründe, weshalb  $\sup(A + B)$  existiert und  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$  gilt.

**Aufgabe 11:** Zeige, für je zwei reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 < x < y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $y < n \cdot x$  gilt.

**Aufgabe 12:** Zeige, für jede positive reelle Zahl  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Aufgabe 13:** Zeige, zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale.

**Aufgabe 14:** Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage  $1 = 2$ ?

$$\begin{aligned} & x := 1 \text{ und } y := 2 \\ \implies & x + y = 3 && | \cdot (x - y) \\ \implies & x^2 - y^2 = 3x - 3y && | + (y^2 - 3x) \\ \implies & x^2 - 3x = y^2 - 3y && | + \frac{9}{4} \\ \implies & x^2 - 3x + \frac{9}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} && | \text{ Binomischer Lehrsatz} \\ \implies & \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 && | \sqrt{\dots} \\ \implies & x - \frac{3}{2} = y - \frac{3}{2} && | + \frac{3}{2} \\ \implies & x = y && | \text{ Einsetzen von } x = 1, y = 2 \\ \implies & 1 = 2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 15:** Wo liegt der Fehler beim folgenden Beweis für die Aussage  $1 = 2$ ?

$$\begin{aligned} & x := 1 && | \cdot x \\ \implies & x^2 = x && | - 1 \\ \implies & x^2 - 1 = x - 1 && | \text{ 3. Binomische Formel} \\ \implies & (x - 1) \cdot (x + 1) = x - 1 && | : (x - 1) \\ \implies & x + 1 = 1 && | \text{ Einsetzen von } x = 1 \\ \implies & 2 = 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 16:** Zeige, zwei positive reelle Zahlen  $x, y \in (0, \infty)$  erfüllen stets die Ungleichung

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Für welche Werte von  $x$  und  $y$  gilt die Gleichheit?

## 2) Vollständige Induktion

**Aufgabe 17:** Zeige durch Induktion nach  $n$ , für  $1 \neq q \in \mathbb{R}$  und  $n \geq 0$  gilt stets

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**Aufgabe 18:** Zeige durch Induktion nach  $n$ , für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und  $0 \leq n \in \mathbb{Z}$  gilt stets

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

**Aufgabe 19:** Zeige durch Induktion nach  $n$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}.$$

**Aufgabe 20:** Zeige, daß Zahlen der Form  $n^3 + 5n$  für  $n \in \mathbb{N}$  durch 6 teilbar sind.

**Aufgabe 21:** Beweise die Pascalsche Gleichung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

für nicht-negative ganze Zahlen  $n, k \geq 0$  durch direktes Nachrechnen.

**Aufgabe 22:** Begründe, weshalb die folgende Gleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

## 3) Die komplexen Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra

**Aufgabe 23:** Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen  $z$  den Realteil, den Imaginärteil, das Argument, den Betrag, das komplex Konjugierte und das multiplikative Inverse:

$$z = \frac{4i}{1+i} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}.$$

**Aufgabe 24:** Berechne für die komplexen Zahlen  $z = 1 - i$  und  $w = 1 + 3i$  die Zahl

$$\frac{z}{\bar{w} - z^2}$$

**Aufgabe 25:** Die Zahl  $0 \neq z \in \mathbb{C}$  habe das Argument  $\alpha$  und den Betrag  $r$ . Bestimme  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $\bar{z}$ ,  $z^{-1}$  und  $z^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 26:** Skizziere in der komplexen Zahlenebene die Mengen

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\}$$

und

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z - 1|\}$$

sowie

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i - 1| < 2\}.$$

**Aufgabe 27:** Bestimme alle komplexen Zahlen, die der Gleichung

$$\frac{z-3}{z-i} + \frac{z-4+i}{z-1} = 2 \cdot \frac{-1+2i}{z^2 - (1+i) \cdot z + i}$$

genügen.

**Aufgabe 28:** Zerlege die Polynomfunktion  $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$  in Linearfaktoren.

**Aufgabe 29:** Bestimme Real- und Imaginärteil der Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 - 4iz + 4z - 8i = 0$$

und

$$z^2 + 2 \cdot (1+i) \cdot z = 1 - 2i.$$

**Aufgabe 30:** Zeige, daß eine Polynomfunktion vom Grad  $n$  in  $\mathbb{C}$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen haben kann.