Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Arbeitsbereich Logik, Grundlagen, Geschichte der Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Felgner

Partitionskardinalzahlen und unendliche Spiele

**Wissenschaftliche Arbeit
im Fach Mathematik**

vorgelegt von
Ute Katrin Schmid
November 1999

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Tübingen, im November 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der folgenden Frage, die Bjarni Jónsson im Jahre 1962 gestellt hatte: Für welche Kardinalzahlen κ gibt es eine algebraische Struktur (kurz: "Algebra") der Kardinalität κ, die keine echte Subalgebra derselben Kardinalität besitzt? Wir nennen eine Algebra mit dieser Eigenschaft Jónsson–Algebra.
Der Ursprung dieser Frage von Jónsson liegt in der Gruppentheorie. Bereits 30 Jahre zuvor war nämlich die Klassifikation unendlicher Gruppen, die ausschließlich endliche Untergruppen besitzen, ein bedeutender Gegenstand der Forschung. Solche Gruppen sind Beispiele für Jónsson–Algebren. Jónssons Frage ist aber auch aus rein mengentheoretischen Gesichtspunkten eine interessante und naheliegende Frage, ergibt sie sich doch unmittelbar aus dem Satz von Löwenheim–Skolem: Dieser Satz besagt insbesondere, daß jede unendliche Algebra Subalgebren von beliebiger kleinerer, unendlicher Kardinalität besitzt. Er läßt gerade die Frage offen, ob jede Algebra auch echte Subalgebren derselben Kardinalität besitzt. Jónssons Frage stieß daher auf großes Interesse, so daß inzwischen viele Resultate über die Jónsson–Zahlen – so werden die Zahlen κ genannt, für die es keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ gibt – bekannt sind. Man kann die Existenz von Jónsson–Zahlen weder beweisen noch widerlegen. Aber man kann Kriterien dafür angeben, unter denen Jónsson–Zahlen existieren. Besonders gut erforscht sind die Bedingungen, unter denen Nachfolgerkardinalzahlen Jónsson–Zahlen sind. Insbesondere weiß man, daß unter Verwendung des Auswahlaxioms die Zahlen $\aleph_n$ für alle natürlichen Zahlen n keine Jónsson–Zahlen sind. Schwerer läßt sich die Frage nach Jónsson–Zahlen, die Limeskardinalzahlen sind, beantworten. So ist es beispielsweise eine große offene Frage der Mengenlehre, ob "ZSF + AC + $\aleph_\omega$ ist eine Jónsson–Zahl" konsistent ist. Wir werden auf diese Frage gleich zurückkommen.
Durch eine andere Entwicklung wurde das Axiom der Determiniertheit AD zu einem wichtigen Gegenstand der Forschung. Jan Mycielski und Hugo Steinhaus hatten dieses Axiom ebenfalls im Jahre 1962 formuliert. Es befaßt sich mit Spielen, bei denen zwei Spieler abwechselnd natürliche Zahlen spielen. Für eine vorgegebene Menge $A \subseteq \omega^\omega$ versucht dabei der eine Spieler, seine Spielzüge so zu wählen, daß die beim Spiel resultierende Folge natürlicher Zahlen in A liegt. Dagegen gewinnt der andere Spieler, wenn die resultierende Folge nicht in A liegt. Das Axiom der Determiniertheit besagt nun, daß bei jeder beliebigen Menge $A \subseteq \omega^\omega$ einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat, d.h., daß er durch geschickte Wahl seiner Spielzüge, unabhängig von den Zügen des Mitspielers, immer gewinnt. Dieses Axiom widerspricht dem Auswahlaxiom, dennoch wurde es nicht gleich wieder verworfen. Dies lag zunächst an den schönen Konsequenzen, die AD für die Mathematik hat. Als Beispiel ist zu nennen, daß unter AD jede Teilmenge der reellen Zahlen Lebesgue–meßbar ist.
AD entwickelte sich zu einem wichtigen Konzept in der Mengenlehre, nachdem erkannt worden war, daß zwischen AD und den großen Kardinalzahlen enge Zusammenhänge bestehen. Große Kardinalzahlen sind unter Voraussetzung von AD nicht unbedingt groß

im eigentlichen Sinne. Solovay zeigte z.B. im Jahre 1967, daß $\aleph_1$ unter AD eine meßbare Kardinalzahl ist. Im darauffolgenden Jahr konnte er unter Verwendung von Ideen von Donald A. Martin auch die Meßbarkeit von $\aleph_2$ unter AD beweisen. Eine naheliegende Fortsetzung dieses Musters ist, daß unter AD alle Zahlen $\aleph_n$ für $1 \leq n \in \omega$ meßbar sind. Dann kam Donald A. Martin jedoch zu einem überraschenden Ergebnis: Die Zahlen $\aleph_n$ sind für $n \geq 3$ singulär. Dieses spektakuläre Ergebnis zeigte, daß die Vermutung, die Zahlen $\aleph_n$ seien unter AD meßbar, falsch ist (der Beweis, daß meßbare Kardinalzahlen regulär sind, verwendet nicht das Auswahlaxiom). Trotzdem blieb die Frage, ob die Zahlen $\aleph_n$ auch für $n \geq 3$ große Kardinalzahl–Eigenschaften besitzen, zunächst offen, allerdings kamen jetzt nur noch Eigenschaften, die Singularität zulassen, in Frage. Große Kardinalzahlen, die nicht notwendigerweise regulär sind, sind die oben schon eingeführten Jónsson–Zahlen.
Tatsächlich konnte Eugene M. Kleinberg im Jahre 1975 zeigen, daß die Zahlen $\aleph_n$ unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit Jónsson–Zahlen sind. Zusätzlich zeigte er, daß auch $\aleph_\omega$ unter AD eine Jónsson–Zahl ist. Damit war zwar die Frage nach der Konsistenz von "ZSF + AC + $\aleph_\omega$ ist eine Jónsson–Zahl" noch nicht beantwortet, zusammen mit einem Resultat von Woodin, das besagt, daß unter Voraussetzung großer Kardinalzahlen ein Modell von AD existiert, gibt dieses Ergebnis von Kleinberg aber immerhin ein Modell von ZSF, in dem $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist. Der Satz von Kleinberg kann somit als ein wichtiges Resultat im Zusammenhang mit AD und großen Kardinalzahlen angesehen werden.
Ziel dieser Arbeit ist es, den Beweis dieses Satzes in einer detaillierten Form darzustellen. Wir werden in Kapitel 2 die grundlegenden Hilfsmittel dafür einführen. Beispielsweise umfaßt dieses Kapitel eine kurze Einführung in die Theorie der Sharps und der konstruktiblen Hierarchie **L**. Wir werden den Begriff der Jónsson–Zahl ausführlich motivieren und die wichtigsten der bisher dazu bekannten Ergebnisse aufführen. An dieser Stelle werden wir auch die ursprüngliche Frage aus der Gruppentheorie wieder aufgreifen und die Resultate über Gruppen, die Jónsson–Algebren sind, darstellen. Zusätzlich werden wir die Frage, ob es Jónsson–Algebren von bestimmter Kardinalität gibt, auch für andere Klassen von Algebren diskutieren. Außerdem wird ein großer Teil von Kapitel 2 den Partitionseigenschaften gewidmet sein, die für diese Arbeit in mehrerlei Hinsicht eine große Rolle spielen. In Kapitel 3 werden wir einige Hilfsmittel bereitstellen, die für den Beweis des Satzes von Kleinberg benötigt werden. Hauptsächlich weisen wir hier zwei Eigenschaften von $\aleph_1$ unter AD nach. Aus diesen Eigenschaften folgt dann in Kapitel 4 der Satz von Kleinberg, der besagt, daß die Zahlen $\aleph_n$ für $n \leq \omega$ Jónsson–Zahlen sind. Wir verwenden zum Beweis, daß Jónsson–Zahlen zu den Partitionskardinalzahlen gehören, d.h. daß sie durch eine Partitionseigenschaft charakterisiert sind. Kapitel 5 beinhaltet schließlich die Auflistung einiger Fragen, die sich aus dieser Arbeit ergeben haben und interessante Forschungsprojekte darstellen.
Wir legen der gesamten Arbeit das Axiomensystem von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF) zugrunde. Verwenden wir ein zusätzliches Axiom wie z.B. das Auswahlaxiom oder das Axiom der Determiniertheit, so wird dies gesondert vermerkt.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die wesentlichen Sätze der Arbeit aus Kapitel 3 und 4 gelegt. Der erste Abschnitt dient der Einführung von grundlegenden Begriffen und Notationen. In Abschnitt 2.3 werden wir eine historische Einführung in das Gebiet der Jónsson–Algebren geben und motivieren, weshalb die für diese Arbeit so wichtige Jónsson–Eigenschaft überhaupt von Interesse ist. Schließlich befaßt sich Abschnitt 2.4 mit Partitionseigenschaften. Wir werden hier einige Partitionskardinalzahlen definieren und darstellen, welche Ergebnisse über diese Zahlen unter Voraussetzung des Auswahlaxioms schon bekannt sind. Im Vergleich zu den Resultaten, die wir in Kapitel 3 und 4 beweisen werden, wird durch diese Übersicht deutlich, wie stark sich die Sätze über Partitionskardinalzahlen unter AC von denen in einer dem Auswahlaxiom widersprechenden Situation unterscheiden.

2.1 Allgemeine mengentheoretische Notation

Da diese Arbeit an einen Vorlesungszyklus von Herrn Prof. Dr. U. Felgner vom Wintersemester 1996/97 bis zum Sommersemester 1998 anschließt[1], werden Notationen, Definitionen und Ergebnisse aus diesen Vorlesungen vorausgesetzt. Diese umfassen im wesentlichen Ordinalzahlen, Kardinalzahlen, elementare Modelltheorie, die grundlegenden Axiome der Mengenlehre und elementare Logik. Zusätzlich zu der Notation aus der Vorlesung werden wir die grundlegenden Definitionen und die Standardnotation aus der Deskriptiven Mengenlehre verwenden, insbesondere die Borel–Hierarchie, die projektive, die arithmetische und die analytische Hierarchie. Wir werden die Levy–Tarski–Addison–Notationen $\Sigma^0_n, \Pi^0_n, \Delta^0_n$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$, $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$, $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha$, $\Sigma^1_n, \Pi^1_n, \Delta^1_n$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ und $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ benutzen.
Elemente von ω^ω bezeichnen wir als **reelle Zahlen**.
Wir werden an einigen Stellen zwischen Zahlquantoren $\exists^0$, $\forall^0$, die über natürliche Zahlen quantifizieren, und Funktionsquantoren $\exists^1$, $\forall^1$ über Elemente von ω^ω unterscheiden.

Weitere Einzelheiten zur Notation wollen wir nun einführen:
Ist κ eine Kardinalzahl und M eine linear geordnete Menge, so fassen wir die Elemente von $[M]^\kappa$ auf als aufsteigende Funktionen von κ in M. Sind zwei aufsteigende Folgen X_1 und X_2 in $[M]^\kappa$ gegeben, so bezeichne $X_1 \sqcup X_2$ die aufsteigende Aufzählung von $\mathrm{Im}(X_1) \cup \mathrm{Im}(X_2)$.

Ist n eine natürliche Zahl, M eine geordnete Menge und f eine Funktion mit Definitionsbereich $[M]^n$, so schreiben wir für alle $\langle x_1, ..., x_n\rangle \in [M]^n$ auch $f(x_1, ..., x_n)$ statt $f(\langle x_1, ..., x_n\rangle)$. Ist $<$ die Ordnung von M, so nennen wir ein Element $\langle x_1, ..., x_n\rangle \in [M]^n$,

[1] Dieser Zyklus umfaßte **Einführung in die Mengenlehre** (WS 1996/97), **Modelle der Mengenlehre** (SS 1997), **Infinitäre Kombinatorik** (WS 1997/98) und **Unendliche Symmetrische Gruppen** (SS 1998). Von der ersten Vorlesung existiert ein Typoskript [Felgner, 1996].

d.h. ein Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ von Elementen aus M mit der Eigenschaft $x_1 < ... < x_m$, ein **geordnetes Tupel**.

In dieser Arbeit werden wir an einigen Stellen mehrere reelle Zahlen durch eine reelle Zahl kodieren. Wir führen daher schon an dieser Stelle eine Funktion $\oplus$ ein, die zwei reellen Zahlen ihren Code zuordnet: $\oplus : \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$ sei definiert durch

$$(x \oplus y)(n) \begin{cases} x(k) & \text{falls } n = 2k \\ y(k) & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases}$$

für alle reellen Zahlen x und y.

Kodiert werden in dieser Arbeit auch Wohlordnungen durch reelle Zahlen. Wir halten dafür die folgenden Bezeichnungen fest: $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle : \omega \times \omega \to \omega$ sei eine beliebige, aber fest gewählte Bijektion. Ist $x \in \omega^\omega$ eine reelle Zahl, so ist durch

$$\langle n, m \rangle \in E_x \iff n, m \in \omega \quad \& \quad x(\langle\!\langle n, m \rangle\!\rangle) = 1$$

eine binäre Relation E_x auf ω definiert.
Es sei WO:= $\{x \in \omega^\omega;\ E_x$ ist eine Wohlordnung$\}$ die Menge der reellen Zahlen, die eine Wohlordnung kodieren. Für jede Ordinalzahl α sei $\mathrm{WO}_\alpha := \{x \in \omega^\omega;\ \langle \omega, E_x \rangle$ hat Ordnungstyp $\leq \alpha\}$ die Menge der reellen Zahlen, die eine Wohlordnung $\leq \alpha$ kodieren.

In den folgenden Abschnitten werden wir weitere grundlegende Begriffe einführen bzw. vertiefen. In Abschnitt 2.1.1 definieren wir einige Grundbegriffe der Modelltheorie wie z.B. elementare Einbettungen, Skolemterme und Skolemhüllen. Abschnitt 2.1.2 ist eine Zusammenstellung der Sätze, die mit der konstruktiblen Hierarchie zusammenhängen und in dieser Arbeit benötigt werden. In Abschnitt 2.1.3 geben wir einen Überblick über die Eigenschaften von Filtern und Ultrafiltern. Unser Hauptinteresse gilt dabei vor allem normalen Filtern, die auf Grund ihrer kombinatorischen Zusatzeigenschaft eine besonders große Bedeutung für diese Arbeit haben. Darauf aufbauend können dann in Abschnitt 2.1.4 Ultrapotenzen definiert werden. In Abschnitt 2.1.5 werden wir erste große Kardinalzahlen betrachten. Daran schließt sich ein kurzer Abschnitt über Sharps, die sich in dieser Arbeit an mehreren Stellen als wichtiges Hilfsmittel erweisen werden, an.

2.1.1 Sprachen und Modelle

Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen für unterschiedliche Sprachen einführen: $\mathcal{L}_E$ sei die Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol E. $\mathcal{L}_E^*$ sei die Erweiterung der Sprache $\mathcal{L}_E$ um abzählbar viele Konstanten c_i. Die Sprache $\mathcal{L}_E(\dot{P})$ sei die Sprache $\mathcal{L}_E$, erweitert um ein einstelliges Relationssymbol $\dot{P}$. Ebenso sei $\mathcal{L}_E^*(\dot{P})$ die Erweiterung der Sprache $\mathcal{L}_E^*$ um das einstellige Relationssymbol $\dot{P}$.
Die $\mathcal{L}$–Formeln, $\mathcal{L}$–Sätze und $\mathcal{L}$–Terme einer Sprache $\mathcal{L}$ sind definiert wie in [EBBINGHAUS *et al.*, 1992]. Wir bezeichnen die Menge aller Sätze einer Sprache $\mathcal{L}$ mit Sent($\mathcal{L}$). Wenn $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache ist, so sei $\{\varphi_n^{\mathcal{L}};\ n \in \omega\}$ bzw., falls klar ist, welche Sprache gemeint ist, $\{\varphi_n;\ n \in \omega\}$ eine Aufzählung aller Formeln. $k(n)$ bezeichne die Anzahl der freien Variablen von $\varphi_n^{\mathcal{L}}$ bzw. φ_n.

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur und T eine Menge von Formeln von $\mathcal{L}$. Dann wird die Erfüllbarkeitsrelation $\mathcal{M} \models T$ wie üblich definiert, vergleiche [EBBINGHAUS *et al.*, 1992, §4].

Ist $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur, so sei

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\sigma;\ \sigma \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}) \ \ \& \ \ \mathcal{M} \models \sigma\}$$

die **Theorie** von $\mathcal{M}$.

Wir wiederholen den Begriff der elementaren Einbettung:

Definition 2.1.1 Seien $\mathcal{M},\mathcal{N}$ Modelle mit den Grundklassen M beziehungsweise N. $\mathcal{M}$ heißt **elementares Submodell von** $\mathcal{N}$ genau dann, wenn es eine Klassenfunktion $j : M \to N$ gibt, so daß für jede Formel φ und alle $a_1, ..., a_n \in M$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[j(a_1), ..., j(a_n)].$$

Wir schreiben auch $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, wenn $\mathcal{M}$ ein elementares Submodell von $\mathcal{N}$ ist. j heißt **elementare Einbettung**.

Gilt $M = N$, so ist trivialerweise die identische Abbildung id: $M \to M$ eine elementare Einbettung. Jede von der Identität verschiedene elementare Einbettung nennen wir **nichttrivial**.

Wir betrachten nun Strukturen zu einer Sprache, die ein einstelliges Relationssymbol und höchstens abzählbar viele Funktionssymbole besitzt. Wir klassifizieren solche Strukturen nach der Mächtigkeit ihrer Grundmenge und der Mächtigkeit derjenigen Menge, die das einstellige Relationssymbol interpretiert.

Definition 2.1.2 Sei eine Struktur $\mathcal{M} = \langle M, N, f_k\rangle_{k\in\omega}$ gegeben, κ, λ, μ und ν seien Kardinalzahlen.

(1) $\mathcal{M}$ sei vom Typ $\langle\kappa, \lambda\rangle$ genau dann, wenn $|M| = \kappa$ und $|N| = \lambda$ ist.

(2) $\langle\kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle\mu, \nu\rangle \quad :\Longleftrightarrow$ Wenn $\mathcal{M}$ vom Typ $\langle\kappa, \lambda\rangle$ ist, dann gibt es eine Struktur $\mathcal{N}$ vom Typ $\langle\mu, \nu\rangle$, so daß $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ gilt.

$\langle\kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle\mu, < \nu\rangle \quad :\Longleftrightarrow$ Wenn $\mathcal{M}$ vom Typ $\langle\kappa, \lambda\rangle$ ist, dann gibt es ein $\varrho < \nu$ und eine Struktur $\mathcal{N}$ vom Typ $\langle\mu, \varrho\rangle$, so daß $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ gilt.

Betrachtet man eine Struktur $\mathcal{M}^* = \langle M^*, N^*, f_k\rangle_{k\in\omega}$ vom Typ $\langle\kappa, \lambda\rangle$ und gilt $\langle\kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle\mu, \nu\rangle$, dann besitzt $\mathcal{M}^*$ nach Definition eine elementare Substruktur vom Typ $\langle\mu, \nu\rangle$. Also gibt es Teilmengen M und N von M^*, so daß $\mathcal{M} := \langle M, N, f_k{\restriction}[M]^{n_k}\rangle_{k\in\omega} \prec \mathcal{M}^*$ ist, wobei $|M| = \mu$, $|N| = \nu$ gilt und n_k die Stelligkeit der Funktion f_k angibt. Die Menge N, die im Modell $\mathcal{M}$ das einstellige Relationssymbol $\dot{P}$ interpretiert, ist durch M eindeutig bestimmt: Es ist $N = M \cap N^*$. Denn für alle $a \in M$ gilt

$$a \in N^* \iff \mathcal{M}^* \models \dot{P}[a] \iff \mathcal{M} \models \dot{P}[a] \iff a \in N.$$

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit, insbesondere für Abschnitt 2.3, sind spezielle Strukturen, nämlich Algebren. Unter einer Algebra verstehen wir eine Struktur einer Sprache, die ausschließlich Funktionssymbole besitzt.

Zu den grundlegenden Begriffen der Modelltheorie gehören Skolemfunktionen, Skolemterme und der Prozeß des sogenannten Skolemisierens (vergleiche Definition 2.1.5). Wir werden diese Begriffe im folgenden einführen. Zugrunde liegt eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ ohne Funktionssymbole. Wir bezeichnen die Menge aller Formeln der Sprache $\mathcal{L}$ vom Typ

$$\varphi(v_1, ..., v_k) \equiv \exists v_0 \ \psi(v_0, ..., v_k)$$

mit $\mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}$. Sei $\mathcal{L}^{\mathrm{Sk}}$ die Sprache $\mathcal{L}$, erweitert um ein Funktionssymbol $\dot{f}_\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}$.

Definition 2.1.3 Seien $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur mit Grundmenge M und $\varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}$, wobei $\varphi(v_1, ..., v_k) \equiv \exists v_0 \ \psi(v_0, ..., v_k)$ ist. Wir nennen eine Funktion $f : M^k \to M$ **Skolemfunktion** für φ, falls für alle $a_1, ..., a_k$

$$\mathcal{M} \models \psi[f(a_1, ..., a_k), a_1, ..., a_k]$$

gilt.

Die Terme (im üblichen Sinne der Logik, vergleiche [EBBINGHAUS *et al.*, 1992, Definition 3.1]) der Sprache $\mathcal{L}^{\mathrm{Sk}}$ nennen wir **Skolemterme**.

Besonders gut kann mit Objekten gearbeitet werden, die durch einen Skolemterm definiert sind. Daher werden wir im folgenden für solche Objekte eine Charakterisierung angeben, die in der Praxis leichter verwendet werden kann:

Proposition 2.1.4 Seien $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur mit Grundmenge M und $A, a_1, ..., a_k \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Es gibt eine Formel ψ der Sprache $\mathcal{L}$ mit $k+1$ freien Variablen, so daß

$$\mathcal{M} \models \forall v_0(\psi[v_0, a_1, ..., a_k] \iff v_0 = A)$$

gilt.

(2) Es gibt einen Skolemterm τ, so daß für jede Familie $\langle f_\varphi;\ \varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}\rangle$ von Skolemfunktionen, wobei f_φ für alle $\varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}$ eine Interpretation von $\dot{f}_\varphi$ ist, gilt:

$$\langle \mathcal{M}, \langle f_\varphi;\ \varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}\rangle\rangle \models \tau[a_1, ..., a_k] = A.$$

Beweis:
(1) $\implies$ (2): Nach Annahme existiert eine Formel ψ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{M} \models \forall v_0(\psi[v_0, a_1, ..., a_k] \iff v_0 = A).$$

Setze $\varphi(a_1, ..., a_k) \equiv \exists v_0\ \psi(v_0, a_1, ..., a_k)$. Ist f_φ eine Skolemfunktion für φ, so gilt $f_\varphi(a_1, ..., a_k) = A$, da A nach Annahme das einzige Objekt x ist, für welches $\mathcal{M} \models \psi[x, a_1, ..., a_k]$ erfüllt ist. Also wird der Term $\dot{f}_\varphi$ an der Stelle $\langle a_1, ..., a_k\rangle$ durch A in $\mathcal{M}$ interpretiert.

(2) $\implies$ (1): Für jede Wahl $\langle f_\varphi;\ \varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}\rangle$ von Skolemfunktionen gibt es nach Voraussetzung einen Term τ der Sprache $\mathcal{L}^{\mathrm{Sk}}$ mit

$$\langle \mathcal{M}, \langle f_\varphi;\ \varphi \in \mathrm{Ex}^{\mathcal{L}}\rangle\rangle \models \tau[a_1, ..., a_k] = A.$$

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach der Termkomplexität von τ. Da $\mathcal{L}$ eine Sprache ohne Funktionssymbole ist, sind die Atomterme die Variablen.
Ist τ ein Atomterm, so gilt also $\tau \equiv v_0$, d.h. $\tau[a_1] = a_1$, also gilt nach Voraussetzung $a_1 = A$. Demnach ist A beschrieben durch die Formel $\varphi(v_0, v_1) \equiv v_0 = v_1$, d.h. $\mathcal{M} \models \forall v_0(\varphi[v_0, a_1] \iff v_0 = A)$. Somit ist eine Formel mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

Ist τ kein Atomterm, dann ist τ von der Form

$$\dot{f}_\varphi(s_1(v_1, ..., v_k), ..., s_n(v_1, ..., v_k)),$$

wobei die s_j Terme kleinerer Komplexität sind. Wieder sei $\varphi(v_1, ..., v_n) \equiv \exists v_0\ \psi(v_0, ..., v_n)$. Sei b_j für alle j das eindeutig bestimmte x mit $\mathcal{M} \models x = s_j[a_1, ..., a_k]$. Nach Induktionsannahme gibt es Formeln $\varphi_1, ..., \varphi_n$ mit

$$\mathcal{M} \models \forall v_0(\varphi_j[v_0, a_1, ..., a_k] \iff v_0 = b_j).$$

Definiere

$$\begin{aligned}\psi^*(v_0, ..., v_k) \quad \equiv \quad & \exists w_1, ..., w_n(\ \psi(v_0, w_1, ..., w_n)\ \wedge \\ & \varphi_1(w_1, v_1, ..., v_k)\ \wedge ...\ \wedge\ \varphi_n(w_n, v_1, ..., v_k)).\end{aligned}$$

Dann gilt $\mathcal{M} \models \forall v_0(v_0 = A \implies \psi^*[v_0, a_1, ..., a_k])$.
Zu zeigen bleibt nun noch $\mathcal{M} \models \forall v_0(\psi^*[v_0, a_1, ..., a_k] \implies v_0 = A)$. Angenommen, es gäbe ein $A^* \neq A$ mit

$$\mathcal{M} \models \psi^*[A^*, a_1, ..., a_k].$$

Dann gilt $\mathcal{M} \models \psi[A^*, s_1[a_1, ..., a_k], ..., s_n[a_1, ..., a_k]] = \psi[A^*, b_1, ..., b_n]$ nach Definition von ψ^*.
Wir definieren nun $g_\varphi : M^n \to M$ durch

$$g_\varphi(z_1, ..., z_n) := \begin{cases} f_\varphi(z_1, ..., z_n) & \text{falls } \langle z_1, ..., z_n\rangle \neq \langle b_1, ..., b_n\rangle \\ A^* & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g_φ wegen $\mathcal{M} \models \psi[A^*, b_1, ..., b_n] = \psi[g_\varphi(b_1, ..., b_n), b_1, ..., b_n]$ eine Skolemfunktion für φ. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, da für jede Skolemfunktion der Wert an der Stelle $\langle b_1, ..., b_n\rangle$ gerade A ist. Also gilt $\mathcal{M} \models \forall v_0(\psi^*[v_0, a_1, ..., a_k] \implies v_0 = A)$, und die Behauptung ist vollständig gezeigt.

□

Proposition 2.1.4 gibt uns die Möglichkeit, die folgende Notation einzuführen: Ist φ eine Formel der Sprache $\mathcal{L}$ mit $k+1$ freien Variablen, so schreiben wir $t_\varphi^{\mathcal{M}}[a_1, ..., a_k] = A$ (oder $t^{\mathcal{M}}[a_1, ..., a_k] = A$, falls klar ist, welche Formel gemeint ist), wenn $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur ist, deren Grundmenge $a_1, ..., a_k$ und A enthält, und so daß $\mathcal{M} \models \forall b(\varphi[b, a_1, ..., a_k] \iff b = A)$ gilt.

Ein weiterer grundlegender Begriff aus der Modelltheorie ist die Skolemhülle:

Definition 2.1.5 Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$–Struktur mit Grundmenge M und $X \subseteq M$. Setze

$$H^{\mathcal{M}}(X) \quad := \quad \{A;\ \text{ es gibt } a_1, ..., a_n \in X \text{ mit } A = t^{\mathcal{M}}[a_1, ..., a_n]\}.$$

$\mathcal{H}^{\mathcal{M}}(X)$ sei das dazugehörende Modell. Man nennt $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}(X)$ die **Skolemhülle von X in $\mathcal{M}$**.

Es gilt $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}(X) \prec \mathcal{M}$ wegen des Tarski–Vaught–Kriteriums (vergleiche [Tarski und Vaught, 1957] oder [Jech, 1978, § 10, Seite 82]). Nach Definition 2.1.5 und Proposition 2.1.4 ist

$$|X| \leq |H^{\mathcal{M}}(X)| \leq |X| + \aleph_0.$$

Diese Überlegung gibt unmittelbar eine Version des Satzes von Löwenheim–Skolem:

Satz 2.1.6 Seien $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine unendliche $\mathcal{L}$–Struktur, die Grundmenge von $\mathcal{M}$ sei M. Dann gibt es für alle Kardinalzahlen κ mit $\aleph_0 \leq \kappa < |M|$ ein echtes elementares Submodell von $\mathcal{M}$ der Kardinalität κ.

Beweis: Für ein gegebenes κ wählen wir eine beliebige Teilmenge $X \subseteq M$ der Kardinalität κ. Dann ist $|H^{\mathcal{M}}(X)| = |X| = \kappa$, und somit ist $\mathcal{H}^{\mathcal{M}}(X)$ ein elementares Submodell von $\mathcal{M}$ der Kardinalität κ.

□

2.1.2 Die konstruktible Hierarchie L

In diesem Abschnitt führen wir einige Eigenschaften des konstruktiblen Universums $\mathbf{L}$ auf. Da dieses Thema in [FELGNER, 1997b] behandelt wurde, setzen wir die grundlegenden Eigenschaften und Sätze über $\mathbf{L}$ voraus und verweisen für Einzelheiten auf [FELGNER, 1997b, §§ 7–13] und [DEVLIN, 1984]. Zur Wiederholung sei erwähnt, daß die Definition der konstruktiblen Hierarchie auf dem Begriff der Definierbarkeit von Mengen basiert. Ist x eine Menge, so sei $\mathrm{def}(x) := \{y \subseteq x;\ y \text{ ist } x\text{–definierbar über } \langle x, \in\rangle\}$. Dabei heißt eine Menge y x–definierbar über $\langle x, \in\rangle$, wenn es eine Formel $\varphi(v_0, ..., v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}_\in$ und Parameter $a_1, ..., a_n \in x$ gibt mit $z \in y$ genau dann, wenn $\langle x, \in\rangle \models \varphi[z, a_1, ..., a_n]$ gilt[2].
Dann definiert man rekursiv

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &:= \emptyset, \\ \mathbf{L}_{\alpha+1} &:= \mathrm{def}(\mathbf{L}_\alpha) \quad \text{und} \\ \mathbf{L}_\gamma &:= \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathbf{L}_\alpha \quad \text{für Limeszahlen } \gamma > 0. \end{aligned}$$

Das konstruktible Universum ist nun $\mathbf{L} := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$. Durch Induktion folgt leicht:

Proposition 2.1.7 Sei $\alpha > \omega$ eine Ordinalzahl. Dann gilt $|\mathbf{L}_\alpha| = |\alpha|$.

Als eine unmittelbare Verallgemeinerung von $\mathbf{L}$ können die Modelle $\mathbf{L}[a]$ für reelle Zahlen a angesehen werden[3]. Sie werden genauso wie $\mathbf{L}$ konstruiert mit dem Unterschied, daß statt der Sprache $\mathcal{L}_\in$ die Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$ mit einem Prädikat zugrundegelegt wird. Das Prädikat $\dot{P}$ wird durch a interpretiert. Die grundlegenden Eigenschaften dieser Modelle setzen wir ebenfalls voraus. Auch hierzu vergleiche man [KANAMORI, 1994, § 3] und [DEVLIN, 1984].

Eine signifikante Eigenschaft der Modelle $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}[a]$ ist ihre Definierbarkeit.

Satz 2.1.8
(1) Es gibt einen Satz σ_0 der Sprache $\mathcal{L}_\in$, so daß für jede transitive Klasse M gilt:

$$\langle M, \in\rangle \models \sigma_0 \iff M = \mathbf{L} \text{ oder } M = \mathbf{L}_\delta \text{ für eine Limeszahl } \delta > \omega.$$

(2) Es gibt einen Satz σ_1 der Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$, so daß für jede transitive Klasse M gilt:

$$\begin{aligned} \langle M, \in, a\rangle \models \sigma_1 \quad \iff \quad & a \in \omega^\omega \quad \& \\ & M = \mathbf{L}[a] \text{ oder } M = \mathbf{L}_\delta[a] \text{ für eine Limeszahl } \delta > \omega. \end{aligned}$$

Beweis: Vergleiche [FELGNER, 1997b, Satz 10.5] und [KANAMORI, 1994, Theorem 3.3]. Im Unterschied zum in [KANAMORI, 1994] beschriebenen Satz sagt σ_1 zusätzlich aus, daß das einstellige Relationssymbol $\dot{P}$ durch eine reelle Zahl interpretiert wird. Da dies durch einen Satz beschrieben werden kann, ändert diese Zusatzforderung nichts am Beweis.

□

Eine unmittelbare Folgerung aus der Existenz der Formel σ_0 aus Satz 2.1.8 ist das Gödelsche Kondensationslemma (Satz 2.1.10). Es verwendet den Satz von Mostowski:

[2]Eine alternative Charakterisierung der x–Definierbarkeit über Sprachen mit Konstanten für jedes Element aus x kann in [DEVLIN, 1984, Abschnitt I.10] nachgelesen werden.
[3]Allgemeiner können sogar Modelle $\mathbf{L}[A]$ für beliebige Mengen A definiert werden.

Satz 2.1.9 Sei E eine binäre Relation.
Wenn $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$ ein extensionales und fundiertes Modell ist, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes transitives Modell $\mathcal{N} = \langle N, \in\rangle$ und einen eindeutig bestimmten Isomorphismus π: $M \to N$, wobei π alle transitiven Mengen von $\mathcal{M}$ auf sich selbst abbildet.

Beweis: Satz 13.1 in [FELGNER, 1997b].

□

Das Kondensationslemma macht nun eine Aussage über die Submodelle der Stufen $\mathbf{L}_\gamma$ der konstruktiblen Hierarchie:

Satz 2.1.10 Sei γ eine Limesordinalzahl, $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$ ein Modell mit $\mathcal{M} \prec \langle \mathbf{L}_\gamma, \in\rangle$. Dann gibt es ein $\delta < \gamma$ und einen Isomorphismus $\pi : M \to \mathbf{L}_\delta$. π ist die Identität auf allen transitiven Teilmengen von M.

Beweis: $\mathcal{M}$ ist als Submodell von $\mathbf{L}_\gamma$ fundiert und extensional. Nach Satz 2.1.9 gibt es daher ein transitives Modell $\langle N, \in\rangle$ und einen Isomorphismus $\pi : M \to N$, der alle transitiven Mengen auf sich selbst abbildet. Da γ eine Limeszahl ist, enthält die Theorie von $\mathbf{L}_\gamma$ den Satz σ_0 aus Satz 2.1.8. Daher enthält auch $\langle N, \in\rangle$ diesen Satz. Nach Satz 2.1.8 ist daher $N = \mathbf{L}_\delta$ für eine Limeszahl δ.

□

Die Modelle $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}[a]$ sind innere Modelle, d.h. sie sind $\in$–transitive Modelle von ZSF, enthalten alle Ordinalzahlen und können als Klassenterm mit Parametern hingeschrieben werden. $\mathbf{L}$ ist sogar das kleinste innere Modell:

Satz 2.1.11

(1) $\mathbf{L}$ ist ein inneres Modell.

(2) Für jede reelle Zahl a ist $\mathbf{L}[a]$ ein inneres Modell.

(3) Ist $\mathcal{M} = \langle M, \in\rangle$ ein inneres Modell, so gilt $\mathbf{L} \subseteq M$.

Beweis: Vergleiche [JECH, 1978, Theorem 32].

□

Die Modelle $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}[a]$ sind absolut im folgenden Sinne:

Satz 2.1.12 Ist $\mathcal{M} = \langle M, \in\rangle$ ein inneres Modell und $a \in \omega^\omega$ mit $a \in M$, so gilt $\mathbf{L}[a]^{\mathcal{M}} = \mathbf{L}[a]$.

Beweis: Siehe [KANAMORI, 1994, Proposition 3.2 (a)].

□

2.1.3 Normale Ultrafilter

In diesem Abschnitt werden wir Filter und Ultrafilter betrachten. Der Begriff des Filters wurde 1937 von Henri Cartan eingeführt und stammt eigentlich aus der Topologie. Filter sind heutzutage wichtige Objekte in der Mengenlehre. Eine bedeutende Rolle spielen Filter bei der Konstruktion von Ultrapotenzen, die wir in Abschnitt 2.1.4 definieren werden. Filter sind abstrakte Objekte; um sie in der Kombinatorik nutzen zu können, müssen Zusatzeigenschaften an die Filter geknüpft werden. Eine solche Eigenschaft ist z.B. die Normalität. Wir werden in diesem Abschnitt daher unseren Schwerpunkt auf die Eigenschaften normaler Ultrafilter legen.

Definition 2.1.13 Sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$. $\mathcal{F}$ heißt **Filter auf** M, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{F}$

(F2) Für alle $X, Y \in \mathcal{F}$ ist $X \cap Y \in \mathcal{F}$

(F3) Für alle $X \in \mathcal{F}$ ist jede Obermenge $X \subseteq Y \subseteq M$ auch Element von $\mathcal{F}$.

Ein Filter heißt **Ultrafilter**, wenn zusätzlich gilt:

(F4) Für jede Menge $X \subseteq M$ ist $X \in \mathcal{F}$ oder $M - X \in \mathcal{F}$.

Wir nennen einen Filter $\mathcal{F}_1$ **maximal**, wenn es keinen Filter $\mathcal{F}_2$ mit $\mathcal{F}_1 \subsetneqq \mathcal{F}_2$ gibt. Es ist bekannt, daß die Ultrafilter gerade die maximalen Filter sind (vergleiche [V. QUERENBURG, 1979, Satz 5.16]).

Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf M, so sagen wir, daß eine Eigenschaft $\mathcal{F}$–**fast überall** gilt, wenn sie für alle Elemente einer Filtermenge gilt. Wir sagen dann auch, daß die Eigenschaft für $\mathcal{F}$–fast alle Elemente aus M gilt.

Die folgende Eigenschaft von Ultrafiltern folgt leicht aus der Definition:

Proposition 2.1.14 Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge M und $X_1, X_2 \subseteq M$ seien keine Elemente von $\mathcal{U}$. Dann ist auch $X_1 \cup X_2 \notin \mathcal{U}$.

Beweis: Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, sind die Mengen $M - X_1$ und $M - X_2$ Elemente von $\mathcal{U}$, also auch $(M - X_1) \cap (M - X_2) = M - (X_1 \cup X_2) \in \mathcal{U}$. Angenommen $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{U}$, dann wäre auch $\emptyset = (M - (X_1 \cup X_2)) \cap (X_1 \cup X_2) \in \mathcal{U}$, was jedoch nach Definition von Filtern unmöglich ist.

□

Nach Filtereigenschaft (2) liegen endliche Schnitte von Filtermengen ebenfalls im Filter. Für Schnitte unendlich vieler Filtermengen muß dies nicht immer der Fall sein. Wir führen daher eine Bezeichnung ein für die Eigenschaft von Filtern, bezüglich unendlicher Schnittbildung abgeschlossen zu sein:

Definition 2.1.15 Sei λ eine Ordinalzahl. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt λ–**vollständig**, wenn $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \mathcal{F}$ gilt für alle $\gamma < \lambda$ und $\{X_\alpha, \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{F}$.

Nach Definition ist jeder Filter $\aleph_0$–vollständig. Üblicherweise nennt man $\aleph_1$–vollständige Filter auch σ–vollständig.
Wir zählen nun einige zur λ–Vollständigkeit äquivalente Bedingungen auf:

Proposition 2.1.16 Sei $\mathcal{U}$ ein Filter auf M.
Dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein λ–vollständiger Ultrafilter.

(2) $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter und für alle $\gamma < \lambda$ und für alle Folgen$\langle X_\alpha;\ \alpha < \gamma\rangle$ mit $X_\alpha \in \mathcal{U}$ für alle $\alpha < \gamma$ ist auch $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$.

(3) Für alle $\gamma < \lambda$ und für alle Folgen $\langle X_\alpha;\ \alpha < \gamma\rangle$ in $\mathcal{U}$ mit $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$ gibt es ein $\alpha < \gamma$ mit $X_\alpha \in \mathcal{U}$.

(4) Für alle $\gamma < \lambda$ und für alle Folgen $\langle X_\alpha;\ \alpha < \gamma\rangle$ mit $X_\alpha \notin \mathcal{U}$ für alle α gilt $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \notin \mathcal{U}$.

(5) Für alle $\gamma < \lambda$ und Partitionen $\{X_\alpha;\ \alpha < \gamma\}$ von M gibt es ein $\alpha < \gamma$, so daß $X_\alpha \in \mathcal{U}$ ist.

Beweis: Dies folgt unmittelbar mit Hilfe der de Morganschen Regeln aus der Definition von Ultrafilter.

□

Man kann auf sehr einfache Weise λ–vollständige Ultrafilter konstruieren: Ist M eine beliebige Menge und $a \in M$, so ist $\{X \subseteq M;\ a \in X\}$ für beliebige Ordinalzahlen λ ein λ–vollständiger Ultrafilter. Für solche Filter gilt offensichtlich $\bigcap \mathcal{F} = \{a\}$. Man nennt daher $\mathcal{F}$ durch a fixiert. Diese trivialen Ultrafilter, die immer konstruiert werden können, sind für uns nicht interessant. Wir schließen sie aus, indem wir eine weitere Eigenschaft von unseren Filtern fordern:

Definition 2.1.17 Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei** genau dann, wenn $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ gilt.

Man nennt diese Eigenschaft "frei", da sie nicht wie die oben beschriebenen, trivialen Filter durch eine bestimmte Menge fixiert sind.
Besonders interessant sind für uns Filter auf Ordinalzahlen. Freie Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ können maximal κ–vollständig sein. Dies folgt aus Proposition 2.1.16. Denn angenommen, ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist $(\kappa+1)$–vollständig. Wir betrachten die Partition $\{\{\alpha\};\ \alpha < \kappa\}$ von κ. Nach Eigenschaft (5) aus Proposition 2.1.16 gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $\{\alpha\} \in \mathcal{U}$. Dann ist jedoch $\mathcal{U}$ nicht frei, da jede Filtermenge α enthält (denn $\alpha \notin X \in \mathcal{U}$ würde $\emptyset = X \cap \{\alpha\} \in \mathcal{U}$ implizieren, im Widerspruch zur Definition von Filtern)[4].
Freie, κ–vollständige Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ enthalten nur große Mengen:

Proposition 2.1.18 Sei $\mathcal{F}$ ein κ–vollständiger, freier Filter auf κ.
Dann gilt $|X| = \kappa$ für alle $X \in \mathcal{F}$.

Beweis: Sei $X \subseteq \kappa$ mit $|X| = \gamma < \kappa$, $X := \{x_\alpha;\ \alpha < \gamma\}$. Da $\mathcal{F}$ frei ist, gilt wie oben $\{x_\alpha\} \notin \mathcal{F}$ für alle $\alpha < \gamma$. Also gilt $X = \bigcup_{\alpha<\gamma}\{x_\alpha\} \notin \mathcal{F}$ nach Proposition 2.1.16, da $\mathcal{F}$ κ–vollständig ist.

□

Wie wir oben bemerkt haben, können freie Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ höchstens κ–vollständig sein. In jedem freien Ultrafilter finden sich also κ Filtermengen, deren Schnitt nicht mehr im Filter liegt. Dagegen gibt es Filter, die bezüglich einer Modifikation der Schnittbildung, nämlich der Bildung von Diagonalschnitten, über κ Filtermengen abgeschlossen sind. Filter mit dieser Eigenschaft heißen normal:

Definition 2.1.19 Sei κ eine Kardinalzahl. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf κ heißt **normal**, wenn für alle Folgen $\langle X_\alpha;\ \alpha < \kappa\rangle \in \mathcal{F}^\kappa$ der Diagonalschnitt

$$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha := \{\beta < \kappa;\ \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha\}$$

in $\mathcal{F}$ liegt.

Ein Beispiel für normale Ultrafilter sind die sogenannten Clubfilter auf regulären Kardinalzahlen κ.
Eine Menge $C \subseteq \kappa$ heißt **club** in κ, wenn

[4] Ebenso kann gezeigt werden, daß freie Ultrafilter auf einer beliebigen Ordinalzahl α maximal $|\alpha|$–vollständig sein können.

(1) C konfinal in κ ist,

(2) C abgeschlossen in κ ist, d.h. für alle $\alpha < \kappa$ liegt $\operatorname{Sup}(\alpha \cap C)$ in C, falls $\alpha \cap C$ nicht leer ist.

Nun ist der **Clubfilter** $\mathcal{C}_\kappa$ auf κ definiert durch

$$\mathcal{C}_\kappa := \{X \subseteq \kappa;\ \exists C \subseteq X(\ C \text{ ist eine Clubmenge in } \kappa)\}.$$

Die Voraussetzung $\operatorname{cf}(\kappa) > \omega$ ist für die Definition des Clubfilters unerläßlich. Beispielsweise sind die Mengen $\{\aleph_n;\ n \in \omega\}$ und $\{\aleph_n + 1;\ n \in \omega\}$ beide club in $\aleph_\omega$, aber disjunkt. Die Menge $\mathcal{C}_{\aleph_\omega} := \{X \subseteq \kappa;\ \exists C \subseteq X(\ C \text{ ist eine Clubmenge in } \aleph_\omega)\}$ ist daher kein Filter auf $\aleph_\omega$.

Proposition 2.1.20 Sei κ eine Kardinalzahl mit $\operatorname{cf}(\kappa) > \omega$. Dann ist $\mathcal{C}_\kappa$ ein freier, $\operatorname{cf}(\kappa)$–vollständiger Filter.

Beweis:

(1) $\mathcal{C}_\kappa$ ist ein Filter: Offensichtlich ist $\emptyset$ kein Element von $\mathcal{C}_\kappa$, und κ selbst ist in $\mathcal{C}_\kappa$ enthalten. Außerdem sind Obermengen von Elementen aus $\mathcal{C}_\kappa$ nach Definition ebenfalls in $\mathcal{C}_\kappa$ enthalten. Die Eigenschaft, daß endliche Schnitte von Elementen aus $\mathcal{C}_\kappa$ wieder in $\mathcal{C}_\kappa$ liegen, folgt insbesondere aus (3).

(2) $\mathcal{C}_\kappa$ ist frei: Alle Endsegmente $C_\nu := \{\gamma;\ \nu < \gamma < \kappa\}$ sind club, d.h. sie liegen in $\mathcal{C}_\kappa$. Also ist $\bigcap_{X \in \mathcal{C}_\kappa} X \subseteq \bigcap_{\alpha < \kappa} C_\alpha = \emptyset$.

(3) $\mathcal{C}_\kappa$ ist $\operatorname{cf}(\kappa)$–vollständig: Der Schnitt von weniger als $\operatorname{cf}(\kappa)$ Clubmengen in κ ist wieder club in κ, vergleiche [FELGNER, 1997a, Proposition 3.1]. An dieser Stelle wird die Voraussetzung $\operatorname{cf}(\kappa) > \omega$ benötigt.

Ist nun $\gamma < \operatorname{cf}(\kappa)$ und $\{X_\nu;\ \nu < \gamma\} \subseteq \mathcal{C}_\kappa$, so gibt es für alle $\nu < \gamma$ eine Clubmenge C_ν mit $C_\nu \subseteq X_\nu$. Dann ist $\bigcap_{\nu<\gamma} C_\nu \subseteq \bigcap_{\nu<\gamma} X_\nu$, wobei $\bigcap_{\nu<\gamma} C_\nu$ wieder eine Clubmenge in κ ist. Also liegt $\bigcap_{\nu<\gamma} X_\nu$ ebenfalls in $\mathcal{C}_\kappa$.

□

Allerdings kann nicht gezeigt werden, daß $\mathcal{C}_\kappa$ ein Ultrafilter ist. Unter der Voraussetzung des Auswahlaxioms kann man sogar zeigen, daß für reguläre Kardinalzahlen κ der Clubfilter $\mathcal{C}_\kappa$ kein Ultrafilter ist. Denn mit AC gibt es disjunkte stationäre Mengen in κ. Seien S_1 und S_2 solche Mengen. Dann ist S_1 kein Element des Clubfilters, da der Schnitt einer Clubmenge mit S_2 nicht leer ist. D.h. S_1 ist keine Obermenge einer Clubmenge. Aus demselben Grund ist das Komplement von S_1 nicht in $\mathcal{C}_\kappa$ enthalten, da jede Clubmenge Elemente mit S_1 gemeinsam hat.
Aber der Clubfilter ist normal, wenn κ regulär ist:

Proposition 2.1.21 Sei κ eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl. Dann ist der Clubfilter $\mathcal{C}_\kappa$ normal.

Beweis: Für alle $\nu < \kappa$ sei eine Clubmenge C_ν gegeben. Sei $C := \triangle_{\nu<\kappa} C_\nu$. Wir wollen zeigen, daß C ebenfalls eine Clubmenge ist. Danach folgt dann leicht die Normalität des Clubfilters.

(1) C ist abgeschlossen: Sei $\mu < \kappa$ eine Limeszahl, so daß eine in μ konfinale Folge von Elementen aus C existiert. Angenommen, $\mu \notin C$, d.h. $\mu \notin \bigcap_{\nu<\mu} C_\nu$. Dann gibt es ein $\beta < \mu$ mit $\mu \notin C_\beta$. Nach Wahl von μ gibt es ein $\eta < \kappa$ und eine Folge $\langle \beta_\xi;\ \xi < \eta \rangle$ in C mit $\operatorname{Sup}\{\beta_\xi;\ \xi < \eta\} = \mu$ und $\beta_\xi > \beta$ für alle $\xi < \eta$. Da alle Zahlen β_ξ Elemente von C sind, gilt $\beta_\xi \in \bigcap_{\nu<\beta_\xi} C_\nu$ für alle $\xi < \eta$, also auch $\beta_\xi \in \bigcap_{\nu \leq \beta} C_\nu$ für alle $\xi < \eta$. Insbesondere also $\beta_\xi \in C_\beta$ für alle ν. Da jedoch C_β eine Clubmenge ist, folgt nun $\mu = \operatorname{Sup}\{\beta_\xi;\ \xi < \eta\} \in C_\beta$, im Widerspruch zur Wahl von β. Also gilt doch $\mu \in C$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von C.

(2) C ist konfinal: Sei $\alpha < \kappa$ beliebig. Wir wollen ein $\mu \geq \alpha$ finden mit $\mu \in C$. Dazu definieren wir rekursiv eine aufsteigende Folge von Ordinalzahlen der Länge ω wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \alpha, \\ \alpha_{n+1} &:= \mathrm{Min}\{\beta < \kappa;\ \beta \geq \alpha_n \ \&\ \beta \in \bigcap_{\nu < \alpha_n} C_\nu\}. \end{aligned}$$

Die so definierte Folge $\langle \alpha_n;\ n \in \omega \rangle$ ist eine wohldefinierte Folge in κ. Dies kann induktiv gezeigt werden: Wenn schon gezeigt ist, daß α_n ein Element von κ ist, so ist $\bigcap_{\nu < \alpha_n} C_\nu \in \mathcal{C}_\kappa$ nach Proposition 2.1.20, insbesondere ist diese Menge konfinal in κ und es kann ein Element α_{n+1} mit den gewünschten Eigenschaften ausgewählt werden. Wir setzen nun $\mu := \mathrm{Sup}\{\alpha_n;\ n \in \omega\}$. Da die Folge $\langle \alpha_n;\ n \in \omega \rangle$ aufsteigend ist, gilt $\mu \geq \alpha$. Außerdem ist $\mu \in \bigcap_{\nu < \mu} C_\nu$: Denn sei $\nu < \mu$ beliebig. Nach Definition der Zahlen α_n gilt $\alpha_m \in C_\nu$ für alle $\alpha_m > \nu$. Wegen $\mathrm{Sup}\{\alpha_n;\ n \in \omega\} = \mu$ folgt $\mu \in C_\nu$ aus der Abgeschlossenheit von C_ν. Da ν beliebig gewählt war, ist also $\mu \in \bigcap_{\nu < \mu} C_\nu$, d.h. $\mu \in C$.

Nun folgt sehr leicht die Normalität des Clubfilters. Wenn eine Folge $\{X_\nu;\ \nu < \kappa\} \subseteq \mathcal{C}_\kappa$ gegeben ist, so gibt es für alle $\nu < \kappa$ eine Menge C_ν mit $C_\nu \subseteq X_\nu$. Dann ist $\triangle_{\nu<\kappa} C_\nu \subseteq \triangle_{\nu<\kappa} X_\nu$. Da $\triangle_{\nu<\kappa} C_\nu$ eine Clubmenge ist, ist der Diagonalschnitt $\triangle_{\nu<\kappa} X_\nu$ ein Element von $\mathcal{C}_\kappa$.

□

Die Voraussetzung in Proposition 2.1.21, daß κ regulär ist, ist tatsächlich notwendig: Ist $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ und $\langle \alpha_\nu;\ \nu < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ eine konfinale Folge in κ, so definieren wir für alle $\nu < \kappa$ eine Menge C_ν durch

$$C_\nu := \begin{cases} \{\beta;\ \alpha_\nu \leq \beta < \kappa\}, & \text{falls } \nu < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alle Mengen C_ν sind club in κ, also Elemente des Clubfilters $\mathcal{C}_\kappa$. Aber der Diagonalschnitt $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\nu$ ist kein Element von $\mathcal{C}_\kappa$. Denn gilt $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \beta < \kappa$, so gibt es auch ein $\eta < \mathrm{cf}(\kappa)$ mit $\beta < \alpha_\eta$. Dann ist jedoch $\beta \notin C_\eta$, also $\beta \notin \bigcap_{\nu<\beta} C_\nu$. Dies bedeutet jedoch $\triangle_{\nu<\kappa} C_\nu \subseteq \mathrm{cf}(\kappa)$. Daher kann $\triangle_{\nu<\kappa} C_\nu$ keine Obermenge einer Clubmenge sein, d.h. $\triangle_{\nu<\kappa} C_\nu \notin \mathcal{C}_\kappa$.
Das folgende Lemma zeigt, daß der Clubfilter auf einer regulären Kardinalzahl κ der kleinste normale Filter auf κ ist, der alle Endsegmente enthält.

Lemma 2.1.22 Sei κ eine unendliche, reguläre Kardinalzahl und sei $\mathcal{F}$ ein normaler Filter auf κ, der alle Endsegmente $\{\gamma;\ \alpha < \gamma < \kappa\}$ für $\alpha < \kappa$ enthält.
Dann enthält $\mathcal{F}$ alle Clubmengen.

Beweis: Sei L die Menge aller Limeszahlen in κ. Dann liegt L in $\mathcal{F}$: Definiere für alle $\alpha < \kappa$ die Menge $X_\alpha := \{\nu;\ \alpha + 1 < \nu < \kappa\}$. Dann ist L der Diagonalschnitt von $\{X_\alpha;\ \alpha < \kappa\}$. Denn wenn γ eine Limeszahl ist, dann gilt $\gamma \in \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha$, da $\gamma > \alpha + 1$ für alle $\alpha < \gamma$ ist. Also gilt $L \subseteq \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Ist umgekehrt $\gamma = \delta + 1$ eine Nachfolgerzahl, so gilt $\gamma \notin X_\delta$, also $\gamma \notin \bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha$. Dies zeigt, daß jedes Element aus dem Diagonalschnitt von $\{X_\alpha;\ \alpha < \kappa\}$ eine Limeszahl ist, d.h. $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \subseteq L$. Insgesamt folgt $L \in \mathcal{F}$, da alle Mengen X_α nach Voraussetzung in $\mathcal{F}$ liegen ($\mathcal{F}$ enthält alle Endsegmente).
Sei nun C eine beliebige Clubmenge, $C := \{c_\alpha;\ \alpha < \kappa\}$ sei eine aufsteigende Aufzählung von C. Ist γ eine Limeszahl, so ist c_γ das kleinste Elemente von C, welches größer als c_α für alle $\alpha < \gamma$ ist. Da C abgeschlossen ist, folgt daher $c_\gamma = \mathrm{Sup}\{c_\alpha;\ \alpha < \gamma\}$.
Wir definieren jetzt wieder Endsegmente von κ: Für $\alpha < \kappa$ sei $Y_\alpha := \{\nu;\ c_\alpha < \nu < \kappa\}$. Nach Voraussetzung ist $\triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \in \mathcal{F}$, also auch $L \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \in \mathcal{F}$. Sei nun

$\gamma \in L \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \in \mathcal{F}$. Dann ist $\gamma \in \bigcap_{\alpha<\gamma} Y_\alpha$, also $\gamma > c_\alpha$ für alle $\alpha < \gamma$. Somit gilt auch $\gamma \geq c_\gamma$, denn γ ist eine Limeszahl. Da aber die Elemente von C aufsteigend numeriert sind, ist andererseits $\gamma \leq c_\gamma$. Insgesamt ist also $\gamma = c_\gamma$, und dies zeigt, daß γ ein Element von C ist. Also gilt $L \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \in \mathcal{F} \subseteq C$. Als Obermenge einer Filtermenge liegt somit C selbst in $\mathcal{F}$.

□

Korollar 2.1.23 Sei κ eine unendliche, reguläre Kardinalzahl und der Clubfilter $\mathcal{C}_\kappa$ sei ein Ultrafilter. Dann ist $\mathcal{C}_\kappa$ der einzige normale Filter auf κ.

Beweis:
Sei $\mathcal{F}$ ein normaler Filter auf κ. Nach Lemma 2.1.22 ist der Clubfilter $\mathcal{C}_\kappa$ Teilmenge dieses Filters $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{C}_\kappa$ ein Ultrafilter ist, ist $\mathcal{C}_\kappa$ maximal, also $\mathcal{C}_\kappa = \mathcal{F}$.

□

Wir werden nun die Normalität von Ultrafiltern auf eine andere Weise charakterisieren. Dabei verwenden wir den Begriff der regressiven Funktion: Eine Funktion $h : \kappa \to \kappa$ heißt **regressiv**, wenn $h(\alpha) < \alpha$ gilt für alle $\alpha \in \kappa - \{0\}$.

Hilfssatz 2.1.24 Sei $\mathcal{U}$ ein freier, κ–vollständiger Ultrafilter auf κ.
Dann sind äquivalent:

(1) $\mathcal{U}$ ist normal.

(2) Für alle Mengen M und Funktionen $h : \kappa \to M$ mit $\{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) < \alpha\} \in \mathcal{U}$ gibt es ein $\gamma < \kappa$ mit $\{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{U}$.

(3) Für alle regressiven Funktionen h gibt es ein $\gamma < \kappa$ mit $\{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{U}$.

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sei h eine Funktion mit $Y := \{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) < \alpha\} \in \mathcal{U}$. Angenommen, $X_\gamma := \{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) \neq \gamma\} \in \mathcal{U}$ für alle $\gamma < \kappa$. Dann liegt wegen der Normalität von $\mathcal{U}$ auch $X := \triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$ in $\mathcal{U}$. Also gilt $\emptyset \neq X \cap Y \in \mathcal{U}$. Sei $\beta \in X \cap Y$. Dann ist $\beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} X_\gamma$, also $h(\beta) \neq \gamma$ für alle $\gamma < \beta$. Somit ist $h(\beta) \geq \beta$, d.h. $\beta \notin Y$ im Widerspruch zu $\beta \in X \cap Y$!

(2) $\Longrightarrow$ (1) Gegeben sei eine Folge $\langle X_\alpha;\ \alpha < \kappa\rangle$ in $\mathcal{U}$. Zu zeigen ist, daß der Diagonalschnitt $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ über diese Mengen auch wieder in $\mathcal{U}$ liegt. Wir beweisen dies indirekt:

Angenommen, $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\alpha < \kappa;\ \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta\} \notin \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, liegt dann das Komplement $Y := \{\alpha < \kappa;\ \alpha \notin \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta\}$ in $\mathcal{U}$. D.h. für alle $\alpha \in Y$ gibt es ein minimales $\nu_\alpha < \alpha$, so daß $\alpha \notin X_{\nu_\alpha}$ ist. Wir definieren nun eine Funktion h durch

$$h(\alpha) = \begin{cases} \nu_\alpha, & \text{falls } \alpha \in Y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\gamma < \kappa$, so daß $\{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) = \gamma\} = \{\alpha < \kappa;\ \nu_\alpha = \gamma\} \in \mathcal{U}$ gilt. D.h. es gilt $\alpha \notin X_\gamma$ für $\mathcal{U}$–fast alle $\alpha < \kappa$. Dies bedeutet jedoch, daß die Menge X_γ nicht im Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegen kann, im Widerspruch zur Definition der Mengen X_α. Somit ist $\mathcal{U}$ normal.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Dies ist trivialerweise erfüllt. Hier geht ein, daß der Filter $\mathcal{U}$ frei ist. Wäre nämlich $\mathcal{U}$ der von $\{0\}$ erzeugte Filter, dann läge für eine regressive Funktion h auf κ die Menge $\{\alpha < \kappa; h(\alpha) < \alpha\}$ nicht in $\mathcal{U}$. Damit ist die Voraussetzung in (2) für h nicht erfüllt, und (3) folgt nicht unmittelbar aus (2).

(3) $\Longrightarrow$ (2) Sei h eine Funktion mit $X_1 := \{\alpha < \kappa;\ h(\alpha) < \alpha\} \in \mathcal{U}$. Wir definieren daraus eine regressive Funktion $g : \kappa \to \kappa$ durch

$$g(\alpha) := \begin{cases} f(\alpha), & \text{falls } \alpha \in X_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $\gamma < \kappa$ und eine Filtermenge $X_2 \in \mathcal{U}$, so daß $g(\alpha) = \gamma$ gilt für alle $\alpha \in X_2$. Also gilt $h(\alpha) = \gamma$ für alle $\alpha \in X_1 \cap X_2 \in \mathcal{U}$, was die Behauptung beweist.

□

Oft wird in der Literatur übersehen, daß nicht jeder normale Filter auf κ auch κ–vollständig ist. Daher soll hier ein Beispiel für einen freien, normalen Filter auf einer Kardinalzahl κ gegeben werden, der nicht κ–vollständig ist. Sei $\lambda < \kappa$ eine Kardinalzahl und $\mathcal{C}_\lambda = \{C \subseteq \lambda;\ C \text{ ist abgeschlossen und unbeschränkt in } \lambda\}$ der Clubfilter auf λ. Dann bildet $\mathcal{F} := \{X \subseteq \kappa;\ \exists Y(\ Y \in \mathcal{C}_\lambda\ \wedge\ Y \subseteq X)\}$ einen Filter auf κ: Offensichtlich ist $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $\kappa \in \mathcal{F}$. Ebenso ist klar, daß Obermengen von Filtermengen ebenfalls in $\mathcal{F}$ liegen. Sind $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$, so gibt es Mengen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_\lambda$, so daß $C_1 \subseteq X_1$ und $C_2 \subseteq X_2$. Also $C_1 \cap C_2 \subseteq X_1 \cap X_2$, woraus $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$ folgt.
$\mathcal{F}$ ist ein freier Filter. Denn sei $\beta < \kappa$. Gilt $\beta \geq \lambda$, so ist z.B. $\kappa - \{\beta\}$ eine Filtermenge, die β nicht enthält. Ist $\beta < \lambda$, so gibt es eine Menge $C \in \mathcal{C}_\lambda$, die β nicht enthält, da $\mathcal{C}_\lambda$ frei ist. Es ist dann $C \in \mathcal{F}$ und β liegt nicht in C. Also $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
Wegen $\lambda \in \mathcal{F}$ kann $\mathcal{F}$ nach Proposition 2.1.18 nicht κ–vollständig sein.
Wir müssen nun noch die Normalität überprüfen. Sei dazu $\{X_\gamma;\ \gamma < \kappa\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}$. Für alle $\gamma < \lambda$ setzen wir $C_\gamma := X_\gamma \restriction \lambda \in \mathcal{C}_\lambda$. Da $\mathcal{C}_\lambda$ normal ist, ist $\triangle_{\gamma<\lambda} C_\gamma \in \mathcal{F}$. Also $C := \{\beta < \lambda;\ \beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} X_\beta\} \in \mathcal{C}_\lambda$. Nun ist aber $C \subseteq \triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$, also $\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma \in \mathcal{F}$.

Mit der Zusatzvoraussetzung, daß alle Endsegmente im Filter enthalten sind, kann jedoch gezeigt werden, daß jeder normale Filter auf κ auch κ–vollständig ist. In vielen Lehrbüchern, z.B. in [KANAMORI, 1994, Seite 3], wird diese Zusatzvoraussetzung als Teil der Definition von Filtern auf Kardinalzahlen angesehen.

Satz 2.1.25 Sei κ eine Kardinalzahl, $\mathcal{F}$ ein normaler Filter auf κ, und $\mathcal{F}$ enthalte alle Endsegmente von κ. Dann ist $\mathcal{F}$ ein κ–vollständiger Filter.

Beweis: Sei $\lambda < \kappa$ und $\{X_\gamma;\ \gamma < \lambda\} \subseteq \mathcal{F}$. Wir wollen zeigen, daß $\bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ ebenfalls in $\mathcal{F}$ liegt. Um die Normalität von $\mathcal{F}$ ausnutzen zu können, ergänzen wir die gegebene Folge zu einer Folge in $\mathcal{F}$ der Länge κ : Wir definieren $X_\gamma := \kappa$ für alle γ mit $\lambda \leq \gamma < \kappa$. Es gilt $\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma \subseteq \lambda \cup \{\beta < \kappa;\ \beta \geq \lambda\ \&\ \beta \in \bigcap_{\gamma<\beta} X_\gamma\} = \lambda \cup \{\beta < \kappa;\ \beta \geq \lambda\ \&\ \beta \in \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma\} \in \mathcal{F}$. Da nach Voraussetzung $X := \{\beta; \lambda \leq \beta < \kappa\}$ ein Element von $\mathcal{F}$ ist, ist auch $X \cap (\lambda \cup \{\beta < \kappa;\ \beta \geq \lambda\ \&\ \beta \in \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma\}) = \{\beta < \kappa;\ \beta \geq \lambda\ \&\ \beta \in \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma\} \in \mathcal{F}$, und dies ist eine Teilmenge von $\bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$. Somit ist gezeigt, daß $\bigcap_{\gamma<\lambda} X_\gamma$ ein Element von $\mathcal{F}$ ist.

□

Aus einem Filter $\mathcal{F}$ kann man weitere Filter, die Bildfilter von $\mathcal{F}$, konstruieren. Die Konstruktion von Bildfiltern ist ein Mittel, das häufig in Beweisen eingesetzt wird. Sie entspricht in der Maßtheorie der Konstruktion des Bildmaßes[5].

Definition 2.1.26 Seien M und N Mengen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf M und $f : M \to N$ eine Funktion. Dann heißt $f_*\mathcal{F} := \{X \subseteq N;\ (f^{-1})"[X] \in \mathcal{F}\}$ **Bildfilter von $\mathcal{F}$ unter f.**

[5] Vergleiche [BAUER, 1992, Definition 7.6].

Proposition 2.1.27 Sei $\mathcal{F}$ eine Filter auf einer Menge M und $f : M \to N$ eine Funktion. Dann gilt:

(1) $f_*\mathcal{F}$ ist ein Filter auf N.

(2) Falls $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf M ist, dann ist $f_*\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf N.

(3) Falls κ eine Kardinalzahl und $\mathcal{F}$ κ–vollständig ist, dann ist auch $f_*\mathcal{F}$ κ–vollständig.

Beweis: Vergleiche [STEINWAND, 1998, Proposition 3.15].

□

2.1.4 Ultrapotenzen

In der Mengenlehre gibt es zwei grundlegende Modellbildungsprozesse, nämlich die Cohensche Erzwingungsmethode und die Bildung von Ultrapotenzen. In dieser Arbeit werden die Ultrapotenzen eine große Rolle spielen, die Erzwingungsmethode geht nur in dem nicht aufgeführten Beweis von Lemma 3.4.1 ein.
Der Begriff des Ultraprodukts bzw. der Ultrapotenz entstammt der Modelltheorie. Wir werden die Ultrapotenzen nur in der Allgemeinheit definieren, in der wir sie brauchen.
Seien im folgenden $\mathcal{L}_<$ eine Sprache mit einer zweistelligen Relation $<$ und $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ eine $\mathcal{L}$–Struktur. Sei außerdem S eine Menge mit einem Ultrafilter $\mathcal{U}$.
Für $f, g \in M^S$ sei

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \ :\Longleftrightarrow \{s \in S; f(s) = g(s)\} \in \mathcal{U}.$$

$\sim_{\mathcal{U}}$ ist eine Äquivalenzrelation: Die Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich. Transitivität folgt daraus, daß Schnitte zweier Filtermengen und Obermengen von Filtermengen wieder in $\mathcal{U}$ liegen. Denn sei $f \sim_{\mathcal{U}} g$ und $g \sim_{\mathcal{U}} h$. Dann gibt es Mengen $X_1 = \{s \in S; f(s) = g(s)\} \in \mathcal{U}$ und $X_2 = \{s \in S;\ g(s) = h(s)\} \in \mathcal{U}$. Also ist $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{U}$. Da jedoch $X_1 \cap X_2 \subseteq \{s \in S;\ f(s) = h(s)\}$ gilt, folgt nun $f \sim_{\mathcal{U}} h$.

$[f]_{\mathcal{U}} = \{g \in M^S; f \sim_{\mathcal{U}} g\}$ bezeichne die Äquivalenzklasse von f bezüglich $\sim_{\mathcal{U}}$.

Wir betrachten $M^S/{\sim_{\mathcal{U}}} = \{\, [f]_{\mathcal{U}}\, ;\ f \in M^S\}$.
Durch

$$[f]_{\mathcal{U}} \ <_{\mathcal{U}} \ [g]_{\mathcal{U}} \ :\Longleftrightarrow \{s \in S;\ f(s) < g(s)\} \in \mathcal{U}$$

ist eine wohldefinierte zweistellige Relation auf $M^S/\mathcal{U}$ definiert: Denn seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in M^S,\ f_1 \sim_{\mathcal{U}} f_2$ und $g_1 \sim_U g_2$.
Es gibt Mengen $X_1 = \{s \in S;\ f_1(s) = f_2(s)\} \in \mathcal{U}$ und $X_2 = \{s \in S;\ g_1(s) = g_2(s)\} \in \mathcal{U}$.
Wenn $X_3 = \{s \in S;\ f_1(s) < g_1(s)\} \in \mathcal{U}$ ist, so ist auch $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \in \mathcal{U}$ und somit $\{s \in S;\ f_2(s) < g_2(s)\} \in \mathcal{U}$ als Obermenge von $X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Also ist gezeigt, daß $\{s \in S;\ f_1(s) < g_1(s)\} \in \mathcal{U}$ genau dann gilt, wenn $\{s \in S;\ f_2(s) < g_2(s\} \in \mathcal{U}$ ist.

Definition 2.1.28 $\langle M^S/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}} \rangle$ ist die **Ultrapotenz von $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{U}$**.

Satz 2.1.29 (Loś)
Sei $\langle M^S/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}} \rangle$ die Ultrapotenz von $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{U}$, φ eine Formel der Sprache $\mathcal{L}_<$ mit n freien Variablen, und $f_1, ..., f_n \in M^S$ beliebig.
Dann gilt:

$$\langle M^S/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}} \rangle \models \varphi[[f_1]_{\mathcal{U}}, ..., [f_n]_{\mathcal{U}}] \Longleftrightarrow \{s \in S;\ \mathcal{M} \models \varphi[f_1(s), ..., f_n(s)]\} \in \mathcal{U}.$$

Beweisidee: Der Beweis verwendet Induktion nach dem Formelaufbau.

□

Ist $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ ein Modell und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge S, so definieren wir eine Abbildung $j_\mathcal{U} : M \to M^S/\mathcal{U}$ durch $j_\mathcal{U}(x) = [c_x]_\mathcal{U}$, wobei c_x die Funktion ist, die konstant den Wert x annimmt. Die so definierte Abbildung ist eine elementare Einbettung von $\mathcal{M}$ in die Ultrapotenz von $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{U}$:

Lemma 2.1.30 Sei $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ ein Modell und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge S. Dann gibt es eine elementare Einbettung von $\langle M, < \rangle$ in die Ultrapotenz $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$. $\mathcal{M}$ kann also als Submodell der Ultrapotenz von $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{U}$ aufgefaßt werden.

Beweis: $j_\mathcal{U}$ ist eine elementare Einbettung:
Denn $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle \models \varphi[j_\mathcal{U}(x)] = \varphi[[c_x]_\mathcal{U}]$ gilt nach Satz 2.1.29 genau dann, wenn $\{s \in S;\ \mathcal{M} \models \varphi[c_x(s)] = \varphi[x]\} \in \mathcal{U}$ ist. Wegen $\emptyset \notin \mathcal{U}$ ist dies jedoch gleichbedeutend mit $\{s \in S;\ \mathcal{M} \models \varphi[x]\} = \kappa$, d.h. $\mathcal{M} \models \varphi[x]$.

□

Proposition 2.1.31 (Mit ZSF+DC)
Sei $\langle M, < \rangle$ ein fundiertes Modell, S eine Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf S. Dann ist $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$ fundiert genau dann, wenn $\mathcal{U}$ ein σ–vollständiger Ultrafilter ist.

Beweis: Wir beachten, daß mit DC Fundiertheit äquivalent dazu ist, daß keine unendliche, echt absteigende Kette von Mengen existiert.

Wir zeigen zunächst, daß aus der σ–Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ die Fundiertheit der Ultrapotenz folgt: Angenommen, es gäbe eine Folge $\langle f_k;\ k \in \omega \rangle$ mit $f_k \in M^S$ für alle $k \in \omega$ und $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle \models \forall k \in \omega\ ([f_{k+1}]_\mathcal{U} <_\mathcal{U} [f_k]_\mathcal{U})$.
Dann ist also $X_k := \{s \in S; f_{k+1}(s) < f_k(s)\} \in \mathcal{U}$ für alle $k \in \omega$. Da $\mathcal{U}$ σ–vollständig ist, gilt $X := \bigcap_{k \in \omega} X_k \in \mathcal{U}$, also $X \neq \emptyset$. Sei $s \in X$. Dann gilt $f_{k+1}(s) < f_k(s)$ für alle $k \in \omega$.
Damit wäre $\langle f_k(s); k \in \omega \rangle$ eine echt absteigende Folge in M, im Widerspruch zur Annahme über M.

Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung, indem wir annehmen, daß $\mathcal{U}$ nicht σ–vollständig ist, und daraus herleiten, daß dann die Ultrapotenz $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$ nicht fundiert sein kann: Sei also $\mathcal{U}$ nicht σ–vollständig. Dann gibt es nach Proposition 2.1.16 eine Partition $\{X_n; n \in \omega\}$ von S, so daß $X_n \notin \mathcal{U}$ ist für alle $n \in \omega$. Nach Proposition 2.1.14 folgt induktiv, daß die Vereinigung von endlich vielen Mengen X_n ebenfalls nicht im Filter $\mathcal{U}$ liegt. Da $\mathcal{U}$ jedoch ein Ultrafilter ist, gilt $\bigcup_{k \leq n < \omega} X_n \in \mathcal{U}$ für alle natürlichen Zahlen k.
Sei nun n_s für alle $s \in S$ das eindeutig bestimmte n, so daß $s \in X_n$ ist.
Definiere für alle $k \in \omega$ eine Funktion $f_k : S \to \omega$ durch

$$f_k(s) := \begin{cases} n_s - k & \text{falls } n_s - k \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\{s \in S;\ f_{k+1}(s) < f_k(s)\} = \{s \in S;\ n_s - (k+1) \in n_s - k\} = \bigcup_{k+1 \leq n < \omega} X_n \in \mathcal{U}.$$

Also gilt $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle \models\ \forall k \in \omega\ ([f_{k+1}]_\mathcal{U} <_\mathcal{U} [f_k]_\mathcal{U})$. Somit ist $\langle M^S/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$ nicht fundiert.

□

Dieser Satz zeigt, daß bei einem σ–vollständigen Ultrafilter $\mathcal{U}$ die Ultrapotenz $\langle M^S/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ isomorph zu einem transitiven Modell ist. Dies folgt direkt aus dem Satz von Mostowski 2.1.9.

In dieser Arbeit werden wir Ultrapotenzen von wohlgeordneten Mengen modulo einem σ–vollständigen Ultrafilter betrachten. Wir wollen zeigen, daß solche Ultrapotenzen Wohlordnungen sind. Zunächst beweisen wir dies für Mengen von Ordinalzahlen.

Satz 2.1.32 (Mit ZSF + DC)
Sei $M \subseteq$ Ord und $\mathcal{U}$ ein σ–vollständiger Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ. Dann ist die Ultrapotenz $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ von $\langle M, \in\rangle$ modulo $\mathcal{U}$ wohlgeordnet.

Beweis: Man kann sich leicht überlegen, daß es Formeln $\mathrm{Wo}(x)$ und $\mathrm{Trs}(x)$ der Sprache $\mathcal{L}_\in$ gibt, die aussagen, daß die Menge $\{y;\ y \in x\}$ eine Wohlordnung bzw. $\in$–transitiv ist.
Da M eine Teilmenge von Ordinalzahlen ist, gilt $\langle M, \in\rangle \models \forall x\ (\mathrm{Wo}(x)\ \wedge\ \mathrm{Trs}(x))$. Also gilt nach Satz 2.1.29 auch $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle \models \forall x\ (\mathrm{Wo}(x)\ \wedge\ \mathrm{Trs}(x))$.
Da $\mathcal{U}$ ein σ–vollständiger Ultrafilter ist, ist die Ultrapotenz $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ nach Proposition 2.1.31 fundiert, also gibt es nach Satz 2.1.9 einen transitiven Kollaps $\langle N, \in\rangle$ von $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$. Da die beiden Modelle $\langle N, \in\rangle$ und $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ isomorph sind, gilt auch $\langle N, \in\rangle \models \forall x\ (\mathrm{Wo}(x)\ \wedge\ \mathrm{Trs}(x))$. Dies bedeutet jedoch, daß jedes Element aus N eine $\in$–transitive Wohlordnung ist, d.h. eine Ordinalzahl. Somit ist N eine transitive Menge von Ordinalzahlen, also selbst eine Ordinalzahl.
Da $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ und $\langle N, \in\rangle$ isomorph sind, ist $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ eine Wohlordnung.

$\square$

Wir verallgemeinern diesen Satz, indem wir die Ultrapotenzen von wohlgeordneten Mengen M modulo einem σ–vollständigen Ultrafilter betrachten. Ist M eine durch $<$ wohlgeordnete Menge und U ein Ultrafilter auf einer Menge S, so definiert die Relation $<_{\mathcal{U}}$ eine Ordnung auf der Ultrapotenz $M^S/\mathcal{U}$, da Irreflexivität, Antisymmetrie und Transitivität durch Formeln der Sprache $\mathcal{L}_<$ ausgedrückt werden können. Wie schon in Satz 2.1.32 angedeutet wurde, benötigt man zusätzlich die σ–Vollständigkeit von $\mathcal{U}$, damit $<_{\mathcal{U}}$ eine Wohlordnung ist:

Hilfssatz 2.1.33 Sei $M \subseteq$ Ord, $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ die Ultrapotenz von $\langle M, \in\rangle$ modulo dem σ–vollständigen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer Kardinalzahl κ und $\langle N, <\rangle$ ebenfalls eine Wohlordnung. $\langle N^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ sei die Ultrapotenz von $\langle N, <\rangle$ modulo $\mathcal{U}$. Dann gilt:

(1) Besitzt N höchstens die Mächtigkeit von M, so ist $|N^\kappa/\mathcal{U}| \leq |M^\kappa/\mathcal{U}|$.

(2) Sind M und N gleichmächtig, so ist $|N^\kappa/\mathcal{U}| = |M^\kappa/\mathcal{U}|$.

(3) Besitzen $\langle M, \in\rangle$ und $\langle N, <\rangle$ denselben Ordnungstyp, so besitzen auch $\langle M^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ und $\langle N^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ denselben Ordnungstyp.

Insbesondere gilt nach Satz 2.1.32: Ist $\langle N, <\rangle$ eine Wohlordnung, so ist auch die Ultrapotenz $\langle N^\kappa/\mathcal{U}, <_{\mathcal{U}}\rangle$ eine Wohlordnung.

Beweis:
Sei $w : N \to M$ eine injektive Abbildung.
Für alle $f \in N^\kappa$ sei $f_w \in M^\kappa$ definiert durch $f_w := w \circ f$. Wir definieren dann $W : N^\kappa/\mathcal{U} \to M^\kappa/\mathcal{U}$ durch $W([f]_{\mathcal{U}}) := [f_w]_{\mathcal{U}}$.

W ist wohldefiniert: Denn wenn $f = g$ $\mathcal{U}$–fast überall gilt, so ist auch $f_w = g_w$ $\mathcal{U}$–fast überall.

W ist injektiv:

Denn sei $[f_w]_\mathcal{U} = [g_w]_\mathcal{U}$. Dann ist $f_w(\beta) = g_w(\beta)$ für $\mathcal{U}$–fast alle $\beta < \kappa$. Also auch $f(\beta) = g(\beta)$ für $\mathcal{U}$–fast alle $\beta < \kappa$, d.h. $[f]_\mathcal{U} = [g]_\mathcal{U}$. Somit ist Eigenschaft (1) gezeigt.

Wenn w zusätzlich surjektiv ist, dann ist auch W surjektiv:
Denn sei $g \in M^\kappa$. Definiere $f \in N^\kappa$ durch $f := w^{-1} \circ g$ Dann ist $g = f_w$, also $W([f]_\mathcal{U}) = [g]_\mathcal{U}$. Somit ist auch Eigenschaft (2) gezeigt.

Wenn w zusätzlich ordnungserhaltend ist, dann ist auch W ordnungserhaltend:
Denn seien $f, g \in N^\kappa$, $[f]_\mathcal{U} <_\mathcal{U} [g]_\mathcal{U}$. Dann gilt $f(\beta) < g(\beta)$ für $\mathcal{U}$–fast alle $\beta < \kappa$. Da w ordnungserhaltend ist, ist $f_w(\beta) \in g_w(\beta)$ für $\mathcal{U}$–fast alle $\beta < \kappa$, also $[f_w]_\mathcal{U} <_\mathcal{U} [g_w]_\mathcal{U}$. Somit ist Eigenschaft (3) auch gezeigt.

Für jede Wohlordnung $\langle N, < \rangle$ gibt es eine Ordinalzahl α, so daß $\langle \alpha, \in \rangle$ isomorph zu $\langle N, < \rangle$ ist. Nach Satz 2.1.32 ist die Ultrapotenz $\langle \alpha^\kappa/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$ wohlgeordnet. Nach Eigenschaft (3) ist damit auch $\langle N^\kappa/\mathcal{U}, <_\mathcal{U} \rangle$ wohlgeordnet mit demselben Ordnungstyp.

□

2.1.5 Konsistenzstärkehierarchie

Gödels Unvollständigkeitssatz sagt nicht nur, daß die Konsistenz der Dedekind–Peano–Arithmetik DPA nicht in DPA bewiesen werden kann, sondern gibt das gleiche Resultat auch für alle konsistenten, rekursiv–axiomatisierten Erweiterungen von DPA, insbesondere für ZSF. Dadurch erhält man unmittelbar eine Hierarchie von Erweiterungen von ZSF, die geordnet ist nach dem Kriterium, ob die stärkere Theorie die Konsistenz der schwächeren beweist. Viele Theorien in dieser Hierarchie, die man aus philosophischen Gründen für natürlich hält, sind vom Typ ZSF+A, wobei A ein sogenanntes großes Kardinalzahl–Axiom ist[6]. In dieser Arbeit geht es darum, unter AD nachzuweisen, daß relativ kleine Kardinalzahlen $\kappa \leq \aleph_\omega$ große Kardinalzahl–Eigenschaften erfüllen. Um diese großen Kardinalzahl–Eigenschaften zu definieren und ihre Stärke in die eben erwähnte Hierarchie einzuordnen, geben wir in diesem Abschnitt einige Definitionen.
Eine große Kardinalzahl–Eigenschaft, die schon aus der Vorlesung [Felgner, 1997b, §3] bekannt ist, ist die Unerreichbarkeit. Eine Kardinalzahl heißt (stark) unerreichbar, wenn sie regulär und (starker) Limes ist.
Eine weitere wichtige große Kardinalzahl–Eigenschaft ist die Meßbarkeit.

Definition 2.1.34 Eine Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ heißt **meßbar**, wenn es einen freien, κ–vollständigen Ultrafilter auf κ gibt.

Der Begriff der meßbaren Kardinalzahl ist eng verbunden mit dem Maßproblem. Dieses Problem geht zurück auf Lebesgue. Er stellte die Frage, ob es ein translationsinvariantes, σ–vollständiges Maß gibt, das auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiert ist. Unter AC ist diese Frage negativ beantwortet[7]. Die Definition meßbarer Kardinalzahlen ist eine Verallgemeinerung des Maßproblems auf beliebige, überabzählbare Kardinalitäten, wobei auf die Eigenschaft der Translationsinvarianz verzichtet wird.
Wir werden meßbare Kardinalzahlen in Satz 2.1.36 noch auf eine andere Art charakterisieren, nämlich als kritische Punkte bestimmter elementarer Einbettungen.

Definition 2.1.35 Sei $j : \mathbf{V} \to \mathcal{M}$ eine nichttriviale elementare Einbettung. Dann ist

$$\mathrm{krit}(j) := \mathrm{Min}\{\alpha \in \mathrm{Ord};\ \alpha < j(\alpha)\}$$

der **kritische Punkt** von j.

[6] Große Kardinalzahl–Axiome werden auch starke Unendlichkeitsaxiome genannt. Diese Bezeichnung ist gerade bei dem Thema dieser Arbeit deutlich geeigneter, da sich zeigen wird, daß die "großen Kardinalzahlen" nicht immer wirklich groß sein müssen, vergleiche Kapitel 4.

[7] Vergleiche [Wagon, 1985, Corollary 1.6].

Durch Betrachtung des Mirimanoff–Rangs sieht man leicht, daß für eine nichttriviale Einbettung diese Ordinalzahl stets existiert: Sei X ein Element minimalen Mirimanoff–Rangs $\varrho_{\min}$, welches von j bewegt wird. Dann wird auch $\varrho_{\min}$ selbst bewegt (vergleiche [KANAMORI, 1994, Proposition 5.1]). Offensichtlich kann keine Ordinalzahl nach unten abgebildet werden, da elementare Einbettungen ordnungserhaltend sind und für jede ordnungserhaltende Abbildung f von einer wohlgeordneten Menge M in eine Wohlordnung $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$ gilt, vergleiche [FELGNER, 1996, Proposition 7.4].

In Abschnitt 2.1.4 haben wir Ultrapotenzen für Mengenmodelle $\langle M, < \rangle$ eingeführt. Die Bildung von Restklassen in Klassenmodellen führt natürlich zu gewissen Schwierigkeiten (man bildet eine Klasse von echten Klassen). Dennoch kann man den Begriff der Ultrapotenz für echte Klassen durch Einschränkung auf die Funktionen minimalen Mirimanoff–Rangs sinnvoll definieren[8]. Also kann man Ultrapotenzen über $\mathbf{V}$ bilden.

Wenn κ eine meßbare Kardinalzahl, $\mathcal{U}$ ein κ–vollständiger Ultrafilter auf κ und außerdem $j_{\mathcal{U}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^\kappa/\mathcal{U}$ die schon in Lemma 2.1.30 betrachtete elementare Einbettung ist, dann kann gezeigt werden, daß κ der kritische Punkt von $j_{\mathcal{U}}$ ist.
Umgekehrt kann für eine elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \to \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$ ein inneres Modell ist, auf krit(j)=: κ ein freier, κ–vollständiger Ultrafilter $\mathcal{U}_j$ definiert werden: Man rechnet leicht nach, daß der durch

$$X \in \mathcal{U}_j \iff X \in \mathcal{P}(\kappa) \;\&\; \kappa \in j(X)$$

definierte Filter diese Eigenschaften hat. Wir werden dies später in einer leicht veränderten Situation nachrechnen (siehe Beweis von Satz 2.3.3).
Diese Bemerkungen führen zum folgenden Satz:

Satz 2.1.36 Es ist gleichwertig:

(1) κ ist meßbar

(2) Es gibt eine elementare Einbettung $j : \mathbf{V} \to \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$ ein inneres Modell und κ der kritische Punkt von j ist.

Beweis: Die Bemerkungen von oben liefern die Beweisskizze für diesen Satz. Für Einzelheiten vergleiche man [KANAMORI, 1994, Proposition 5.4 und Theorem 5.6].

□

Mit dieser Charakterisierung meßbarer Zahlen ist es uns möglich, ein berühmtes Resultat von Dana Scott zu beweisen, das besagt, daß es in der konstruktiblen Hierarchie $\mathbf{L}$ keine meßbaren Kardinalzahlen gibt:

Satz 2.1.37 Wenn $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ist, dann gibt es keine meßbaren Kardinalzahlen.

Beweis:
Angenommen, es gäbe doch meßbare Kardinalzahlen in $\mathbf{L}$ und κ sei die kleinste. Dann gibt es nach Satz 2.1.36 ein inneres Modell $\mathcal{M}$ und eine elementare Einbettung $j : \mathbf{L} \to \mathcal{M}$ mit kritischem Punkt κ. Da $\mathcal{M}$ ein inneres Modell ist, es aber unter der Voraussetzung $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ nur ein inneres Modell, nämlich $\mathbf{L}$, gibt ($\mathbf{L}$ ist nach Satz 2.1.11 das kleinste innere Modell), gilt $\mathcal{M} = \mathbf{L}$, d.h. j ist eine elementare Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$. Wegen der Elementarität von j ist dann $j(\kappa)$ die kleinste meßbare Kardinalzahl in $\mathbf{L}$, im Widerspruch zu $j(\kappa) > \kappa$.

□

[8] Dies nennt man Scotts Trick. Vergleiche [JECH, 1978, §28, Seite 308].

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang zwischen den beiden bisher behandelten großen Kardinalzahl–Axiomen herstellen.

Satz 2.1.38 Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Dann gilt:

(1) κ ist regulär.

(2) Setzt man zusätzlich AC voraus, so ist κ sogar stark unerreichbar.

Beweis:
(1) κ ist regulär:
Sei $\mathcal{U}$ ein κ–vollständiger, freier Ultrafilter auf κ. Angenommen, κ ist singulär.
Dann gibt es ein $\gamma < \kappa$ und für alle $\alpha < \gamma$ ein $\nu_\alpha < \kappa$, so daß $\kappa = \bigcup_{\alpha<\gamma} \nu_\alpha$ ist. Nach Proposition 2.1.18 gilt $\nu_\alpha \notin \mathcal{U}$ für alle $\alpha < \gamma$. Somit ist $\kappa \notin \mathcal{U}$ nach Proposition 2.1.16, was jedoch den Filtereigenschaften widerspricht.

(2) Unter AC ist κ ein starker Limes, d.h. $2^\lambda < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$:
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$. Wir wählen mit AC eine κ–mächtige Teilmenge S von 2^λ. Die Elemente von S sind Funktionen von λ in 2. Sei $\mathcal{U}^*$ ein κ–vollständiger, freier Ultrafilter auf S. Dann definieren wir für alle $\alpha < \lambda$ Mengen $X_{\alpha,0}$ und $X_{\alpha,1}$ durch

$$\begin{aligned} X_{\alpha,0} &:= \{f \in S; f(\alpha) = 0\} \text{ und} \\ X_{\alpha,1} &:= \{f \in S; f(\alpha) = 1\}. \end{aligned}$$

Es gilt nach Definition $X_{\alpha,0} \cap X_{\alpha,1} = \emptyset$ und $X_{\alpha,0} \cup X_{\alpha,1} = S$ für alle $\alpha < \lambda$. Da $\mathcal{U}^*$ ein Ultrafilter ist, liegt für alle $\alpha < \lambda$ entweder $X_{\alpha,0}$ oder $X_{\alpha,1}$ in $\mathcal{U}^*$.
Sei

$$\varepsilon_\alpha := \begin{cases} 0, & \text{falls } X_{\alpha,0} \in \mathcal{U}^* \\ 1, & \text{falls } X_{\alpha,1} \in \mathcal{U}^* \end{cases}$$

Dann gilt $X := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_{\alpha,\varepsilon_\alpha} \in \mathcal{U}^*$. Aber X enthält nur ein einziges Element, nämlich genau die Funktion, die an der Stelle α den Wert ε_α annimmt. Dies führt jedoch nach Proposition 2.1.18 zu einem Widerspruch, da $\mathcal{U}^*$ ein κ–vollständiger Filter ist.

□

Mit dem Axiom der abhängigen Auswahlen DC kann sogar gezeigt werden, daß auf jeder meßbaren Kardinalzahl κ ein normaler, κ–vollständiger Ultrafilter existiert. Wir skizzieren hier nur die Beweisidee für diesen Satz.

Satz 2.1.39 (Mit ZSF+ DC)
Wenn κ eine meßbare Kardinalzahl ist, dann gibt es einen normalen, κ–vollständigen, freien Ultrafilter auf κ .

Beweisskizze:
Da κ meßbar ist, existiert ein κ–vollständiger Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ . Die Idee besteht nun darin, ein $f \in \kappa^\kappa$ zu finden, das κ in der fundierten Ultrapotenz $\mathbf{V}^\kappa/\mathcal{U}$ repräsentiert. An dieser Stelle wird DC benötigt. Dann wird gezeigt, daß der Bildfilter $f_*\mathcal{U}$ auf κ normal ist.
Für einen detaillierten Beweis verweisen wir auf [SCHATZ, 1998, Korollar 5.13].

□

Eine Anwendung von Satz 2.1.39 ist die Tatsache, daß schwächere große Kardinalzahleigenschaften (z.B. Unerreichbarkeit) für $\mathcal{U}$–fast alle Zahlen unterhalb von κ zutreffen. Für Einzelheiten verweisen wir auf [KANAMORI, 1994, Seite 54ff.].

2.2 Sharps

Der Begriff "große Kardinalzahl" scheint vorauszusetzen, daß die Beschreibung der großen Kardinalzahl–Axiome stets vom Typ $\exists\kappa(\Phi(\kappa))$ ist, wobei $\Phi(v_0)$ sagt, daß v_0 in irgendeinem Sinne groß ist. Es gibt aber in der Hierarchie der großen Kardinalzahlen einige Axiome, die sogenannten Sharp-Axiome, die überhaupt nicht unmittelbar von Kardinalzahlen sprechen. Stattdessen postulieren diese Axiome die Existenz einer einzigen reellen Zahl. In diesem Abschnitt werden wir eine kurze Einführung in die Theorie der Sharps geben und zeigen, warum die Sharp–Axiome es dennoch verdient haben, große Kardinalzahl–Axiome genannt zu werden.
Die Bezeichnung "Sharp–Axiome" stammt von Silver und Solovay. Sie kommt daher, daß man im einfachsten Fall diese Axiome mit einer Funktion $x \longmapsto x^{\#}$ in Verbindung bringen kann, wobei das Symbol # das Notenkreuz (englisch "sharp") ist[9].
Sharp–Axiome stehen in engem Zusammenhang mit nichttrivialen elementaren Einbettungen $j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ für innere Modelle $\mathcal{M}$ von ZSF+AC. Existieren solche Einbettungen, so folgt $\mathbf{V} \neq \mathcal{M}$ nach einem Theorem von Kunen, welches besagt, daß die Identität die einzige elementare Einbettung von $\mathbf{V}$ in $\mathbf{V}$ ist (vergleiche [KANAMORI, 1994, Theorem 23.12]). Somit geben Sharps eine Methode, Aussagen vom Typ $\mathbf{V} \neq \mathcal{M}$ zu konkretisieren.
Das hier betrachtete Sharp–Axiom fordert die Existenz einer nichttrivialen elementaren Einbettung $j : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$. Eine Konsequenz dieses Axioms ist, daß sich $\mathbf{V}$ und $\mathbf{L}$ sehr stark unterscheiden. Erstmals wurde dies von Silver in seiner Dissertation (vergleiche [SILVER, 1966]) untersucht. Es gibt mehrere, äquivalente Möglichkeiten, Sharps zu definieren. Wir wählen hier die klassische (Silver–) Darstellung für Sharp–Axiome, weil sie uns die Möglichkeit gibt, Sharps durch erststufige Formeln zu beschreiben.
Silvers Definition baut auf dem Begriff der Ununterscheidbarkeit auf, der von Ehrenfeucht und Mostowski entwickelt wurde und viele Anwendungen in der Modelltheorie hat[10].

Definition 2.2.1 Sei $\mathcal{M}$ ein Modell mit Grundmenge M und $X \subseteq M$. Sei $<$ eine lineare Ordnung von X, wobei $<$ nicht notwendigerweise eine Relation von $\mathcal{M}$ sein muß.
Dann heißt $\langle X, < \rangle$ eine **Menge von ununterscheidbaren Elementen** für $\mathcal{M}$, wenn für jede natürliche Zahl n, jede Formel φ mit n Variablen und alle Folgen $\langle x_1, ..., x_n \rangle$, $\langle y_1, ..., y_n \rangle \in X^n$ mit $x_1 < ... < x_n$ und $y_1 < ... < y_n$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1, ..., x_n] \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[y_1, ..., y_n].$$

Wir arbeiten im folgenden mit der Sprache $\mathcal{L}^*_E(\dot{P})$ mit abzählbar vielen Konstantensymbolen $\dot{c}_n$. Für eine Theorie $T \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*_E(\dot{P}))$ sei T^- die Menge aller Sätze, in denen kein $\dot{c}_n$ auftritt. Wir halten eine Aufzählung $\{\varphi_n;\ n \in \omega\}$ aller Formeln der Sprache $\mathcal{L}^*_E(\dot{P})$ fest.

Theorien können durch reelle Zahlen kodiert werden. Ist $T \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*_E(\dot{P})) \subseteq \{\varphi_n;\ n \in \omega\}$ eine Theorie, so definieren wir eine reelle Zahl $x_T \in 2^\omega$ durch

$$x_T(n) := 1 \iff \varphi_n \in T.$$

Umgekehrt kann jeder reellen Zahl x eine Menge T_x von Formeln zugeordnet werden: Wir definieren T_x durch

$$\varphi_n \in T_x \iff x(n) = 1.$$

[9] Streng genommen gibt es einen Unterschied zwischen # (englisch "pound") und $\sharp$ (englisch "sharp"). Jedoch wird in der Mengenlehre aus unbekannten Gründen meist das erste Symbol verwendet, vergleiche [MARTIN, noch nicht erschienen, Abschnitt 3.4].

[10] Man vergleiche dazu [MORLEY, 1965a], [MORLEY, 1965b], [CHANG und KEISLER, 1990, Abschnitt 3.3] und [EHRENFEUCHT und MOSTOWSKI, 1956].

Natürlich kodiert nicht jede reelle Zahl eine Theorie.

Wir betrachten nun eine Theorie T, die den Satz σ_1 aus Satz 2.1.8 enthält. Sei $\psi_n(v_0)$ für jede natürliche Zahl n diejenige Formel, die die Zahl n beschreibt. In jedem Modell $\mathcal{M}$ von T liegt für jedes n genau eine Menge x mit $\mathcal{M} \models \psi_n[x]$, da σ_1 und damit auch das Extensionalitätsaxiom in T enthalten sind. Wir definieren eine reelle Zahl a_T durch

$$a_T = \{\langle n, m\rangle;\ T \vdash \exists x\ \exists y(\psi_n(x)\ \wedge\ \psi_m(y)\ \wedge\ \dot{P}(\langle x, y\rangle))\}.$$

Da σ_1 beschreibt, daß das Prädikat $\dot{P}$ durch eine reelle Zahl interpretiert wird, gibt es für jede natürliche Zahl n genau eine natürliche Zahl m so daß "$\exists x\ \exists y(\psi_n(x)\ \wedge\ \psi_m(y)\ \wedge\ \dot{P}(\langle x, y\rangle))$" in T liegt, und es ist hiermit eine reelle Zahl a_T definiert. Mit diesen Bezeichnungen kann das folgende Lemma formuliert werden:

Lemma 2.2.2 Sei T eine konsistente Theorie, die σ_1 enthält. Dann gibt es für jede Ordinalzahl α ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Modell $\mathcal{M}(x_T, \alpha) = \langle M(x_T, \alpha), E, a_T\rangle$ von T^- mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es gibt eine Menge $Y \subseteq \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x_T,\alpha)}$ von ununterscheidbaren Elementen für $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$.

(2) $\langle \mathcal{M}(x_T, \alpha), \langle y_k;\ k \in \omega\rangle\rangle \models T$, wobei $\langle y_k;\ k \in \omega\rangle$ eine beliebige aufsteigende Folge von ω Elementen aus Y sei.

(3) Y ist vom Ordnungstyp α.

(4) $\mathcal{H}^{\mathcal{M}(x_T,\alpha)}(Y \cup \{a_T\}) = \mathcal{M}(x_T, \alpha)$.

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Lemma 9.4].

□

Für $\alpha < \aleph_1$ ist das Modell $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ wegen Eigenschaft (4) aus Lemma 2.2.2 abzählbar. Silvers Idee verwendet Mengen von ununterscheidbaren Elementen für Anfangssegmente von $\mathbf{L}[a]$, wobei a eine reelle Zahl ist. Wir definieren:

Definition 2.2.3 Sei a eine reelle Zahl, $T \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*_E(\dot{P}))$ eine Theorie. x_T heißt **a-Ehrenfeucht-Mostowski-Blaupause**, falls es eine Limesordinalzahl $\delta > \omega$ und eine Familie $\langle \nu_k;\ k \in \omega\rangle \subseteq \delta$ von ununterscheidbaren Elementen von $\mathbf{L}_\delta[a]$ gibt, so daß

$$T = \mathrm{Th}(\langle \mathbf{L}_\delta[a], \in, a, \langle \nu_k;\ k \in \omega\rangle\rangle)$$

gilt[11].

Man beachte, daß für a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupausen x_T die zugehörige Theorie T nach Definition immer konsistent ist und σ_1 enthält. Die in Lemma 2.2.2 betrachteten Modelle $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ existieren also.
Offensichtlich ist der Begriff der a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause relativ eng mit dem Modell $\mathbf{L}[a]$ verbunden, allerdings noch nicht eng genug, denn die Möglichkeit von nichtfundierten pathologischen Modellen von $\mathbf{V} = \mathbf{L}_\delta[a]$ ist noch nicht ausgeschlossen. Daher fordern wir zusätzlich die Fundiertheit der Modelle $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$:

Definition 2.2.4 Sei x_T eine a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause.

[11] Im Ingenieurwesen war die Blaupause bis zur Einführung der modernen Kopiermaschinen das Negativ, von dem die Abzüge der an die Konstrukteure ausgegebenen Pläne gemacht wurden. Ebenso ist eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause eine Konstruktionsanweisung für die Theorie des zugrundeliegenden $\mathbf{L}_\delta$.

(a) x_T heißt **fundiert**, wenn für alle $\alpha < \aleph_1$ das Modell $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ fundiert ist.

(b) x_T heißt **bemerkenswert**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

   (1) x_T ist fundiert.

   (2) Wenn t ein n–stelliger Skolemterm ist, dann enthält T den Satz "$t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{n-1}) \in \mathrm{Ord} \longrightarrow t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{n-1}) < \dot{c}_n$".

   (3) Wenn t ein $(m+n+1)$–stelliger Skolemterm ist, dann enthält T den Satz "$t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m+n}) < \dot{c}_m \rightarrow t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m+n}) = t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m-1}, \dot{c}_{m+n+1}, ..., \dot{c}_{m+2n+1})$".

Die zusätzlichen Eigenschaften (2) und (3) in der Definition 2.2.4 werden für die Eindeutigkeit benötigt. Die eigentliche mengentheoretische Stärke steckt in Eigenschaft (1).

Für eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause x_T kann schon aus der Fundiertheit der Modelle $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ für konfinal viele $\alpha < \aleph_1$ auf die Fundiertheit aller Modelle $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ für alle $\alpha < \aleph_1$ geschlossen werden:

Hilfssatz 2.2.5 Sei x_T eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause, $\beta < \alpha < \aleph_1$, und das Modell $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ sei fundiert. Dann ist auch $\mathcal{M}(x_T, \beta)$ fundiert.

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß das Modell $\mathcal{M}(x_T, \beta)$ ein elementares Submodell von $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ ist, denn da es in $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ keine absteigenden Ketten gibt, gibt es dann auch keine absteigenden Ketten in $\mathcal{M}(x_T, \beta)$, und das Modell $\mathcal{M}(x_T, \beta)$ ist ebenfalls fundiert. Wir werden also eine elementare Einbettung j von $\mathcal{M}(x_T, \beta)$ in $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ angeben.
Seien dazu $Y^\alpha := \langle y^\alpha_\nu;\ \nu < \alpha \rangle$ die Menge von ununterscheidbaren Elementen für $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ und $Y^\beta := \langle y^\beta_\nu;\ \nu < \beta \rangle$ die Menge von ununterscheidbaren Elementen für $\mathcal{M}(x_T, \beta)$. Da $\mathcal{H}^{\mathcal{M}(x_T, \beta)}(Y^\beta \cup \{a_T\}) = \mathcal{M}(x_T, \beta)$ gilt, genügt es, die Bilder der Elemente y^β_ν und a_T bezüglich der elementaren Einbettung j anzugeben. Wir setzen $j(y^\beta_\nu) := y^\alpha_\nu$ für alle $\nu < \beta$ und $j(a_T) = a_T$. Diese Abbildung kann in eindeutiger Weise zu einer elementaren Einbettung von $\mathcal{M}(x_T, \beta)$ in $\mathcal{M}(x_T, \alpha)$ fortgesetzt werden. Die Behauptung ist somit bewiesen.

□

Der folgende Satz besagt, daß es für jede reelle Zahl a höchstens eine bemerkenswerte a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause gibt:

Satz 2.2.6 Sei a eine reelle Zahl. Wenn es eine bemerkenswerte a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause gibt, so ist sie eindeutig.

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Lemma 9.12].

□

Definition 2.2.7 Sei a eine reelle Zahl, so daß es eine bemerkenswerte a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause gibt.

(a) Wir bezeichnen diese (nach Satz 2.2.6 eindeutig bestimmte) a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause mit $a^\#$.

(b) Wir nennen eine reelle Zahl $x \in \omega^\omega$ ein **Sharp**, wenn es ein $a \in \omega^\omega$ gibt mit $x = a^\#$.

In dieser Arbeit brauchen wir lediglich einige Eigenschaften von Sharps, die wir nun ohne Beweis angeben:

Satz 2.2.8 Wenn $a^{\#}$ existiert, dann gibt es eine Klasse $I_a := \{\iota^a_\alpha;\ \alpha \in \mathrm{Ord}\} \subseteq \mathrm{Ord}$ von ununterscheidbaren Ordinalzahlen für $\mathbf{L}[a]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für jede überabzählbare, reguläre Kardinalzahl κ ist $I_a \cap \kappa$ club in κ.

(2) $\mathcal{M}(a^{\#}, \alpha) \cong \mathbf{L}_{\iota^a_\alpha}[a]$

(3) Für alle Ordinalzahlen α ist die Identität eine elementare Einbettung zwischen $\mathbf{L}_{\iota^a_\alpha}[a]$ und $\mathbf{L}[a]$.

(4) $\mathrm{Card}^{\mathbf{V}} \subseteq I_a$.

Die Elemente von I_a nennen wir **Silversche ununterscheidbare Elemente**.

Beweis: Für einen Beweis verweisen wir auf die Literatur; siehe [KANAMORI, 1994, Lemma 9.11 und Lemma 9.13] für die Eigenschaften (2) und (3), [JECH, 1978, Theorem 72] für die Eigenschaften (1) und (4).

□

Die Existenz von $a^{\#}$ hat große Konsequenzen für das Mengenuniversum: Insbesondere gilt $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}[a]$. Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.2.8 ist, daß sich $\mathbf{V}$ und $\mathbf{L}[a]$ sogar sehr unterschiedlich verhalten.

Satz 2.2.9 Wenn $a^{\#}$ existiert, dann ist jede $\mathbf{V}$–Kardinalzahl unerreichbar in $\mathbf{L}[a]$.

Beweis: Es gilt $\mathbf{V} \models$ "$\aleph_1$ ist regulär". Da die Eigenschaft, regulär zu sein, nach unten absolut ist (vergleiche [DEVLIN, 1984, Lemma 9.4]), folgt daher $\mathbf{L}[a] \models$ "$\aleph_1^{\mathbf{V}}$ ist regulär". Außerdem gilt $\mathbf{V} \models$ "$\aleph_\omega$ ist eine Limeskardinalzahl". Da auch diese Eigenschaft nach [DEVLIN, 1984, Lemma 9.4] nach unten absolut ist, gilt $\mathbf{L}[a] \models$ "$\aleph_\omega^{\mathbf{V}}$ ist eine Limeskardinalzahl". Da jedes Element aus $\mathrm{Card}^{\mathbf{V}}$ nach Satz 2.2.8 zu der Klasse von Silverschen ununterscheidbaren Elementen für $\mathbf{L}[a]$ gehört, folgt $\mathbf{L}[a] \models$ "κ ist eine reguläre Limeskardinalzahl" für alle $\mathbf{V}$–Kardinalzahlen κ, also auch $\mathbf{L}[a] \models$ "κ ist unerreichbar".

□

In Abbildung 2.1 stellen wir die Zusammenhänge der bisher betrachteten großen Kardinalzahlen dar. Wir erwähnen dazu, daß die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die Existenz von $a^{\#}$ für jede reelle Zahl a impliziert[12].

Wie schon erwähnt, benutzt eine andere Sichtweise der Sharps elementare Einbettungen (vergleiche [KANAMORI, 1994, §21]). Wir werden diese Sichtweise in dieser Arbeit nur einmal verwenden und nennen daher nur ohne Beweis den folgenden Satz:

Satz 2.2.10 Es sind äquivalent:

(1) $0^{\#}$ existiert

(2) Es gibt Ordinalzahlen α und β, so daß eine elementare Einbettung $j : \mathbf{L}_\alpha \to \mathbf{L}_\beta$ existiert mit $\mathrm{krit}(j) < |\alpha|$.

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Theorem 21.1].

□

[12] Der Beweis verwendet den Satz von Rowbottom 2.4.15 und Satz 2.4.18.

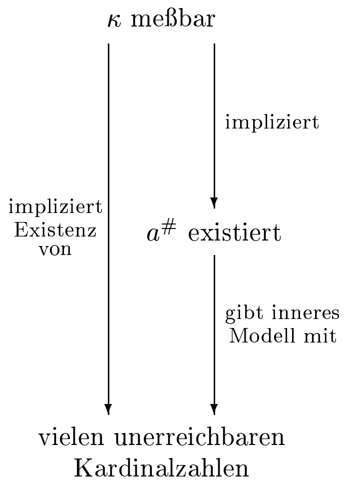

ABBILDUNG 2.1: Diagramm einiger großer Kardinalzahlen.

Wir wollen die Bemerkungen über Sharps mit einem Hilfssatz abschließen, der in Abschnitt 3.4 benötigt wird. Er besagt, daß Sharps durch eine erststufige Formel beschrieben werden können.
Zunächst wollen wir zeigen, daß die Aussage "x ist eine a–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause" arithmetisch beschrieben werden kann:

Die Formel $S(x)$ sei wie folgt definiert (vergleiche auch [DEVLIN, 1984, Lemma 3.1]):

$S(x) \Longleftrightarrow$ $x \in 2^{\omega}$ &
$\forall^0 n$ ($\varphi_n \in T_x \longrightarrow \varphi_n \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*_E(\dot{P}))$ &
$\forall^0 n\, \forall^0 m$ ($\varphi_n \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*_E(\dot{P})) \wedge \varphi_n = \neg\varphi_m \longrightarrow (\varphi_n \in T_x \longleftrightarrow \varphi_m \notin T_x))$ &
T_x enthält die folgenden Sätze:

(1) Den Satz σ_1 aus Satz 2.1.8

(2) $\forall^0 n\, \forall^0 m\, \forall^0 \langle i_1, ..., i_m\rangle, \langle j_1, ..., j_m\rangle\, (m = k(n) \longrightarrow (\varphi_n(\dot{c}_{i_1}, ..., \dot{c}_{i_m}) \longleftrightarrow \varphi_n(\dot{c}_{j_1}, ..., \dot{c}_{j_m})))$

(3) $\forall^0 t\ \ \forall^0 n(t$ ist n–stelliger Skolemterm $\longrightarrow (t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{n-1}) \in \mathrm{Ord} \longrightarrow t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{n-1}) < \dot{c}_n))$

(4) $\forall^0 t\, \forall^0 n\, \forall^0 m$ (t ist $(m+n+1)$–stelliger Skolemterm $\longrightarrow$ $(t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m+n}) < \dot{c}_m \longrightarrow t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m+n}) = t(\dot{c}_0, ..., \dot{c}_{m-1}, \dot{c}_{m+n+1}, ..., \dot{c}_{m+2n+1})))$

Offensichtlich ist $S(x)$ arithmetisch.

Sei $W(x)$ genau dann erfüllt, wenn die Modelle $\mathcal{M}(x, \alpha)$ für alle $\alpha < \aleph_1$ fundiert sind. Es kann nun gezeigt werden:

Lemma 2.2.11 Sei x eine reelle Zahl. Dann gilt $S(x) \wedge W(x)$ genau dann, wenn x ein Sharp ist.

Beweis: Die Rückrichtung ist offensichtlich. Wir zeigen nun die andere Richtung: Wenn $S(x)$ erfüllt ist, dann ist T_x eine konsistente Theorie. T_x enthält außerdem den Satz

σ_1 aus Satz 2.1.8. Daher besitzt T_x^- nach Lemma 2.2.2 für alle Ordinalzahlen α Modelle $\mathcal{M}(x,\alpha)$ mit den dort angegebenen Eigenschaften. Insbesondere existiert ein Modell $\mathcal{M}(x,\omega)$ mit den Eigenschaften aus Lemma 2.2.2. Also gibt es eine Folge $\langle y_k;\ k \in \omega\rangle$ von ununterscheidbaren Elementen in $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\omega)}$, so daß T_x die Theorie des Modells $\langle \mathcal{M}(x,\omega), \langle y_k;\ k \in \omega\rangle\rangle$ ist. Da das Modell $\mathcal{M}(x,\omega)$ wegen $W(x)$ fundiert ist, gibt es nach Satz 2.1.9 ein dazu isomorphes, transitives Modell $\langle N, \in, a_{T_x}, \langle \nu_k;\ k \in \omega\rangle\rangle$, wobei $\langle \nu_k;\ k \in \omega\rangle$ eine Folge von ununterscheidbaren Ordinalzahlen für N ist. Da jedoch σ_1 in der Theorie T_x und damit auch in T_x^- enthalten ist, gilt $N = \mathbf{L}_\delta[a_{T_x}]$ für eine Limeszahl δ nach Satz 2.1.8. Also ist T_x die Theorie für das Modell $\langle \mathbf{L}_\delta[a_{T_x}], \in, a_{T_x}, \langle \nu_k;\ k \in \omega\rangle\rangle$. Dies bedeutet jedoch, daß x eine a_{T_x}–Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause ist. Zusätzlich sind durch die Formel $S(x)$ die Eigenschaften (2) und (3) aus Definition 2.2.4 beschrieben, und wegen $W(x)$ ist x fundiert. Also ist $x = a_{T_x}^{\#}$.

□

2.3 Jónsson–Algebren

Wie schon erwähnt, wird es das Hauptergebnis dieser Arbeit sein, zu zeigen, daß die Kardinalzahlen $\aleph_n$ eine gewisse große Kardinalzahl–Eigenschaft, die sogenannte Jónsson–Eigenschaft, besitzen. In diesem Abschnitt werden wir motivieren, weshalb es interessant ist, diese Eigenschaft zu betrachten.
Es geht um die Frage, für welche Kardinalzahlen κ jede Algebra der Mächtigkeit κ eine echte Unteralgebra derselben Kardinalität besitzt.
Der Ursprung dieser Frage liegt in der Gruppentheorie. Sie wurde von Otto Yul'evich Schmidt, einem großen Gruppentheoretiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, in einer sehr speziellen Form gestellt. O. Yu. Schmidt war eine bedeutende Persönlichkeit. Neben seiner Professur in Moskau leitete er auch verschiedene Expeditionen in die Arktis und engagierte sich in der Politik (siehe [Chernikov, 1971b]). In seinen mathematischen Arbeiten beschäftigte er sich unter anderem mit unendlichen Gruppen, deren Untergruppen alle eine fest vorgegebene Eigenschaft besitzen. Naheliegend war daher sein Interesse, unendliche Gruppen mit ausschließlich endlichen Untergruppen zu klassifizieren. Bislang war nur ein einziger Typ solcher Gruppen bekannt, nämlich die quasizyklischen Gruppen, die wir im Unterabschnitt über Jónsson–Gruppen einführen werden. Schmidt stellte nun im Jahre 1938 die Frage auf, ob die quasizyklischen Gruppen die einzigen unendlichen Gruppen sind, deren Untergruppen alle endlich sind.
Dieses Problem stieß auf großes Interesse, da viele Algebraiker zu dieser Zeit Gruppen untersuchten, die eine Minimalitätsbedingung erfüllen (jede absteigende Folge von Untergruppen ist endlich). Unendliche Gruppen, deren Untergruppen alle endlich sind, gehören insbesondere zu dieser Klasse von Gruppen.
Ergebnisse im Zusammenhang mit Schmidts Problem werden wir im Unterabschnitt über Jónsson–Gruppen vorstellen, weitere Bemerkungen darüber finden sich in [Chernikov, 1971b] und [Chernikov, 1971a].
Schmidts Frage kann in der folgenden Weise auf beliebige unendliche Kardinalzahlen verallgemeinert werden: Besitzt jede Gruppe der Kardinalität κ eine echte Untergruppe derselben Kardinalität? Eine noch stärkere Verallgemeinerung formulierte Bjarni Jónsson, ein Student von Tarski, im Jahre 1962. Er stellte die Frage für beliebige Algebren: Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Besitzt jede Algebra der Kardinalität κ eine echte Subalgebra derselben Mächtigkeit? Diese Frage ist modelltheoretisch von besonderem Interesse, da sie sich natürlicherweise aus dem Satz von Löwenheim–Skolem 2.1.6 ergibt. Demnach ist bekannt, daß jede Algebra einer abzählbaren Sprache echte Unteralgebren von beliebiger kleinerer Mächtigkeit $\geq \aleph_0$ besitzt. Dieser Satz läßt gerade die Frage offen, ob auch immer echte Unteralgebren derselben Kardinalität existieren. Das Problem von Jónsson führte zur Definition von Jónsson–Algebren:

Definition 2.3.1 Eine Algebra heißt **Jónsson–Algebra**, wenn sie keine Subalgebra derselben Kardinalität besitzt.

Für uns interessant sind nur solche Algebren, die abzählbar viele endlichstellige Funktionen besitzen. Betrachtet man nämlich Algebren mit unendlichstelligen Funktionen, so läßt sich die Frage nach der Existenz von Strukturen beliebiger Kardinalität, die keine Substrukturen derselben Kardinalität besitzen, umfassend beantworten und ist daher in unserem Zusammenhang nicht von Interesse:

Satz 2.3.2 Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es eine Struktur $\langle A, f\rangle$ mit $|A| = \kappa$, wobei f eine ω–stellige Funktion ist, so daß $\langle A, f\rangle$ keine echte Substruktur der Kardinalität κ besitzt.

Beweis: Vergleiche [ERDŐS und HAJNAL, 1966].

□

Aus diesem Grund verstehen wir im folgenden unter einer Algebra immer eine Struktur, die höchstens abzählbar viele endlichstellige Funktionen besitzt. Wird der Begriff in einer allgemeineren Form verwendet, so kennzeichnen wir dies gesondert.
Schränkt man den Begriff der Algebra auf diese Weise ein, so ist die Frage von Jónsson, für welche Kardinalitäten Jónsson–Algebren existieren, nicht einfach zu beantworten. Viele Mathematiker beschäftigten sich mit diesem Problem. Das erste wichtige Ergebnis in diesem Zusammenhang wurde von Keisler und Rowbottom gezeigt, die ausnutzten, daß die Existenz einer Jónsson–Algebra äquivalent ist mit der Existenz einer beliebigen Struktur, die eine echte elementare Substruktur derselben Kardinalität besitzt:

Satz 2.3.3 Sei κ eine Kardinalzahl.
Dann ist äquivalent:

(1) Es gibt keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ.

(2) Jede Struktur einer abzählbaren Sprache, deren Grundmenge Kardinalität κ hat, besitzt eine echte elementare Substruktur mit einer κ–mächtigen Grundmenge.

Wir werden erst in Abschnitt 2.4 die Mittel haben, um dieses Resultat zu beweisen, da dafür Partitionseigenschaften benötigt werden (vergleiche Satz 2.4.10).
Mit Hilfe dieses Satzes können wir zeigen, daß es ein Modell von ZSF + AC gibt, in dem es Jónsson–Algebren beliebiger Kardinalität gibt:

Satz 2.3.4 (Keisler & Rowbottom)
Wenn $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, dann gibt es für alle Kardinalzahlen κ eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ.

Beweis:
Nach Satz 2.3.3 genügt es, eine Struktur zu finden, deren Grundmenge κ–mächtig ist, und die keine echte elementare Substruktur mit κ–mächtiger Grundmenge besitzt.
Wir werden zeigen, daß $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$ diese Eigenschaften besitzt: $\mathbf{L}_\kappa$ besitzt nach Proposition 2.1.7 Kardinalität κ. Wir müssen also nur noch zeigen, daß $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$ keine echte elementare Substruktur derselben Kardinalität besitzt. Dies beweisen wir durch Widerspruch: Angenommen, $\langle S, \in\rangle \subseteq \langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$ sei eine echte elementare Substruktur von $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$, wobei S κ–mächtig sei. Nach dem Kondensationslemma 2.1.10 gibt es eine Ordinalzahl γ und einen Isomorphismus $\pi : \langle S, \in\rangle \to \langle \mathbf{L}_\gamma, \in\rangle$, wobei $\mathbf{L}_\gamma$ die Mächtigkeit κ besitzt. Also gilt $\gamma \geq \kappa$.
Die elementare Einbettung $j := \mathrm{id} \circ \pi^{-1} : \mathbf{L}_\gamma \to \mathbf{L}_\kappa$ bildet Ordinalzahlen auf Ordinalzahlen ab, wobei $j(\alpha) \geq \alpha$ gilt für alle Ordinalzahlen α. Angenommen, es gilt $\gamma > \kappa$.

Dann ist $\kappa \in \mathbf{L}_\gamma$ und daher $\kappa \leq j(\kappa) \in \mathbf{L}_\kappa$, was nicht möglich ist. Somit folgt $\gamma \leq \kappa$. Insgesamt ist daher $\gamma = \kappa$.
Jedoch ist $j : \mathbf{L}_\kappa \to \mathbf{L}_\kappa$ nicht die identische Abbildung: Denn der Mostowski–Kollaps $\pi : \langle S, \in\rangle \to \langle \mathbf{L}_\gamma, \in\rangle = \langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$ ist nicht die Identität, da S eine echte Teilmenge von $\mathbf{L}_\kappa$ ist. Somit besitzt $j = \mathrm{id} \circ \pi^{-1}$ einen kritischen Punkt δ.
Wir definieren nun einen Filter $\mathcal{U}$ auf der Potenzmenge von δ wie folgt:

$$X \in \mathcal{U} \iff X \in \mathcal{P}(\delta) \ \&\ \delta \in j(X).$$

$\mathcal{U}$ ist ein freier, δ–vollständiger Ultrafilter auf δ:

(1) $\mathcal{U}$ ist ein Filter: $\emptyset \notin \mathcal{U}$, da $\delta \notin j(\emptyset) = \emptyset$.

$\delta \in \mathcal{U}$, denn $j(\delta) > \delta$, da δ der kritische Punkt von j ist.

Da die Teilmengenbeziehung durch eine Formel beschreibbar ist, gilt $j(X) \subseteq j(Y)$ für $X \subseteq Y$. Wenn also X eine Element von $\mathcal{U}$ und Y eine Obermenge von X ist, dann gilt $\delta \in j(X) \subseteq j(Y)$, d.h. $\delta \in j(Y)$. Somit ist auch jede Obermenge eines Elements aus $\mathcal{U}$ in $\mathcal{U}$ enthalten.

Ebenso sind endliche Schnitte von Mengen durch eine Formel beschreibbar. Wenn daher $X, Y \in \mathcal{U}$ sind, so gilt $\delta \in j(X) \cap j(Y) = j(X \cap Y)$, also auch $X \cap Y \in \mathcal{U}$.

(2) $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter: Komplementbildung ist durch eine Formel beschreibbar. Ist daher X eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\delta)$ und $Y = \delta - X$ das Komplement von X, so ist $j(Y) = j(\delta) - j(X)$. Wegen $\delta \in j(\delta)$ ist also δ entweder in $j(X)$ oder in $j(Y)$ enthalten. Also liegt genau eine der beiden Mengen X und Y in $\mathcal{U}$.

(3) $\mathcal{U}$ ist frei: Denn angenommen, für ein $\alpha < \delta$ sei $\{\alpha\} \in \mathcal{U}$. Dann $\delta \in j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$, da δ der kritische Punkt von j ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\alpha < \delta$.

(4) $\mathcal{U}$ ist δ–vollständig: Sei $\gamma < \delta$ und $X = \langle X_\alpha;\ \alpha < \gamma\rangle$ eine Folge in $\mathcal{U}$. Dann gilt $\delta \in j(X_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$. Es gibt eine Formel, die ausdrückt, daß X eine Folge der Länge γ und X_α für jedes $\alpha < \gamma$ das α–te Folgenglied von X ist. Daher, und weil der kritische Punkt von j größer als γ ist, folgt, daß $j(X)$ eine Folge der Länge γ ist, wobei $j(X_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$ das α–te Folgenglied von $j(X)$ ist.

Zusätzlich ist der Schnitt über eine Menge durch eine Formel beschreibbar, also $j(\bigcap X) = \bigcap j(X)$. Insgesamt folgt $\delta \in \bigcap_{\alpha<\gamma} j(X_\alpha) = \bigcap j(X) = j(\bigcap X) = j(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha)$, und somit $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$.

Also ist durch $\mathcal{U}$ ein freier δ–vollständiger Ultrafilter auf δ definiert, und daher ist δ eine meßbare Kardinalzahl in $\mathbf{L}$. Dies steht im Widerspruch zum Satz von Scott 2.1.37, der besagt, daß es in $\mathbf{L}$ keine meßbaren Kardinalzahlen gibt.

□

Allein unter Voraussetzung des Auswahlaxioms ist die Frage nach der Existenz von Jónsson–Algebren nicht in dieser Allgemeinheit beantwortet.
Auch unter weniger starken Voraussetzungen als $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ können jedoch einige Aussagen über die Existenz von Jónsson–Algebren getroffen werden. Der folgende Satz bietet eine Auswahl der Kriterien für die Existenz von Jónsson–Algebren auf Nachfolgerzahlen.

Satz 2.3.5 (Mit AC)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.

(1) Gibt es eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ, so gibt es auch eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ^+.

(2) Ist κ regulär, dann gibt es eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ^+.

(3) Gilt die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH, so gibt es eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ^+.

Beweis: Die Eigenschaften (1) und (3) werden wir in dieser Arbeit zeigen. Allerdings führen wir die Beweise erst an späterer Stelle, da sie die Sprechweise der Partitionseigenschaften verwenden:

(1) Satz 2.4.21 in Abschnitt 2.4.

(2) Dies ist ein Resultat von Jan Tryba und W. Hugh Woodin aus dem Jahre 1984, vergleiche [KANAMORI, 1994, Proposition 8.17].

(3) Satz 2.4.22 in Abschnitt 2.4, vergleiche auch [ERDŐS und HAJNAL, 1966].

□

Unter Voraussetzung der verallgemeinerten Kontinuumshypothese GCH können noch genauere Aussagen getroffen werden: Es gibt sogar eine lokalendliche Jónsson–Algebra mit einer einzigen, binären Funktion auf jeder Nachfolgerzahl. Dies bewiesen Erdős und Hajnal in [ERDŐS und HAJNAL, 1966].
Sehr einfach können mit dem Auswahlaxiom für alle natürlichen Zahlen n Jónsson–Algebren mit $\aleph_n$–mächtiger Grundmenge konstruiert werden. Dies wurde ebenfalls erstmals von Erdős und Hajnal im Jahre 1966 gezeigt. Wir wollen hier einen einfachen Beweis angeben. Ein weiterer Beweis ergibt sich aus Satz 2.3.5 (2) zusammen mit Proposition 2.4.20.
Zunächst zeigen wir, daß es unter der Voraussetzung, daß eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ existiert, auch Jónsson–Algebren mit beliebiger κ–mächtiger Grundmenge gibt. Wir beweisen dies nur für einen Spezialfall, der in Satz 2.3.7 von Bedeutung sein wird.

Hilfssatz 2.3.6 Sei κ eine Kardinalzahl, A eine Menge der Mächtigkeit κ und $\langle A, f\rangle$ eine Jónsson–Algebra mit einer n–stelligen Funktion f, wobei n eine natürliche Zahl sei. Dann gibt es für jede κ–mächtige Menge B eine n–stellige Funktion g, so daß $\langle B, g\rangle$ eine Jónsson–Algebra ist.

Beweis: Durch Übertragung von f auf B mit Hilfe der Bijektion von A auf B erhält man eine Funktion $g : B^n \to B$. Dann ist $\langle B, g\rangle$ offensichtlich eine Jónsson–Algebra.

□

Satz 2.3.7 (Mit AC)
Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_n$.

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n. Für jede natürliche Zahl wird eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_n$ mit einer $(n+1)$–stelligen Funktion konstruiert.

Die Algebra $\langle \aleph_0, f\rangle$, wobei f jede natürliche Zahl $n > 0$ auf ihren Vorgänger $n-1$ und 0 auf sich selbst abbildet, ist eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_0$. Denn jede echte, unendliche Teilmenge von $\aleph_0$ besitzt ein Element, dessen Vorgänger nicht in dieser Menge liegt. Somit kann keine echte, unendliche Teilmenge von $\aleph_0$ bezüglich f abgeschlossen sein. Dies bedeutet, daß $\langle \aleph_0, f\rangle$ keine echte Subalgebra derselben Kardinalität $\aleph_0$ besitzt.

Nun würde die Behauptung mit Satz 2.3.5 (1) folgen. Dennoch führen wir den Beweis hier durch, um die genaue Struktur der Jónsson–Algebren auf $\aleph_n$ zu beleuchten.

Existiert eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_n$ mit einer $(n+1)$–stelligen Funktion, so kann daraus eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_{n+1}$ mit einer $(n+2)$–stelligen Funktion konstruiert werden. Hierbei kommt Hilfssatz 2.3.6 zum Einsatz. Mit Hilfe des Auswahlaxioms, das eine unerläßliche Voraussetzung dieses Satzes ist, wählen wir für alle Ordinalzahlen α der Mächtigkeit $\aleph_n$ eine Jónsson–Algebra $\langle \alpha, f_\alpha \rangle$, wobei f_α eine $(n+1)$–stellige Funktion ist. Solche Algebren gibt es nach Induktionsvoraussetzung und Hilfssatz 2.3.6.
Nun definieren wir eine $(n+2)$–stellige Funktion f auf $\aleph_{n+1}$: Sind Zahlen $\alpha_0 < ... < \alpha_{n+1} < \aleph_{n+1}$ gegeben, so sei

$$f(\alpha_0, ..., \alpha_{n+1}) := \begin{cases} f_{\alpha_{n+1}}(\alpha_0, ..., \alpha_n) & \text{falls } \alpha_{n+1} \geq \aleph_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir werden zeigen, daß die so definierte Algebra $\langle \aleph_{n+1}, f \rangle$ eine Jónsson–Algebra ist, d.h. daß für jedes $M \subseteq \aleph_{n+1}$ der Mächtigkeit $\aleph_{n+1}$ die von M erzeugte Unteralgebra $\langle A(M), f \restriction A(M)^{n+2} \rangle$ von $\langle \aleph_{n+1}, f \rangle$ ganz $\aleph_{n+1}$ als Grundmenge besitzt. Sei also M eine $\aleph_{n+1}$–mächtige Teilmenge von $\aleph_{n+1}$. Sei weiter β ein beliebiges Element von $\aleph_{n+1}$. Zu zeigen ist, daß β auch ein Element von $A(M)$ ist.
Ist μ das Supremum der ersten $\aleph_n$ Elemente von M, so ist $\aleph_n \leq \mu < \aleph_{n+1}$, da M Mächtigkeit $\aleph_{n+1}$ besitzt und die ersten $\aleph_n$ Elemente von M somit nicht konfinal in $\aleph_{n+1}$ liegen können, weil $\aleph_{n+1}$ mit AC regulär ist. Somit liegt auch das Maximum von β und μ zwischen $\aleph_n$ und $\aleph_{n+1}$. Da M als $\aleph_{n+1}$–mächtige Menge konfinal in $\aleph_{n+1}$ liegt, gibt es somit ein Element in M, welches größer ist als β und μ. Sei α ein solches Element. Wir betrachten nun die Algebra $\langle \alpha, f_\alpha \rangle$.
Bezeichnen wir mit $A_\alpha(M \cap \alpha)$ die Grundmenge der von $M \cap \alpha$ erzeugten Unteralgebra von $\langle \alpha, f_\alpha \rangle$, so gilt $A_\alpha(M \cap \alpha) \subseteq A(M)$:
Um dies zu zeigen, definieren wir rekursiv für alle $k \in \omega$ Mengen M_k durch

$$\begin{aligned} M_0 &:= M \quad \text{und} \\ M_k &:= \bigcup_{j<k} M_j \cup f\text{"}[M_{k-1}]^{n+2}. \end{aligned}$$

Ebenso seien Mengen M_k^α durch

$$\begin{aligned} M_0^\alpha &:= M \cap \alpha \quad \text{und} \\ M_k^\alpha &:= \bigcup_{j<k} M_j^\alpha \cup f_\alpha\text{"}[M_{k-1}^\alpha]^{n+1} \end{aligned}$$

definiert. Nach Definition von f gilt $f_\alpha\text{"}[N \cap \alpha]^{n+1} \subseteq f\text{"}[N \cup \{\alpha\}]^{n+2}$ für jede Teilmenge N von $\aleph_{n+1}$. Wegen $\alpha \in M$ folgt also $f_\alpha\text{"}[M \cap \alpha]^{n+1} \subseteq f\text{"}[M]^{n+2}$, und weiter durch Induktion nach k auch $f_\alpha\text{"}[M_k^\alpha]^{n+1} \subseteq f\text{"}[M_k]^{n+2}$ für alle $k \in \omega$. Wegen $A_\alpha(M \cap \alpha) = \bigcup_{k \in \omega} M_k^\alpha$ und $A(M) = \bigcup_{k \in \omega} M_k$ folgt daher $A_\alpha(M \cap \alpha) \subseteq A(M)$.
Da $\langle \alpha, f_\alpha \rangle$ eine Jónsson–Algebra ist, hat sie keine echten Unteralgebren der Kardinalität $\aleph_n$. Nach Wahl von α ist $|M \cap \alpha| = \aleph_n$. Also ist $A_\alpha(M \cap \alpha) = \alpha$. Wegen $\beta < \alpha$ ist also $\beta \in A_\alpha(M \cap \alpha)$, also auch $\beta \in A(M)$.
Da $\beta < \aleph_{n+1}$ beliebig gewählt war, ist somit $A(M) = \aleph_{n+1}$. Dies zeigt, daß $\langle \aleph_{n+1}, f \rangle$ eine Jónsson–Algebra ist.

□

Auch ohne Auswahlaxiom ist die in Satz 2.3.7 für $\aleph_0$ konstruierte Algebra eine Jónsson–Algebra.
Im Induktionsschritt ging dagegen das Auswahlaxiom stark ein. Dieses läßt sich auch nicht umgehen. Wir werden nämlich in Kapitel 4 sehen, daß unter geeigneten Zusatzannahmen ein Modell von ZSF existiert, in dem es für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_n$ gibt.
Für Kardinalzahlen mit dieser Eigenschaft führen wir nun eine Bezeichnung ein:

Definition 2.3.8 Sei κ eine Kardinalzahl.
κ heißt **Jónsson–Zahl**, wenn es keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ gibt.
Wir sagen auch, daß κ die **Jónsson–Eigenschaft** besitzt, wenn κ eine Jónsson–Zahl ist.

Wieder betrachten wir dabei nur Algebren mit abzählbar vielen endlichstelligen Funktionen.
Satz 2.3.7 besagt also, daß unter Voraussetzung des Auswahlaxioms die Zahlen $\aleph_n$ keine Jónsson–Zahlen sind.
Man kann die Jónsson–Eigenschaft abschwächen, indem man die Frage nach Jónsson–Algebren auf spezielle Arten von Algebren einschränkt:

Definition 2.3.9 Sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von Algebren.
Eine Kardinalzahl κ heißt $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahl, wenn es in $\mathcal{A}$ keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ gibt.

Offensichtlich ist jede Jónsson–Zahl auch eine $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahl für jede Klasse $\mathcal{A}$ von Algebren.

Folgende Klassen von Algebren wollen wir im folgenden betrachten:

$\mathcal{G}$	Klasse der Gruppen
$\mathcal{R}$	Klasse der Ringe
$\mathcal{S}$	Klasse der Schiefkörper
$\mathcal{K}$	Klasse der Körper
$\mathcal{V}$	Klasse der Verbände
$\mathcal{L}$	Klasse der Loops
$\mathcal{H}$	Klasse der Halbgruppen
$\mathcal{B}$	Klasse der Booleschen Algebren

Wir werden für jede Klasse $\mathcal{A}$ aus dieser Aufzählung darstellen, unter welchen Voraussetzungen Jónsson–Algebren in $\mathcal{A}$ existieren. Anders formuliert werden wir uns mit der Frage beschäftigen, welche Kardinalzahlen $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahlen sind, wobei $\mathcal{A} \in \{\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{B}\}$ ist.

Jónsson–Gruppen

Schon zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir ausgeführt, daß der Ursprung der Frage nach der Existenz von Jónsson–Algebren in der Gruppentheorie liegt. Daher wollen wir uns als erstes mit Jónsson–Gruppen beschäftigen. Wir werden zunächst zeigen, daß $\aleph_0$ keine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl ist. Eine bedeutende Rolle bei der Betrachtung von Jónsson–Gruppen der Mächtigkeit $\aleph_0$ spielen die quasizyklischen Gruppen $Z(p^\infty)$, bekannt auch unter dem Namen Prüfer–Gruppen.
Ist p eine Primzahl und bezeichnet $Z(p^n)$ für alle natürlichen Zahlen n die zyklische Gruppe der Ordnung p^n, so ist

$$Z(p^\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$$

die quasizyklische Gruppe zur Primzahl p (dabei ist mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z(p^n)$ der injektive Limes gemeint).

Man kann $Z(p^\infty)$ als Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ der komplexen Zahlen auffassen. Es ist dann

$$Z(p^\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ \exists n \in \omega\ (z^{p^n} = 1)\}$$

die Menge der q–ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, wobei q eine beliebige p–Potenz ist.
Anschaulich betrachtet ist $Z(p^\infty)$ also eine Teilmenge des Einheitskreises von $\mathbb{C}$. In Abbildung 2.2 sind für $p = 3$ die Gruppe $Z(p)$ und jeweils drei Elemente von $Z(p^2)$ und $Z(p^3)$ dargestellt. Man sieht, daß die Gruppe $Z(p^\infty)$ genau aus den Punkten des Einheitskreises besteht, die man erhält, wenn man den Einheitskreis in p gleich große Stücke aufteilt, diese Stücke jeweils wieder in p Stücke unterteilt und diesen Prozeß iterativ fortsetzt.

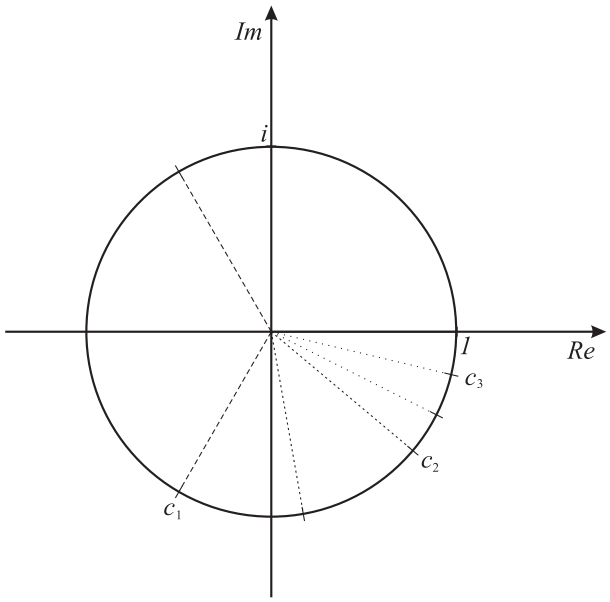

ABBILDUNG 2.2: Elemente der Gruppe $Z(p^\infty)$ im Falle $p = 3$.

Offensichtlich ist $Z(p^\infty)$ für alle Primzahlen p eine unendliche, abelsche Gruppe. Es kann nun sehr leicht gezeigt werden, daß $Z(p^\infty)$ eine Jónsson–Gruppe ist.

Satz 2.3.10 Sei p eine Primzahl.
Dann ist $\langle Z(p^\infty), \cdot \rangle$ eine Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den folgenden beiden Eigenschaften von $Z(p^\infty)$.

(1) Jedes $a \in Z(p^\infty)$ der Ordnung p^n erzeugt $Z(p^n)$: Dies ist einfach einzusehen, da a eine p^n–mächtige Gruppe erzeugt. Da a selbst eine p^n–te Einheitswurzel ist und somit in $Z(p^n)$ liegt, und da außerdem $Z(p^n)$ Ordnung p^n besitzt, folgt diese Eigenschaft.

(2) Es gilt $Z(p^n) \subseteq Z(p^m)$ für alle natürlichen Zahlen $n \leq m$: Auch diese Eigenschaft ist klar, wenn man sich das Bild des Einheitskreises vor Augen hält, denn für $m > n$ ist jede p^m–te Einheitswurzel auch eine p^n–te Einheitswurzel. Ist $m > n$ und $a \in Z(p^m)$ ein Erzeuger von $Z(p^m)$, so besitzt a Ordnung p^m. Das Element a erzeugt unter anderem das Element $a^{p^{m-n}} \in Z(p^m)$. Offensichtlich besitzt dieses Element Ordnung p^n. Nach Eigenschaft (1) erzeugt $a^{p^{m-n}}$ die Gruppe $Z(p^n)$, die somit eine Untergruppe von $Z(p^m)$ ist.

Sei nun G eine echte Untergruppe von $Z(p^\infty)$. Angenommen, es gäbe eine unendliche Folge $\langle n_k;\ k \in \omega\rangle$, so daß für jede natürliche Zahl k ein Element der Ordnung p^{n_k} existiert. Nach den beiden oben gezeigten Eigenschaften ist dann aber

$$Z(p^\infty) = \bigcup_{k\in\omega} Z(p^{n_k}) \subseteq G,$$

was der Wahl von G widerspricht. Also gibt es ein Element $a \in G$, das maximale Ordnung p^m in G besitzt. Dieses Element a erzeugt nach Eigenschaft (1) ganz $Z(p^m)$, d.h. genau die p^n–ten Einheitswurzeln für alle $n \leq m$. Da ein Element größerer Ordnung nicht auftritt, ist also $G = Z(p^m)$, also ist G endlich. Also besitzt $Z(p^\infty)$ nur endliche Untergruppen und ist somit eine Jónsson–Gruppe.

$\square$

Die quasizyklischen Gruppen $Z(p^\infty)$ sind sogar die einzigen abelschen Jónsson–Gruppen der Kardinalität $\aleph_0$. Der Beweis benötigt einiges an Gruppentheorie. Hier sollen nur die nötigsten Begriffe eingeführt werden, die für den Beweis eine Rolle spielen:

Definition 2.3.11 Sei G eine abelsche Gruppe.

(1) G heißt **unzerlegbar**, wenn sie sich nicht als direkte Summe zweier echter Untergruppen schreiben läßt.

(2) G heißt **Torsionsgruppe**, wenn jedes Element aus G endliche Ordnung besitzt.

Heinz Prüfer bewies in seiner Dissertation aus dem Jahre 1921 den folgenden Satz:

Satz 2.3.12 Für jede abzählbare, unzerlegbare, abelsche Torsionsgruppe G gibt es eine Primzahl p, so daß G entweder zu $Z(p^\infty)$ oder zu $Z(p^n)$ für eine natürliche Zahl n isomorph ist.

Beweis: Der Beweis kann in [KAPLANSKY, 1954, Abschnitt 9] nachgelesen werden.

$\square$

Daraus folgt nun das schon oben angesprochene Resultat:

Satz 2.3.13 Sei $\langle G, \cdot\ \rangle$ eine abelsche Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$.
Dann gibt es eine Primzahl p, so daß G isomorph zu $Z(p^\infty)$ ist.

Beweis: Wir wollen Satz 2.3.12 anwenden. Daher zeigen wir, daß G die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt:

(1) G ist unzerlegbar, denn sonst gibt es zwei echte Untergruppen U_1 und U_2 von G, so daß sich G in der Form $G = U_1 \oplus U_2$ schreiben läßt. Da G aber unendlich ist, wäre dann auch eine der beiden Untergruppen U_1 und U_2 unendlich, im Widerspruch dazu, daß G nur endliche Untergruppen besitzt.

(2) G ist eine Torsionsgruppe, d.h. jedes Element hat endliche Ordnung. Denn angenommen, es gäbe ein $a \in G$, das unendliche Ordnung besitzt. Dann besitzt auch a^2 unendliche Ordnung, jedoch ist a in der von a^2 erzeugten Untergruppe nicht enthalten. Somit wäre dann die von a^2 erzeugte Gruppe $\langle a^2\rangle$ eine unendliche, echte Untergruppe von G, wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Nach Satz 2.3.12 gibt es nun eine Primzahl p, so daß G isomorph zu $Z(p^\infty)$ oder zu $Z(p^n)$ für eine natürliche Zahl n ist. Letzteres ist jedoch nicht möglich, da G unendlich ist. Somit folgt die Behauptung.

□

Die abelschen Jónsson–Gruppen der Kardinalität $\aleph_0$ sind nach Satz 2.3.13 also vollständig bekannt. Die Frage, ob dies die einzigen abzählbaren Jónsson–Gruppen sind, kann dieser Satz natürlich nicht beantworten. Es ist jedoch möglich, das Resultat zu verallgemeinern. Beispielsweise konnte Chernikov schon im Jahre 1940 zeigen, daß jede lokalauflösbare Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$ quasizyklisch ist, siehe [Chernikov, 1940b] und [Chernikov, 1940a]. Weiter zeigte Kargapolov 1963, daß jede lokalendliche Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$ quasizyklisch ist. Dabei heißt eine Gruppe lokalendlich, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe endlich ist.
Kargapolov und unabhängig davon P. Hall und C. R. Kulatilaka (1964) bewiesen das folgende Lemma:

Lemma 2.3.14 Jede unendliche lokalendliche Gruppe besitzt eine unendliche abelsche Untergruppe.

Beweis: Der Beweis hiervon steht in [Kargapolov, 1963] und [Hall und Kulatilaka, 1964]. Sehr schön dargestellt ist der Beweis in [Kegel und Wehrfritz, 1973, Corollary 2.5].

□

Damit verallgemeinerte Kargapolov das Resultat aus Satz 2.3.13 für abelsche Gruppen auf alle lokalendlichen Gruppen:

Satz 2.3.15 Sei G eine lokalendliche Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$.
Dann ist G quasizyklisch.

Beweis: G ist eine unendliche, lokalendliche Gruppe, daher gibt es nach Lemma 2.3.14 eine unendliche abelsche Untergruppe U von G. Da G eine Jónsson–Gruppe ist, gilt $U = G$, also ist G abelsch. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.3.13.

□

Jede Gruppe, die nicht lokalendlich ist, besitzt eine endlich erzeugte, unendliche Untergruppe. Somit ist jede Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$, die nicht lokalendlich ist, endlich erzeugt. Schmidts Problem reduziert sich damit auf die Frage, ob es eine abzählbar unendliche Jónsson–Gruppe gibt, die von endlich vielen Elementen erzeugt wird. Ein starkes Resultat in diesem Zusammenhang wurde im Jahre 1966 von Sergey P. Strunkov erreicht. Er stellte Bedingungen auf, die nichtabelsche Jónsson–Gruppen der Kardinalität $\aleph_0$ erfüllen müssen:

Satz 2.3.16 Sei G eine nichtabelsche Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$. Dann gilt mindestens eine der folgenden Bedingungen:

(1) G wird von höchstens zwei Elementen erzeugt.

(2) Die Menge $\{p;\ p \text{ ist Primzahl und teilt die Ordnung eines Elements aus } G\}$ ist unendlich.

Beweis: Vergleiche [Strunkov, 1966].

□

Schließlich konnte Alexander Ol'shanskii im Jahre 1979 die Frage, ob es außer den quasizyklischen Gruppen noch weitere (nichtabelsche) Jónsson–Gruppen der Kardinalität $\aleph_0$ gebe, positiv beantworten:

Satz 2.3.17 Es gibt eine nichtabelsche, abzählbar unendliche Gruppe, deren Untergruppen alle Primzahlordnung besitzen. Insbesondere gibt es eine Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$.

Beweis: Siehe [OL'SHANSKII, 1979] und [OL'SHANSKII, 1981].

$\square$

Es war auch Ol'shanskii, der schließlich im Jahre 1982 veröffentlichte, daß es sogar Jónsson–Gruppen gibt, für die die Mächtigkeiten aller Untergruppen durch eine feste, endliche Zahl beschränkt sind:

Satz 2.3.18 Sei p eine beliebig gewählte, hinreichend große Primzahl.
Dann gibt es eine unendliche Gruppe, deren echte, nichttriviale Untergruppen alle Ordnung p besitzen.

Beweis: Nachlesen kann man den Beweis dieses Satzes in [OL'SHANSKII, 1982].
Ol'shanskii gibt dort auch eine untere Schranke für die Größenordnung der zu wählenden Primzahl p mit $p > 10^{75}$ an.

$\square$

Es gibt wenige Ergebnisse über Jónsson–Gruppen von überabzählbarer Mächtigkeit. Von Shelah wurde 1980 eine Arbeit publiziert, die die folgenden Ergebnisse enthält, siehe [SHELAH, 1980].

Satz 2.3.19 (Mit AC)

(1) Es gibt eine einfache Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_1$, die gleichzeitig auch eine Jónsson–Halbgruppe ist.

(2) Unter Voraussetzung von GCH gibt es für alle unendlichen Kardinalzahlen κ eine einfache Jónsson–Gruppe der Kardinalität κ^+, die ebenfalls eine Jónsson–Halbgruppe ist.

Beweis: Siehe [SHELAH, 1980]. Man beachte die Analogie zu Satz 2.3.5, Eigenschaft (3).

$\square$

Eine weitere Jónsson–Gruppe von überabzählbarer Mächtigkeit wurde im Jahre 1996 von Obraztsov gefunden. Obraztsov setzt die Kontinuumshypothese CH voraus.

Satz 2.3.20 (Mit CH)
Es gibt eine einfache, überabzählbare Gruppe G mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Jede Untergruppe von G ist abzählbar,

(2) Alle abzählbaren Gruppen sind Untergruppen von G.

Beweis: Vergleiche [OBRAZTSOV, 1996, Seite 225].

$\square$

Nach dem Satz von Löwenheim–Skolem 2.1.6 ist klar, daß die Gruppe aus Satz 2.3.20 Kardinalität $\aleph_1$ besitzt, denn sie besitzt nur abzählbare Untergruppen.

Jónsson–Halbgruppen

Die quasizyklischen Gruppen sind auch Jónsson–Halbgruppen. Denn ebenso wie in Satz 2.3.10 kann gezeigt werden, daß die Subhalbgruppen von $Z(p^\infty)$ gerade die zyklischen Gruppen $Z(p^n)$ für natürliche Zahlen n sind. Damit ist also klar, daß $\aleph_0$ auch keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahl ist. Allerdings läßt sich keine abzählbare Jónsson–Halbgruppe finden, die keine Gruppe ist. Dies wurde im Jahre 1968 von Bruce A. Jensen und Donald W. Miller gezeigt:

Satz 2.3.21 Sei H eine Jónsson–Halbgruppe der Kardinalität $\aleph_0$.
Dann ist H eine Gruppe.

Beweis: Vergleiche Jensen und Miller, [JENSEN und MILLER, 1968].

□

Dieses Ergebnis läßt sich nicht in voller Allgemeinheit auf andere Kardinalzahlen als $\aleph_0$ übertragen. Ralph McKenzie veröffentlichte jedoch im Jahre 1971 den folgenden Satz, der zeigt, daß die Bedingungen, unter denen die Existenz einer echten Jónsson–Halbgruppe möglich ist, sehr stark sind:

Satz 2.3.22 Sei κ eine beliebige, unendliche Kardinalzahl und H eine Jónsson-Halbgruppe der Kardinalität κ. Ist H keine Gruppe, so müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(1) κ besitzt Konfinalität ω,

(2) Es gibt eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda > \kappa$,

(3) H ist nicht kommutativ.

Beweis: Siehe [MCKENZIE, 1971].

□

Daraus läßt sich also schließen, daß jede unendliche, kommutative Jónsson–Halbgruppe eine Gruppe ist.
Setzt man die verallgemeinerte Kontinuumshypothese voraus, so ist sogar jede unendliche Jónsson–Halbgruppe eine Gruppe.

Nach Satz 2.3.19 ist unter AC die Zahl $\aleph_1$ keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahl. Setzt man zusätzlich die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH voraus, so sind alle Nachfolgerkardinalzahlen keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahlen.

Jónsson–Körper

Die Zahl $\aleph_0$ ist keine $\mathcal{K}$–Jónsson–Zahl, weil der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ein Jónsson–Körper ist. Dagegen können unter dem Auswahlaxiom überabzählbare Körper keine Jónsson–Körper sein:

Satz 2.3.23 (Mit AC)
Sei $\kappa \geq \aleph_1$ eine Kardinalzahl, L ein Körper der Kardinalität κ.
Dann ist L kein Jónsson–Körper, d.h. L besitzt einen Unterkörper der Kardinalität κ.

Beweis: Sei K der (höchstens abzählbare) Primkörper von L. Wir werden zeigen, daß es eine über K transzendente Teilmenge von L der Kardinalität κ gibt: Jede aufsteigende Kette $\langle T_\alpha; \alpha < \gamma\rangle$ in der Menge $\mathcal{T}$ aller transzendenten Mengen ist nach oben durch eine transzendente Menge, nämlich $\bigcup_{\alpha<\gamma} T_\alpha$, beschränkt. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{T}$ also ein maximales Element.

Sei nun $T \in \mathcal{T}$ gegeben, $|T| = \lambda < \kappa$. Dann ist $|K(T)| < \kappa$. Somit gibt es auch weniger als κ Elemente aus L, die Nullstellen von Polynomen mit Koeffizienten aus $K(T)$ sein können, d.h. es gibt ein $\alpha \in L$, das transzendent über $K(T)$ ist. Dann ist offensichtlich $T \cup \{\alpha\}$ ebenfalls eine transzendente Menge. Somit kann T nicht maximal sein. Dies zeigt, daß eine maximale transzendente Menge κ–mächtig sein muß. Es gibt also transzendente Mengen der Mächtigkeit κ.
Sei nun S eine über K transzendente Teilmenge von L der Mächtigkeit κ. Dann hat $K(S - \{\mathrm{Min}(S)\})$ Kardinalität κ und ist ein echter Unterkörper von L, da $\mathrm{Min}(S)$ nicht in diesem Körper enthalten ist.

□

Jede überabzählbare Kardinalzahl ist somit eine $\mathcal{K}$–Jónsson–Zahl, d.h. alle Jónsson–Körper sind abzählbar. Ralph McKenzie klassifizierte die Jónsson–Körper vollständig (vergleiche [KOSTINSKY, 1969]): Ist p eine Primzahl und n eine beliebige natürliche Zahl, so sei $\mathrm{GF}(p^n)$ der Zerfällungskörper des Polynoms $x^{p^n} - x$. Körper dieser Art nennt man auch Galois–Felder. Wir definieren mit dieser Notation für Primzahlen p und q einen Körper $G_{p,q}$ durch

$$G_{p,q} := \bigcup_{k \in \omega} \mathrm{GF}(p^{q^k}).$$

Es gilt dann:

Satz 2.3.24 Sei K ein Jónsson–Körper. Dann ist K entweder isomorph zu $\mathbb{Q}$, oder es gibt Primzahlen p und q, so daß K isomorph zu $G_{p,q}$ ist.

Beweis: Vergleiche [KOSTINSKY, 1969, Theorem 2.4].

□

Jónsson–Ringe und Jónsson–Schiefkörper

$\mathbb{Q}$ ist zwar ein Jónsson–Körper, jedoch kein Jónsson–Ring, da beispielsweise $\mathbb{Z}$ ein Unterring derselben Kardinalität ist. Dennoch ist $\aleph_0$ keine $\mathcal{R}$–Jónsson–Zahl. Man kann die Jónsson–Ringe der Kardinalität $\aleph_0$ sogar sehr genau klassifizieren. Thomas J. Laffey beschreibt dies in [LAFFEY, 1974]. Einen Teil seines Ergebnisses wollen wir hier beweisen. Wir benutzen dafür einen Satz von Jacobson (1945):

Satz 2.3.25 Schiefkörper, deren multiplikative Gruppe eine Torsionsgruppe ist, sind kommutativ.

Beweis: Der Beweis kann in [FELGNER, 1974, Satz 6, Seite 120] nachgelesen werden.

□

Für jede Primzahl p sei ein Ring $\langle Z(p^\infty), +, \cdot \rangle$ definiert, indem man die Gruppe $Z(p^\infty)$ additiv schreibt und durch die Multiplikation ergänzt, bei der alle Produkte 0 ergeben.

Satz 2.3.26 Sei R ein Jónsson–Ring der Kardinalität $\aleph_0$. Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:

(1) R ist isomorph zu $\langle Z(p^\infty), +, \cdot \rangle$ für eine Primzahl p.

(2) R ist ein Körper.

Beweis: Sei R ein unendlicher Ring, der nur endliche Unterringe besitzt. Wir betrachten zunächst den Fall, daß alle Produkte 0 ergeben. In diesem Fall gibt es eine Primzahl p, so daß R isomorph zu $Z(p^\infty)$ ist:
Da jede Teilmenge von R, die das Nullelement enthält, abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist, kann $\langle R, + \rangle$ nur endliche Untergruppen besitzen. Denn ist $\langle G, + \rangle$ eine Untergruppe von $\langle R, + \rangle$, so ist daher $\langle G, +, \cdot \rangle$ ein Unterring von $\langle R, +, \cdot \rangle$. Somit muß G nach Voraussetzung endlich sein.
Also ist $\langle R, + \rangle$ eine abelsche Jónsson–Gruppe der Kardinalität $\aleph_0$. Nach Satz 2.3.13 gibt es deshalb eine Primzahl p, so daß $\langle R, + \rangle$ und $\langle Z(p^\infty), + \rangle$ isomorph sind. Dies bedeutet jedoch, daß $\langle R, +, \cdot \rangle$ isomorph zu $\langle Z(p^\infty), +, \cdot \rangle$ ist.

Wenn nicht alle Produkte 0 ergeben, so ist R ein Körper. Dies wollen wir im folgenden zeigen.
Ist x ein Element von R, so bezeichne $xR := \{x \cdot y;\ y \in R\}$ und $Rx := \{y \cdot x;\ y \in R\}$.
Wir zeigen zunächst die folgende Eigenschaft:

1. BEHAUPTUNG: Sei $x \in R$. Dann gilt:

(1) $xR \neq \{0\} \implies xR = R$.

(2) $Rx \neq \{0\} \implies Rx = R$.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
(1) Wir zeigen zunächst, daß xR nicht endlich sein kann. Angenommen, xR ist endlich. Da R unendlich ist, gibt es dann ein $r \in R$, so daß $M_r := \{y \in R;\ x \cdot y = r\}$ unendlich ist. Ist $\langle y_n;\ n \in \omega \rangle$ eine unendliche Folge in M_r, wobei die Folgenglieder paarweise verschieden sind, so ist $\langle y_n - y_0;\ n \in \omega \rangle$ eine Folge in R mit paarweise verschiedenen Folgengliedern, und es gilt $x \cdot (y_n - y_0) = x \cdot y_n - x \cdot y_0 = r - r = 0$ für alle natürlichen Zahlen n.
Somit ist auch $M_0 := \{y \in R;\ x \cdot y = 0\}$ eine unendliche Menge. $\langle M_0, +, \cdot \rangle$ ist aber ein Unterring von $\langle R, +, \cdot \rangle$. Da $\langle R, +, \cdot \rangle$ keine echten unendlichen Unterringe besitzt, ist dann $M_0 = R$. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß $xR \neq 0$ ist.
Also ist xR unendlich. Da $\langle xR, +, \cdot \rangle$ ebenfalls ein Unterring von $\langle R, +, \cdot \rangle$ ist, folgt $xR = R$, da R ein Jónsson–Ring ist.

(2) Diese Eigenschaft folgt ganz analog zu Eigenschaft (1).

Wir haben vorausgesetzt, daß nicht alle Produkte 0 ergeben. Somit kann ein $x \in R$ gewählt werden, so daß $xR \neq \{0\}$ ist. Nach der 1. Behauptung gilt $xR = R$. Dann ist jedoch auch $Rx \neq 0$. Denn seien r_1 und r_2 zwei beliebige Elemente aus R mit $r_1 \cdot r_2 \neq 0$ (solche Elemente gibt es wegen $xR \neq 0$). Da $xR = R$ gilt, gibt es $y_1, y_2 \in R$, so daß $r_1 = x \cdot y_1$ und $r_2 = x \cdot y_2$ ist. Wäre nun aber $Rx = \{0\}$, so wäre durch

$$0 \neq r_1 \cdot r_2 = (x \cdot y_1) \cdot (x \cdot y_2) = x \cdot (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = 0$$

ein Widerspruch herbeigeführt.
Also ist doch $Rx \neq 0$ und daher nach der 1. Behauptung $Rx = R$. Damit folgt nun:

2. BEHAUPTUNG: R ist ein Ring mit Einselement.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Wegen $xR = R = Rx$ gibt es Elemente e_r und e_ℓ, so daß $x \cdot e_r = x$ und $e_\ell \cdot x = x$ gilt. Wir werden zeigen, daß $e_r = e_\ell$ ist, und daß dieses Element das Einselement des Rings ist.
Sei dazu $y \in R$ beliebig. Da $Rx = R$ gilt, gibt es ein $z \in R$ mit $y = z \cdot x$. Also ist

$$y \cdot e_r = (z \cdot x) \cdot e_r = z \cdot (x \cdot e_r) = z \cdot x = y.$$

Somit gilt $y \cdot e_r = y$ für alle $y \in R$.
Genauso folgt $e_\ell \cdot y = y$ für alle $y \in R$. Nun können wir zeigen, daß e_r und e_ℓ gleich sind. Es ist nämlich

$$e_r = e_\ell \cdot e_r = e_\ell =: e.$$

Also ist ein Element e gefunden, so daß $y \cdot e = y = e \cdot y$ gilt für alle $y \in R$. D.h. R besitzt ein Einselement.

3. BEHAUPTUNG: R ist ein Schiefkörper.

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG: Wir müssen nun noch zeigen, daß jedes Element von R außer dem Nullelement invertierbar ist. Sei dazu $y \in R$ mit $y \neq 0$ beliebig. Es gilt $y \cdot e = y = e \cdot y \neq 0$, also ist $yR \neq \{0\}$ und ebenso $Ry \neq 0$. Nach der 1. Behauptung gilt also $yR = R = Ry$. Also gibt es Elemente r_1 und r_2 aus R mit $y \cdot r_1 = e$ und $r_2 \cdot y = e$. Die beiden Elemente r_1 und r_2 sind gleich:

$$r_1 = r_1 \cdot e = r_1 \cdot (y \cdot r_2) = (r_1 \cdot y) \cdot r_2 = e \cdot r_2 = r_2.$$

Also ist ein Inverses $y^{-1} = r_1 = r_2$ für y gefunden. Dies zeigt, daß R ein Schiefkörper ist.

4. BEHAUPTUNG: R ist ein Körper.

BEWEIS DER 4. BEHAUPTUNG: Wir müssen nur noch zeigen, daß R bezüglich der Multiplikation kommutativ ist. Dies folgt mit Hilfe von Satz 2.3.25.
Existiert ein Element x in R, welches bezüglich der Multiplikation unendliche Ordnung besitzt, so ist der von x erzeugte Unterring von $\langle R, +, \cdot \rangle$ unendlich. Also erzeugt x den ganzen Ring, da R ein Jónsson–Ring ist. Da R in diesem Fall von einem einzigen Element erzeugt wird, folgt die Kommutativität unmittelbar.
Im anderen Fall besitzt jedes Element $x \in R$ endliche Ordnung bezüglich der Multiplikation. Die Kommutativität folgt nun aus Satz 2.3.25, da R nach der 3. Behauptung ein Schiefkörper ist.

□

Laffey zeigte in seinem Artikel noch mehr: Tritt in Satz 2.3.26 der Fall ein, daß R ein Körper ist, so ist R isomorph zu $\mathbb{Q}$ oder es gibt Primzahlen p und q mit $R \cong G_{p,q}$, wobei $G_{p,q} := \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{GF}(p^{q^n})$ wie im Abschnitt über Jónsson–Körper die Vereinigung von Galois–Feldern ist (vergleiche [LAFFEY, 1974]).

Insbesondere kann aus Satz 2.3.26 geschlossen werden, daß jeder Jónsson–Ring von abzählbarer Kardinalität kommutativ ist. Dies ist für überabzählbare Jónsson–Ringe nicht mehr der Fall. Alan Kostinsky und Ralph McKenzie zeigten im Jahre 1968, daß jede $\mathcal{S}$–Jónsson–Zahl auch eine $\mathcal{R}$–Jónsson–Zahl ist:

Satz 2.3.27 Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, R ein Jónsson–Ring der Kardinalität κ. Dann ist R ein Schiefkörper.

Beweis: Der Beweis zu diesem Satz ist unveröffentlicht. Bemerkungen dazu sind in [KOSTINSKY und MCKENZIE, 1968] nachzulesen.

□

Somit ist nach Satz 2.3.26 und Satz 2.3.27 gezeigt, daß jeder Jónsson–Ring ohne Nullteiler ein Schiefkörper ist. Jeder überabzählbare Jónsson–Ring ist dabei ein echter Schiefkörper, d.h. im Gegensatz zu Jónsson–Ringen von abzählbarer Kardinalität sind überabzählbare Jónsson–Ringe nie kommutativ. Denn dies widerspräche Satz 2.3.23, der besagt, daß es keine überabzählbaren Jónsson–Körper gibt.

In seiner Dissertation [KOSTINSKY, 1969, Section 3] untersucht Kostinsky unter anderem auch Jónsson–1–Ringe. Grundsätzlich sind für Jónsson–1–Ringe nicht dieselben Ergebnisse wie für Jónsson–Ringe zu erwarten. Beispielsweise ist $\mathbb{Z}$ ein Jónsson–1–Ring, jedoch kein Jónsson–Ring. Eine Klassifikation aller Jónsson–1–Ringe bietet der folgende Satz:

Satz 2.3.28 Sei R ein Jónsson–1–Ring.

(1) Ist R abzählbar, so gilt $R \cong \mathbb{Z}$ oder $R \cong \mathbb{Z}_n \times G_{p,q}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Primzahlen p und q.

(2) Ist R überabzählbar, so gilt $R \cong \mathbb{Z}_n \times D$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ oder $R \cong \mathbb{Z} \times D$, wobei D ein überabzählbarer Jónsson–Ring ist.

Insbesondere sind alle abzählbaren Jónsson–1–Ringe kommutativ und alle überabzählbaren Jónsson–1–Ringe nichtkommutativ.

Beweis: Vergleiche [KOSTINSKY, 1969, Theorem 3.14].

□

Jónsson–Verbände

Whaley zeigte in seiner Dissertation aus dem Jahre 1968, daß jede reguläre Kardinalzahl eine $\mathcal{V}$–Jónsson–Zahl ist:

Satz 2.3.29 Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl. Dann ist κ eine $\mathcal{V}$–Jónsson–Zahl.

Beweis: Vergleiche [WHALEY, 1969, Corollary 2.2] und [WHALEY, 1968, Theorem 3.3].

□

Whaley gibt in seinem Artikel ein Beispiel an, das zeigt, daß sein Beweis dieses Satzes tatsächlich nur für reguläre Kardinalzahlen funktioniert (vergleiche [WHALEY, 1969, Example 2.6]). Man bekommt mit seiner Beweismethode also keine Aussage darüber, ob auch singuläre Kardinalzahlen $\mathcal{V}$–Jónsson–Zahlen sind.

Jónsson–Loops

Definition 2.3.30
Eine Struktur $\langle L, + \rangle$ mit einer Verknüpfung $+ : L \times L \to L$ heißt **Loop**, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $+$ ist eine kommutative Verknüpfung.

(2) Es gibt ein $0 \in L$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in L$.

(3) Für alle $a, b \in L$ gibt es genau ein $x \in L$ mit $a + x = x + a = b$.

William Hanf untersuchte 1956 Eigenschaften des Verbands von Unteralgebren einer gegebenen Algebra. Er bewies das folgende Resultat, mit dem unter AC die Frage nach der Existenz von Jónsson–Loops gelöst werden kann:

Satz 2.3.31 Sei A eine Algebra, $V(A)$ der Verband aller Unteralgebren von A. Dann gibt es eine Loop L, so daß der Verband $V(L)$ aller Unterloops von L isomorph zu $V(A)$ ist.

Beweis: Der Beweis ist unveröffentlicht. Eine genauere Beschreibung findet man in [HANF, 1956].

□

Eine Konsequenz dieses Satzes ist nun, daß eine Jónsson–Loop der Kardinalität κ existiert, falls es überhaupt eine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ gibt. Dies ist leicht einzusehen, wenn man das folgende Lemma zu Hilfe nimmt:

Lemma 2.3.32 (Mit AC)
Sei A eine Algebra mit abzählbar vielen Funktionen endlicher Stelligkeit und κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Dann sind gleichwertig:

(1) A besitzt mindestens Mächtigkeit κ.

(2) Es gibt eine Folge $\langle A_\beta;\ \beta < \kappa\rangle$ von Unteralgebren von A mit $A_{\beta_1} \lneqq A_{\beta_2} \lneqq A$ für alle $\beta_1 < \beta_2 < \kappa$.

Beweisskizze: Die Richtung von (2) nach (1) ist trivialerweise erfüllt, da wegen $A_{\beta_1} \lneqq A_{\beta_2}$ für $\beta_1 < \beta_2$ insbesondere $A_{\beta_1} \subsetneq A_{\beta_2}$ gilt; d.h. A_β besitzt für alle $\beta < \kappa$ mindestens $|\beta|$ Elemente, und somit besitzt A mindestens κ Elemente.
Ist umgekehrt eine mindestens κ–mächtige Algebra A gegeben, so kann leicht rekursiv eine Kette von Unteralgebren der gewünschten Form konstruiert werden: Ist A_β schon konstruiert, so wählen wir ein Element $a \in A$, welches nicht in A_β liegt. Die von $\{a\} \cup A_\beta$ erzeugte Unteralgebra von A sei dann $A_{\beta+1}$. Für Limeszahlen $\gamma < \kappa$ sei A_γ der gerichtete Limes der Algebren A_β für $\beta < \gamma$. Auf diese Weise erhält man eine Kette von Unteralgebren der Länge κ von der gewünschten Form.

□

Als Korollar aus dem Satz von Hanf 2.3.31 erhält man nun das oben bereits erwähnte folgende Resultat über Jónsson–Loops:

Satz 2.3.33 (Mit AC)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist κ eine Jónsson–Zahl genau dann, wenn κ eine $\mathcal{L}$–Jónsson–Zahl ist.

Beweis: Jede kommutative Gruppe ist eine Loop. Nach Satz 2.3.10 gibt es somit eine Jónsson–Loop der Kardinalität $\aleph_0$. Also ist $\aleph_0$ weder eine $\mathcal{L}$–Jónsson–Zahl noch eine Jónsson–Zahl.
Sei nun $\kappa > \aleph_0$. Ist κ eine Jónsson–Zahl, so trivialerweise auch eine $\mathcal{L}$–Jónsson–Zahl. Wir zeigen noch die umgekehrte Richtung: Sei A eine Algebra der Kardinalität κ, und $V(A)$ sei der Verband aller Unteralgebren von A. Nach Satz 2.3.31 gibt es eine Loop L, so daß der Verband $V(L)$ aller Unterloops von L isomorph zu $V(A)$ ist. Nach Lemma 2.3.32 ist L ebenfalls κ–mächtig, da die maximalen Ketten von Unteralgebren von A die Länge κ besitzen und $V(A)$ zu $V(L)$ isomorph ist. Ist nun A eine Jónsson–Algebra, dann gibt es in $V(A)$ kein Element der Kardinalität κ, d.h. es gibt nach Lemma 2.3.32 keine Kette $A_0 \lneqq A_1 \lneqq ... \lneqq A_\kappa \lneqq A$ in $V(A)$, denn sonst wäre A_κ eine echte Unteralgebra von A der Mächtigkeit κ. Wegen der Isomorphie von $V(A)$ und $V(L)$ gibt es dann aber auch keine Kette $L_0 \lneqq L_1 \lneqq ... \lneqq L_\kappa \lneqq L$ in $V(L)$, also besitzt nach Lemma 2.3.32 auch $V(L)$ keine Elemente der Mächtigkeit κ und L ist eine Jónsson–Loop. Somit ist gezeigt, daß es keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ geben kann, wenn es keine κ–mächtige Jónsson–Loop gibt. Ist also κ eine $\mathcal{L}$–Jónsson–Zahl, so ist κ auch eine Jónsson–Zahl.

□

Jónsson–Boolesche Algebren

Einem leider unveröffentlichen Resultat von Tarski zufolge ist jede unendliche Kardinalzahl eine $\mathcal{B}$–Jónsson–Zahl, siehe [Jónsson, 1972, Abschnitt 3.9, Seite 135].

Wir fassen nun die bisher bekannten Ergebnisse zusammen:

(1) $\aleph_0$ ist keine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl, siehe Satz 2.3.10. Setzt man das Auswahlaxiom voraus, so ist auch $\aleph_1$ keine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl, siehe Satz 2.3.19. Mit GCH sind alle Nachfolgerkardinalzahlen keine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahlen, siehe ebenfalls Satz 2.3.19.

(2) $\aleph_0$ ist keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahl, siehe Unterabschnitt über $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahlen. Setzt man das Auswahlaxiom voraus, so ist auch $\aleph_1$ keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahl, siehe Satz 2.3.19. Mit GCH sind alle Nachfolgerkardinalzahlen keine $\mathcal{H}$–Jónsson–Zahlen, siehe ebenfalls Satz 2.3.19.

(3) $\aleph_0$ ist keine $\mathcal{R}$–Jónsson–Zahl, siehe Satz 2.3.26.

(4) $\aleph_0$ ist keine $\mathcal{K}$–Jónsson–Zahl, da $\mathbb{Q}$ ein Jónsson–Körper ist. Dagegen ist mit AC jede überabzählbare Kardinalzahl eine $\mathcal{K}$–Jónsson–Zahl, vergleiche Satz 2.3.23.

(5) Jede unendliche, reguläre Kardinalzahl ist nach Satz 2.3.29 eine $\mathcal{V}$–Jónsson–Zahl.

(6) Jede unendliche Kardinalzahl ist eine $\mathcal{B}$–Jónsson–Zahl, vergleiche Unterabschnitt über $\mathcal{B}$–Jónsson–Zahlen.

(7) Jede $\mathcal{S}$–Jónsson–Zahl ist eine $\mathcal{R}$–Jónsson–Zahl (vergleiche Satz 2.3.27. Man beachte hierbei, daß $\aleph_0$ weder $\mathcal{S}$–Jónsson–Zahl noch $\mathcal{R}$–Jónsson–Zahl ist, denn $\mathbb{Q}$ ist ein Jónsson–Schiefkörper und für jede Primzahl p ist $\langle Z(p^\infty), +, \cdot \rangle$ ein Jónsson–Ring.).

(8) Mit AC ist eine unendliche Kardinalzahl genau dann eine $\mathcal{L}$–Jónsson–Zahl, wenn sie eine Jónsson–Zahl ist, siehe Satz 2.3.33.

Wir wollen uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht mehr mit diesen schwächeren Formen der Jónsson–Zahlen befassen, sondern nur noch solche Zahlen κ betrachten, für die es überhaupt keine Jónsson–Algebra, gleichgültig welcher Art, der Kardinalität κ gibt. Für Nachfolgerkardinalzahlen hatten wir zu Beginn dieses Abschnitts schon einige Voraussetzungen angegeben, unter denen Jónsson–Algebren existieren, siehe Satz 2.3.5 und Satz 2.3.7. Ein weiteres Resultat konnte Shelah im Jahre 1994 beweisen.
Er zeigte, daß unter Voraussetzung des Auswahlaxioms die kleinste reguläre Kardinalzahl κ, so daß es keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ gibt, eine Limeskardinalzahl ist. Insbesondere gibt es unter AC für alle natürlichen Zahlen n eine Jónsson–Algebra der Kardinalität $\aleph_{\omega+n}$.
Somit ist die Frage, welche Zahlen unter Voraussetzung des Auswahlaxioms die Jónsson–Eigenschaft besitzen, für verhältnismäßig kleine Nachfolgerkardinalzahlen, d.h. für die Zahlen $\aleph_n$ und $\aleph_{\omega+n}$, gelöst. Schwieriger zu beantworten ist die Frage, wie es mit Limeskardinalzahlen aussieht. In diesem Zusammenhang muß eine große offene Frage der Mengenlehre erwähnt werden:

Offene Frage: Gibt es ein Modell von ZSF + AC, in dem $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist?

Bemerkungen hierzu finden sich in [Kanamori, 1994, § 8]. Nach dem Satz, den Keisler und Rowbottom 1965 bewiesen hatten, gibt es zumindest ein Modell von AC, nämlich $\mathbf{L}$, in dem es eine Jónsson–Algebra der Mächtigkeit $\aleph_\omega$ gibt, d.h. in dem $\aleph_\omega$ keine Jónsson–Zahl ist. Jedoch ist noch kein Modell von ZSF+AC gefunden, in dem $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist. Offensichtlich ist ein solches Modell nicht ohne Zusatzvoraussetzungen möglich;

mindestens braucht man die Existenz einer Jónsson–Zahl. Man hat inzwischen deutlich bessere untere Abschätzungen der Konsistenzstärke gefunden. Die bisher beste wurde von Peter Koepke im Jahre 1988 bewiesen:

Satz 2.3.34 (Mit AC)
Sei κ eine Kardinalzahl, für die es ein $\xi < \kappa$ mit $\kappa = \aleph_\xi$ gibt.
Ist κ eine Jónsson–Zahl, so gibt es für jede Kardinalzahl λ ein inneres Modell mit λ meßbaren Kardinalzahlen.

Beweis: Siehe [KOEPKE, 1988].

□

Als obere Schranke konnte Arthur Apter unter ZSF die folgende angeben:

Satz 2.3.35 Gibt es unendlich viele meßbare Kardinalzahlen, so existiert ein Modell von ZSF, in dem $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist[13].

Beweis: Vergleiche [APTER, 1983, Theorem 1].

□

Da $\aleph_\omega$ die Voraussetzung von Satz 2.3.34 erfüllt, folgt, daß ein inneres Modell mit großen Kardinalzahlen existieren muß, wenn $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist. Der Sachverhalt, daß $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist, besitzt somit mindestens die Konsistenzstärke der Existenz von Modellen mit beliebig großen Mengen von meßbaren Kardinalzahlen.
Wir werden in dieser Arbeit ein Modell von ZSF angeben, in dem $\aleph_\omega$ eine Jónsson–Zahl ist. Allerdings handelt es sich dabei um ein Modell, in dem das Auswahlaxiom verletzt ist.

2.4 Partitionskardinalzahlen

2.4.1 Definitionen

Aus der Vorlesung Infinitäre Kombinatorik [FELGNER, 1997a] sind uns Partitionsrelationen für Ordinalzahlen bereits bekannt. Wir werden die Definition wiederholen und verallgemeinern. Die Partitionsrelationen aus der Vorlesung waren hauptsächlich in ZSF (+AC) beweisbar oder widerlegbar. Wir werden uns in diesem Abschnitt hauptsächlich mit Partitionsrelationen für Ordinalzahlen κ befassen, die unabhängig von ZSF sind. Die hier betrachteten Relationen implizieren nämlich, daß κ eine große Kardinalzahl ist. Die Konsistenzstärke der Annahme, daß ein κ, welches eine unserer Relationen erfüllt, existiert, wird zwischen der Existenz einer unerreichbaren und der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl liegen.

Die folgende Notation wurde von Erdős eingeführt. Zur Erinnerung wollen wir sie hier wiederholen.

Seien α, β und γ Ordinalzahlen mit $\gamma \leq \beta$, M eine Menge.

$\alpha \to (\beta)^\gamma_M \quad :\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^\gamma \to M$ gibt es eine Teilmenge $H \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $|F``[H]^\gamma| \leq 1$ ist.

$\alpha \to (\beta)^{<\omega}_M \quad :\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^{<\omega} \to M$ gibt es eine Teilmenge $H \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $|F``[H]^n| \leq 1$ ist für alle $n \in \omega$.

[13] Er zeigte sogar, daß $\aleph_\omega$ in diesem Modell eine noch stärkere Eigenschaft, nämlich die Rowbottom–Eigenschaft (siehe Definition 2.4.12), besitzt.

Die Menge H heißt **homogen**.

Wenn $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$ erfüllt ist, dann gibt es offensichtlich für jede Menge X vom Ordnungstyp α und jede Funktion $F : [X]^\gamma \to M$ ebenfalls eine homogene Menge vom Ordnungstyp β. Ist eine beliebige Menge X vom Ordnungstyp α gegeben, so genügt es sogar, die Partitionsrelation $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$ anhand aller Funktionen $F : [X]^\gamma \to M$ zu überprüfen, da der Isomorphismus zwischen α und X eine eindeutige Zuordnung zwischen den homogenen Mengen der Funktionen $F : [X]^\gamma \to M$ und den homogenen Mengen der Funktionen $G : [\alpha]^\gamma \to M$ vermittelt.

Wir wollen nun erste Eigenschaften dieser Partitionsrelationen aufzählen:

Proposition 2.4.1 Seien $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$ und γ Ordinalzahlen, M, M_1 und M_2 Mengen. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_1 \to (\beta)^\gamma_M$, so gilt auch $\alpha_2 \to (\beta)^\gamma_M$.

(2) Ist $\beta_2 < \beta_1$ und $\alpha \to (\beta_1)^\gamma_M$, so gilt auch $\alpha \to (\beta_2)^\gamma_M$.

(3) Gibt es eine Injektion von M_2 in M_1 und gilt $\alpha \to (\beta)^\gamma_{M_1}$, so gilt auch $\alpha \to (\beta)^\gamma_{M_2}$.

Analog gilt:

(4) Ist $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_1 \to (\beta)^{<\omega}_M$, so gilt auch $\alpha_2 \to (\beta)^{<\omega}_M$.

(5) Ist $\beta_2 < \beta_1$ und $\alpha \to (\beta_1)^{<\omega}_M$, so gilt auch $\alpha \to (\beta_2)^{<\omega}_M$.

(6) Gibt es eine Injektion von M_2 in M_1 und gilt $\alpha \to (\beta)^{<\omega}_{M_1}$, so gilt auch $\alpha \to (\beta)^{<\omega}_{M_2}$.

Beweis:

(1) Sei $\alpha_2 > \alpha_1$ und $\alpha_1 \to (\beta)^\gamma_M$. Dann ist $[\alpha_1]^\gamma \subseteq [\alpha_2]^\gamma$. Wenn nun $F : [\alpha_2]^\gamma \to M$ eine Funktion ist, so sei $G : [\alpha_1]^\gamma \to M$ die Einschränkung von F auf $[\alpha_1]^\gamma$. Nach Voraussetzung besitzt G eine homogene Menge $H \subseteq \alpha_1 \subseteq \alpha_2$ vom Ordnungstyp β. Dann ist klar, daß H auch homogen für F ist.

(2) Dies ist offensichtlich, da jede Teilmenge einer homogenen Menge ebenfalls homogen ist.

(3) Gibt es eine Injektion von M_2 in M_1, so kann man M_2 o.B.d.A. als Teilmenge von M_1 auffassen. Dann folgt die Behauptung, weil jede Funktion $F : [\alpha]^\gamma \to M_2$ auch als Funktion mit Bildbereich M_1 aufgefaßt werden kann.

Die Eigenschaften (4), (5) und (6) folgen analog.

□

Die Relation $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$ bleibt nur in Spezialfällen erhalten, wenn γ durch eine kleinere Ordinalzahl $\delta < \gamma$ ersetzt wird, z.B. wenn β eine reguläre Kardinalzahl ist. Allgemeiner bleibt die Relation dann erfüllt, wenn β eine Kardinalzahl ist und keine in β konfinalen Folgen der Länge δ existieren:

Proposition 2.4.2 Seien α, γ und $\delta < \gamma$ Ordinalzahlen, κ eine Kardinalzahl und M eine Menge. Wenn $\alpha \to (\kappa)^\gamma_M$ und $\mathrm{cf}(\kappa) > \delta$ ist, dann gilt auch $\alpha \to (\kappa)^\delta_M$.

Beweis: Sei $F : [\alpha]^\delta \to M$ gegeben. Wir suchen eine homogene Menge für F vom Ordnungstyp κ. Dazu definieren wir eine Funktion $G : [\alpha]^\gamma \to M$ durch $G(f) := F(f{\restriction}\delta)$. Nach Voraussetzung besitzt G eine homogene Menge H vom Ordnungstyp κ.
Wir werden zeigen, daß H auch homogen für F ist: Seien dazu $p, q \in [H]^\delta$. Da $\mathrm{Im}(p)$ und $\mathrm{Im}(q)$ nach Voraussetzung nicht konfinal in H sind und der Ordnungstyp von H eine Kardinalzahl ist, gibt es Funktionen $f, g \in [H]^\gamma$, so daß $f{\restriction}\delta = p$ und $g{\restriction}\delta = q$ ist.

Weil H homogen für G ist, folgt $F(p) = G(f) = G(g) = F(q)$, was zeigt, daß H auch homogen für F ist.

□

Unter Voraussetzung des Auswahlaxioms ist die Relation $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$ nur für endliche Zahlen γ erfüllt:

Satz 2.4.3 (Mit AC)
Seien α, β und γ Ordinalzahlen, M eine Menge mit mehr als einem Element, und es gelte die Partitionseigenschaft $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$.
Dann ist γ eine endliche Zahl.

Beweis: Angenommen, γ sei unendlich. Nach Proposition 2.4.1, Eigenschaften (2) und (3), kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $\beta = \gamma$ und $M = 2$ gilt.
Da wir AC vorausgesetzt haben, gibt es eine Wohlordnung $\prec$ der Menge $[\alpha]^\gamma$. Diese Wohlordnung setzen wir nun ein, um eine geeignete Partition zu definieren, mit der wir dann einen Widerspruch zur Voraussetzung herleiten können:
Wir definieren $F : [\alpha]^\gamma \to 2$ durch $F(s) = 0$ genau dann, wenn jedes $t \in [\mathrm{Im}(s)]^\gamma$ bezüglich der Wohlordnung $\prec$ größer als s ist.
Nach Voraussetzung besitzt die Funktion F eine homogene Menge H vom Ordnungstyp γ. Natürlich ist $[H]^\gamma$ ebenfalls durch $\prec$ wohlgeordnet, besitzt also ein kleinstes Element. Dieses kleinste Element wird nach Definition der Funktion F auf 0 abgebildet. Dann wird jedoch jedes Element von $[H]^\gamma$ durch F auf die 0 abgebildet, weil H homogen ist.
Da γ unendlich ist, gibt es eine unendliche Limeszahl λ und eine natürliche Zahl n mit $\gamma = \lambda + n$. Sei H^* das Anfangssegment von H vom Ordnungstyp λ. Wir wählen nun eine beliebige Folge $\langle \alpha_k;\ k \in \omega \rangle$ in H so aus, daß $H^* - \{\alpha_k;\ k \in \omega\}$ immer noch Ordnungstyp λ besitzt. Da λ eine unendliche Limeszahl ist, ist dies immer möglich (beispielsweise kann für die Folge $\langle \alpha_k;\ k \in \omega \rangle$ die Folge der geraden natürlichen Zahlen gewählt werden).
Nun definieren wir rekursiv eine Folge $\langle s_k;\ k \in \omega \rangle$ in $[H]^\gamma$:

s_0 sei die aufsteigende Aufzählung von $H - \{\alpha_k;\ k \in \omega\}$,

s_k die aufsteigende Aufzählung von $\mathrm{Im}(s_0) \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\}$ für alle $k > 0$.

Da alle Mengen $H^* \cap \mathrm{Im}(s_k)$ Ordnungstyp λ besitzen, gilt $s_k \in [H]^\gamma$ für alle natürlichen Zahlen k.
Da daher jede dieser Funktionen s_k durch F auf 0 abgebildet wird, folgt nun $s_{k+1} \prec s_k$ für alle natürlichen Zahlen k nach Definition von F. Dies ist jedoch unmöglich, da $\prec$ eine Wohlordnung ist.
Somit ist ein Widerspruch herbeigeführt, und es ist gezeigt, daß γ endlich sein muß.

□

Ist das Auswahlaxiom nicht vorausgesetzt, so kann die Partitionsrelation $\alpha \to (\beta)^\gamma_M$ durchaus auch für unendliche Zahlen γ erfüllt sein. Wir werden beispielsweise in Kapitel 3 sehen, daß $\aleph_1 \to (\aleph_1)^{\aleph_1}_2$ erfüllt ist, wenn man das Axiom der Determiniertheit voraussetzt.

Wesentlich schwächere Partitionseigenschaften werden ebenfalls eine große Rolle spielen. Für eine Färbung $F : [\alpha]^\gamma \to M$ kann man sich die Frage stellen, ob es eine in irgendeinem Sinne große Teilmenge Q von α gibt, so daß $F{\upharpoonright}[Q]^\gamma$ nicht jede Farbe aus M annimmt. Für Partitionseigenschaften dieser Art werden wir nun ebenfalls eine Notation einführen:

Seien α, β und γ Ordinalzahlen, ν eine Kardinalzahl und M eine Menge.

$\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{M}$ $:\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^{\gamma} \to M$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $F"[Q]^{\gamma} \neq M$ gilt.

$\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{M,<\nu}$ $:\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^{\gamma} \to M$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $|F"[Q]^{\gamma}| < \nu$ gilt.

$\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{M}$ $:\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^{<\omega} \to M$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $F"[Q]^{<\omega} \neq M$ gilt.

$\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{M,<\nu}$ $:\Longleftrightarrow$ Für jede Funktion $F : [\alpha]^{<\omega} \to M$ gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $|F"[Q]^{<\omega}| < \nu$ gilt.

Die Mengen Q mit den oben definierten Eigenschaften nennen wir **quasihomogen**.
Wenn $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{M}$ erfüllt ist, dann gibt es für jede beliebige Menge X vom Ordnungstyp α und jede Funktion $F : [X]^{\gamma} \to M$ eine quasihomogene Teilmenge Q von X vom Ordnungstyp β. Dies ist leicht einzusehen, da jede ordnungserhaltende Bijektion zwischen X und α quasihomogene Mengen entsprechender Funktionen aufeinander abbildet. Entsprechendes gilt für die restlichen Partitionsrelationen.
Auch für diesen Typ von Partitionsrelationen wollen wir erste Eigenschaften beweisen:

Proposition 2.4.4 Seien α, β, γ und δ Ordinalzahlen. Außerdem seien M und N zwei beliebige Mengen, wobei es eine Injektion von M in N gibt.
Dann gilt:

(1) Gilt $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{M}$, so ist auch $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{N}$ erfüllt.

(2) Gilt $\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{M}$, so ist auch $\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{N}$ erfüllt.

(3) Gilt $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{\delta}$, so gilt auch $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{|\delta|}$.

(4) Gilt $\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{\delta}$, so gilt auch $\alpha \to [\beta]^{<\omega}_{|\delta|}$.

Beweis:

(1) Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $M \subseteq N$ gilt. Sei $F : [\alpha]^{\gamma} \to N$ gegeben. Definiere eine Funktion $G : [\alpha]^{\gamma} \to M$ durch

$$G(x) := \begin{cases} F(x), \text{ falls } F(x) \in M \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp β, so daß $G"[Q]^{\gamma} \neq M$ gilt. Dann gibt es ein $s \in M$, so daß $s \notin G"[Q]^{\gamma}$ ist, also $s \notin F"[Q]^{\gamma}$. Somit ist $F"[Q]^{\gamma} \neq N$. Also ist $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{N}$ gezeigt.

(2) Folgt wie (1), wenn man γ durch $< \omega$ ersetzt.

(3) Sei $b : |\delta| \to \delta$ eine Bijektion und $F : [\alpha]^{\gamma} \to |\delta|$ eine Partition. Nach Voraussetzung besitzt $b \circ F$ eine quasihomogene Menge Q vom Ordnungstyp β. Diese Menge Q ist auch quasihomogen für F. Denn sei $\nu < \delta$ mit $\nu \notin (b \circ F)"[Q]^{\gamma}$. Da b bijektiv ist, gibt es ein $\eta < |\delta|$ mit $b(\eta) = \nu$. Dann gilt jedoch $\eta \notin F"[Q]^{\gamma}$, was beweist, daß Q quasihomogen für F ist. Also gilt $\alpha \to [\beta]^{\gamma}_{|\delta|}$.

(4) Folgt wie (3), wenn man γ durch $< \omega$ ersetzt.

□

Die umgekehrten Implikationen in Proposition 2.4.4 gelten nicht unbedingt. Ist z.B. κ eine singuläre Kardinalzahl der Konfinalität $\aleph_0$ und n eine natürliche Zahl, so ist $\kappa \to [\kappa]^n_\delta$ für alle $\delta > 2^{n-1}$ erfüllt. Dagegen gilt $\kappa \not\to [\kappa]^n_{2^{n-1}}$. Diese beiden Ergebnisse können in [WILLIAMS, 1977, Theoreme 2.7.7 und 2.7.8] nachgelesen werden.

Wir wollen nun eine erste Partitionseigenschaft untersuchen, die auf die Definition von schwach kompakten Kardinalzahlen führen wird. Und zwar interessieren wir uns dafür, für welche Ordinalzahlen α die Relation $\alpha \to (\alpha)^2_2$ erfüllt ist. Die folgende Proposition zeigt, daß solche Ordinalzahlen Limeszahlen sein müssen.

Proposition 2.4.5 Sei α eine unendliche Ordinalzahl, $\alpha \to (\alpha)^2_2$.
Dann ist α keine Nachfolgerordinalzahl.

Beweis:
Angenommen, $\alpha = \gamma + 1$ wäre eine Nachfolgerordinalzahl. Wir definieren eine Funktion $F : [\alpha]^2 \to 2$ durch

$$F(\beta_1, \beta_2) = 0 \iff \beta_1 = \gamma \quad \vee \quad \beta_2 = \gamma.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine homogene Teilmenge H von α vom Ordnungstyp α. Da jede Teilmenge von α desselben Ordnungstyps γ enthalten muß, folgt, daß γ in H enthalten ist, also $F"[H]^2 = \{0\}$. Dann enthält aber jede zweielementige Teilmenge von H die Zahl γ, woraus folgt, daß H nur zwei Elemente enthalten kann. Dies steht im Widerspruch zum Ordnungstyp von H.

$\square$

Wir zeigen nun, daß jede Ordinalzahl α, die die Partitionseigenschaft $\alpha \to (\alpha)^2_2$ besitzt, die Konfinalität α hat. Daraus folgt dann unmittelbar, daß Ordinalzahlen mit dieser Eigenschaft reguläre Kardinalzahlen sind.

Satz 2.4.6 Sei α eine Ordinalzahl mit der Eigenschaft $\alpha \to (\alpha)^2_2$. Dann gibt es keine konfinalen Folgen der Länge $\gamma < \alpha$ in α.

Beweis:
Angenommen, es gäbe für ein $\gamma < \alpha$ eine aufsteigende Folge $\langle \beta_\nu;\ \nu < \gamma \rangle$, die konfinal in α ist. Wir definieren Mengen M_ν durch

$$M_\nu := \{\eta < \alpha;\ \beta_\xi < \eta \leq \beta_\nu \text{ für alle } \xi < \nu\}.$$

Dann ist $\{M_\nu;\ \nu < \gamma\}$ eine Partition von α, wobei für alle ν die Menge M_ν wegen $\beta_\nu < \alpha$ kleineren Ordnungstyp als α hat.
Wir definieren nun eine Funktion $F : [\alpha]^2 \to 2$ durch

$$F(\eta_1, \eta_2) = 0 \iff \eta_1 \text{ und } \eta_2 \text{ liegen in derselben Menge } M_\nu.$$

Nach Voraussetzung besitzt F eine homogene Menge $H \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp α. Wenn $F"[H]^2 = \{0\}$ ist, dann liegen alle Elemente von H in derselben Menge M_ν. Dies ist nicht möglich, weil alle Mengen M_ν kleineren Ordnungstyp als α besitzen. Also $F"[H]^2 = \{1\}$, d.h. keine zwei Elemente aus H liegen in derselben Menge M_ν. Wir definieren $w : H \to \gamma$ durch $w(\eta) = \nu$ genau dann, wenn $\eta \in M_\nu$ ist. Diese Funktion ist nach Definition der Mengen M_ν ordnungserhaltend, woraus $\gamma \geq \alpha$ folgt, im Widerspruch zur Definition von γ. Also gibt es keine konfinalen Folgen der Länge $\gamma < \alpha$ in α.

$\square$

Da Konfinalitäten immer reguläre Kardinalzahlen sind, folgt nun unmittelbar:

Lemma 2.4.7 Sei α eine Ordinalzahl mit der Eigenschaft $\alpha \to (\alpha)^2_2$. Dann ist α eine reguläre Kardinalzahl.

Beweis: Nach Lemma 2.4.6 besitzt α die Konfinalität α. Nach [Felgner, 1996, Proposition 16.1] ist die Konfinalität einer beliebigen Ordinalzahl immer eine reguläre Kardinalzahl. Somit ist $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$ eine reguläre Kardinalzahl.

□

Diese Betrachtungen führen nun auf die Definition einer ersten Partitionskardinalzahl:

Definition 2.4.8 Eine unendliche Kardinalzahl κ mit der Eigenschaft $\kappa \to (\kappa)^2_2$ heißt **schwach kompakt**.

Nach Lemma 2.4.7 sind schwach kompakte Kardinalzahlen regulär. In ZSF + AC kann sogar gezeigt werden, daß schwach kompakte Kardinalzahlen unerreichbar sind (siehe [Felgner, 1997b, Satz 8.1]). Somit gehört die Existenz einer schwach kompakten Kardinalzahl zu den großen Kardinalzahleigenschaften.

Partitionseigenschaften hängen über Skolemisierung eng mit der Existenz von bestimmten Strukturen einer abzählbaren Sprache zusammen. Dies wird im folgenden Satz deutlich:

Satz 2.4.9 Seien κ, λ, μ und ν Kardinalzahlen, wobei $\lambda \leq \kappa$ und $\aleph_0 < \nu \leq \mu \leq \kappa$ sei. Dann sind äquivalent:

(1) $\langle \kappa, \lambda \rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, < \nu \rangle$

(2) $\kappa \to [\mu]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Sei eine Funktion $F : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ gegeben. Wir definieren eine Struktur $\mathcal{M}^* := \langle \kappa, \lambda, \in, F_n \rangle_{n \in \omega}$ mit abzählbar vielen Funktionen $F_n := F \restriction [\kappa]^n$. Nach Voraussetzung und der Bemerkung auf Seite 2.1.1 gibt es eine μ–mächtige Teilmenge Q von κ mit $|Q \cap \lambda| < \nu$, so daß $\mathcal{M} := \langle Q, Q \cap \lambda, \in, F_n \restriction [Q]^n \rangle_{n \in \omega} \prec \mathcal{M}^*$ gilt.

Es folgt nun $|F"[Q]^{<\omega}| < \nu$. Denn für alle geordneten n–Tupel x aus κ gilt $F(x) = F_n(x) \in \lambda$. Da $\mathcal{M}$ eine elementare Substruktur von $\mathcal{M}^*$ ist, folgt daraus schon $F(x) \in Q \cap \lambda$ für alle geordneten n–Tupel aus Q. Also $F"[Q]^{<\omega} \subseteq Q \cap \lambda$. Somit ist also eine Teilmenge Q von κ vom Ordnungstyp μ gefunden, so daß $|F"[Q]^{<\omega}| < \nu$ ist. Da $F : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ beliebig gewählt war, folgt also $\kappa \to [\mu]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sei $\mathcal{N}^* = \langle N^*, M^* \rangle$ eine Struktur einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$ vom Typ $\langle \kappa, \lambda \rangle$ (Die Funktionen und Relationen, die die abzählbar vielen Symbole von $\mathcal{L}$ interpretieren, werden hier ignoriert, da sie für den Beweis irrelevant sind). O.B.d.A. sei $N^* = \kappa$ und $M^* = \lambda$. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}^*$ eine elementare Substruktur vom Typ $\langle \mu, < \nu \rangle$ besitzt. Dazu skolemisieren wir: $\{h_n;\ n \in \omega\}$ sei eine Aufzählung aller Skolemfunktionen, so daß die Stelligkeit $k(n)$ der n–ten Skolemfunktion h_n höchstens n beträgt.

Wir definieren dann eine Funktion $F : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ durch

$$F(x_1, ..., x_n) := \begin{cases} h_n(x_1, ..., x_{k(n)}) & \text{falls} \quad h_n(x_1, ..., x_{k(n)}) < \lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Teilmenge $Q \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp μ, so daß $|F"[Q]^{<\omega}| < \nu$ ist. Wir setzen nun $N := \bigcup_{n \in \omega} h_n"[Q]^{k(n)}$. Es kann gezeigt werden, daß N die Grundmenge einer elementaren Substruktur $\mathcal{N} := \langle N, N \cap \lambda \rangle$ von $\mathcal{N}^*$ mit den gewünschten Eigenschaften ist:

N hat Mächtigkeit μ: Betrachte $\varphi(v) \equiv \exists x(x = v)$. Wenn h_n die zu dieser Formel gehörende Skolemfunktion ist, dann ist $h_n(x) = x$ für alle $x \in Q$. Daraus folgt, daß Q eine Teilmenge von N ist, und somit hat N mindestens Mächtigkeit μ. N kann jedoch keine größere Mächtigkeit als μ haben, denn wegen $\mu > \aleph_0$ ist $|N| = |\bigcup_{n\in\omega} h_n``[Q]^{k(n)}| \leq \aleph_0 \cdot \mu = \mu$.

Nach Definition der Funktion F ist $N \cap \lambda \subseteq F``[Q]^{<\omega}$, also $|N \cap \lambda| < \nu$.

Nun muß noch die Substruktureigenschaft nachgewiesen werden. Sei dazu $\varphi(v_0, ..., v_m)$ eine beliebige Formel der Sprache $\mathcal{L}$ mit $m + 1$ freien Variablen, außerdem $x_1, ..., x_m \in N$. Wenn es ein $x \in \kappa$ gibt mit $\varphi[x, x_1, ..., x_m]$, dann gilt auch $\varphi[h_n(x_1, ..., x_m), x_1, ..., x_m]$, wobei h_n die zu $\varphi(v_0, ..., v_m)$ gehörende Skolemfunktion sei. Es ist jedoch $h_n(x_1, ..., x_m) \in N$. Dies bedeutet: Es gibt ein $x \in \kappa$ mit $\varphi[x, x_1, ..., x_m]$ genau dann, wenn es ein $y \in N$ gibt mit $\varphi[y, x_1, ..., x_m]$. Nach dem Tarski–Vaught–Kriterium[14] folgt somit, daß $\mathcal{N}$ elementares Submodell von $\mathcal{N}^*$ ist. Insgesamt ist also eine elementare Substruktur von $\mathcal{N}^*$ vom Typ $\langle \mu, < \nu \rangle$ gefunden.

□

Wir interessieren uns wieder, wie schon in Abschnitt 2.3, besonders für Algebren mit abzählbar vielen, endlichstelligen Funktionen. In Abschnitt 2.3 hatten wir Jónsson–Algebren betrachtet, also Algebren, die keine Subalgebren derselben Kardinalität besitzen. Wir können nun Jónsson–Algebren in Verbindung mit Partitionseigenschaften bringen:

Satz 2.4.10 Sei κ eine Kardinalzahl.
Dann sind gleichwertig:

(1) Es gibt keine Jónsson–Algebra der Kardinalität κ.

(2) $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$

(3) Jede Struktur einer abzählbaren Sprache, deren Grundmenge Kardinalität κ hat, besitzt eine echte elementare Substruktur der Kardinalität κ.

Beweis:
Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 2.4.9.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sei $F : [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ gegeben. Wir definieren wieder eine Algebra $\langle \kappa, F_n \rangle_{n\in\omega}$, wobei $F_n := F\restriction[\kappa]^n$ sei. Nach Voraussetzung gibt es eine Teilmenge Q von κ vom Ordnungstyp κ, so daß $\langle Q, F_n\restriction[Q]^n \rangle_{n\in\omega}$ eine Subalgebra von $\langle \kappa, F_n \rangle_{n\in\omega}$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit der Funktionen F_n folgt dann $F``[Q]^{<\omega} \subseteq Q \neq \kappa$. Also nimmt F, eingeschränkt auf die Menge der endlichen, geordneten Tupel aus Q, nicht jede Farbe an. Da F eine beliebig gewählte Funktion ist, folgt $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Wie in Satz 2.4.9 skolemisieren wir: Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$, deren Grundmenge Kardinalität κ besitze. O.B.d.A. kann wieder angenommen werden, daß die Grundmenge κ ist. Wir wählen eine Aufzählung $\{h_n;\ n \in \omega\}$ aller Skolemfunktionen so, daß die Stelligkeit $k(n)$ von h_n höchstens n beträgt. Nun definieren wir $F : [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ durch

$$F(x_1, ..., x_n) := h_n(x_1, ..., x_{k(n)}).$$

Nach Voraussetzung gibt es eine κ–mächtige Teilmenge Q von κ, so daß $F``[Q]^{<\omega} \neq \kappa$ ist. Wie in Satz 2.4.9 erhält man dann eine echte elementare Substruktur der Kardinalität $\kappa$ von $\mathcal{M}$ mit der Grundmenge $\bigcup_{n\in\omega} h_n``[Q]^{k(n)} = F``[Q]^{<\omega} \neq \kappa$.

[14] Vergleiche [TARSKI und VAUGHT, 1957] oder [JECH, 1978, § 10, Seite 82].

(3) $\Longrightarrow$ (1) Diese Richtung ist trivial, da Algebren spezielle Strukturen sind, nämlich in unserem Zusammenhang Strukturen mit abzählbar vielen Funktionen endlicher Stelligkeit.

□

Wir erhalten aus diesem Satz unmittelbar eine andere Charakterisierung von Jónsson–Zahlen:

Korollar 2.4.11 Eine Kardinalzahl κ ist genau dann eine Jónsson–Zahl, wenn die Partitionseigenschaft $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$ erfüllt ist.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.4.10.

□

Wir führen nun noch eine leichte Verstärkung von Jónsson–Zahlen ein, die in Kapitel 4, Abschnitt 4.5, eine Rolle spielen wird:

Definition 2.4.12 Eine Kardinalzahl $\kappa > \aleph_1$ heißt **Rowbottom–Kardinalzahl**, wenn für alle $\lambda < \kappa$ die Partitionseigenschaft $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\lambda,<\aleph_1}$ erfüllt ist.

Satz 2.4.13 Jede Rowbottom–Zahl ist eine Jónsson–Zahl.

Beweis: Sei κ eine Rowbottom–Zahl. Dann gilt $\kappa > \aleph_1$ nach Definition von Rowbottom–Zahlen. Sei $F : [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ gegeben. Wir wählen ein λ mit $\aleph_1 \leq \lambda < \kappa$ beliebig und definieren $G : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ durch

$$G(X) := \begin{cases} F(X), & \text{falls } F(X) \in \lambda, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann existiert nach Voraussetzung eine Teilmenge Q der Mächtigkeit κ mit $|G"[Q]^{<\omega}| < \aleph_1 \leq \lambda < \kappa$. Insbesondere gilt $G"[Q]^{<\omega} \neq \lambda$. Daraus folgt nun $|F"[Q]^{<\omega}| \neq \kappa$. Also ist $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$ erfüllt, und somit ist κ eine Jónsson–Zahl.

□

Die folgende Eigenschaft von Jónsson–Zahlen wird in Satz 2.4.18 verwendet. Wir benötigen zum Beweis das Auswahlaxiom.

Lemma 2.4.14 (Mit AC)
Wenn κ eine Jónsson–Zahl ist, dann gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}$. Außerdem ist $\mu := \text{Min}\{\alpha < \kappa;\ \kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}\}$ regulär und es gilt $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mu,<\mu}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, daß es ein $\alpha < \kappa$ gibt mit $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}$. Angenommen, dies wäre falsch. Dann kann für jedes $\alpha < \kappa$ eine Funktion $F_\alpha : [\kappa]^{<\omega} \to \alpha$ so gewählt werden, daß für jede κ–mächtige Teilmenge X von κ die Eigenschaft $F_\alpha"[X]^{<\omega} = \alpha$ erfüllt ist. Wir definieren dann eine Funktion $F : [\kappa]^{<\omega} \to \kappa$ durch

$$F(x) := \begin{cases} F_\alpha(x - \{\alpha\}) & \text{für } x \neq \emptyset, \text{ wobei } \alpha = \text{Min}(x) \text{ ist}, \\ 0 & \text{für } x = \emptyset. \end{cases}$$

Da κ eine Jónsson–Zahl ist, gibt es eine κ–mächtige Teilmenge Q von κ, so daß $F"[Q]^{<\omega} \neq \kappa$ gilt. Wir wählen ein beliebiges $\beta < \kappa$ mit $\beta \notin F"[Q]^{<\omega}$ und ein $\alpha \in Q$ mit $\beta < \alpha < \kappa$. Da $Q - (\alpha + 1)$ Mächtigkeit κ besitzt, gilt $\beta \in F_\alpha"[Q - (\alpha + 1)]^{<\omega}$ nach Wahl der Funktion F_α.

Also gibt es ein endliches Tupel y aus $Q-(\alpha+1)$ mit $\beta = F_\alpha(y) = F(\langle\alpha\rangle^\frown y) \in F"[Q]^{<\omega}$, im Widerspruch zur Wahl von β. Somit gibt es doch ein $\alpha < \kappa$ mit $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_\alpha$.

Sei nun $\mu := \mathrm{Min}\{\alpha < \kappa;\ \kappa \to [\kappa]^{<\omega}_\alpha\}$.
Da μ minimal ist, ist μ nach Proposition 2.4.4 eine Kardinalzahl.
Um zu zeigen, daß μ die gewünschten Eigenschaften besitzt, beweisen wir zunächst, daß die Partitionseigenschaft $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mathrm{cf}(\mu),<\mathrm{cf}(\mu)}$ erfüllt ist. Auch dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, $\kappa \not\to [\kappa]^{<\omega}_{\mathrm{cf}(\mu),<\mathrm{cf}(\mu)}$. Dann gibt es eine Funktion $G : [\kappa]^{<\omega} \to \mathrm{cf}(\mu)$, so daß $|G"[X]^{<\omega}| = \mathrm{cf}(\mu)$ ist für alle $X \subseteq \kappa$ mit $|X| = \kappa$. Sei $\psi : \mathrm{cf}(\mu) \to \mu$ eine konfinale (ordnungserhaltende) Einbettung. Wegen der Minimalität von μ gilt $\kappa \not\to [\kappa]^{<\omega}_\alpha$ für alle $\alpha < \mu$. Also können Funktionen F_α für alle $\alpha < \mu$ wie oben gewählt werden.
Wir definieren eine Funktion $K : [\kappa]^{<\omega} \to \mu$ durch

$$K(\xi_1, ..., \xi_n) := \begin{cases} F_{\psi(G(\xi_1,...,\xi_i))}(\xi_{i+1}, ..., \xi_{i+j}), & \text{falls es } i,j > 0 \text{ gibt mit } \ n = 2^i 3^j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist K wohldefiniert, denn für jede natürliche Zahl n gibt es höchstens eine Darstellung $n = 2^i 3^j$. Man beachte dabei, daß $i + j < 2^i 3^j = n$ gilt für alle natürlichen Zahlen $i, j > 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine κ–mächtige Menge $Q \subseteq \kappa$ mit $K"[Q]^{<\omega} \neq \kappa$. Sei $\beta < \kappa$ mit $\beta \notin K"[Q]^{<\omega}$ beliebig. Wegen $|G"[Q]^{<\omega}| = \mathrm{cf}(\mu)$ liegt $G"[Q]^{<\omega}$ konfinal in $\mathrm{cf}(\mu)$. Also liegt das Bild von $G"[Q]^{<\omega} \subseteq \mathrm{cf}(\mu)$ bezüglich der Abbildung ψ konfinal in μ, da ψ ordnungserhaltend und konfinal gewählt war. Daher gibt es eine endliche Menge $\{x_1, ..., x_i\}$ von Q mit $\beta < \gamma = \psi(G(x_1, ..., x_i)) < \mu$. Nach Wahl der Funktion F_γ gilt $F_\gamma"[Q-(x_i+1)]^{<\omega} = \gamma$, da $|Q-(x_i+1)| = \kappa$ ist. Deshalb gibt es eine Teilmenge $\{x_{i+1}, ..., x_{i+j}\} \subseteq Q-(x_i+1)$ mit $F_\gamma(x_{i+1}, ..., x_{i+j}) = \beta$. Wählen wir nun Elemente $x_{i+j+1}, ..., x_{2^i3^j} \in Q-(x_{i+j}+1)$ beliebig, so gilt $K(x_1, ..., x_{2^i3^j}) = \beta$, im Widerspruch zur Wahl von β. Somit ist gezeigt, daß $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mathrm{cf}(\mu),<\mathrm{cf}(\mu)}$ erfüllt ist.

Weil insbesondere $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mathrm{cf}(\mu)}$ gilt, muß $\mathrm{cf}(\mu) \geq \mu$ sein wegen der Minimalität von μ, also gilt $\mu = \mathrm{cf}(\mu)$. Damit ist μ regulär, und es gilt $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mu,<\mu}$.

□

2.4.2 Partitionskardinalzahlen und andere große Kardinalzahlen

Wir wollen nun unsere in Abschnitt 2.4.1 eingeführten Kardinalzahlen (schwach kompakte Kardinalzahlen, Jónsson–Zahlen und Rowbottom–Zahlen) in das in Abschnitt 2.2 dargestellte Diagramm 2.1 großer Kardinalzahlen einordnen.

Erdős und Hajnal publizierten schon 1958 den folgenden sogenannten Satz von Rowbottom (siehe [Erdős *et al.*, 1984, Theorem 34.11]):

Satz 2.4.15 Sei $\kappa > \aleph_0$ eine meßbare Kardinalzahl, $\mathcal{U}$ ein κ–vollständiger, normaler Ultrafilter auf κ und $\gamma < \kappa$ beliebig. Dann gibt es für jede Funktion $F : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ eine homogene Menge $H \in \mathcal{U}$ vom Ordnungstyp κ.
Insbesondere heißt das: Jede meßbare Kardinalzahl ist auch eine Jónsson–Zahl und eine Rowbottom–Zahl[15].

[15] Der Satz von Rowbottom zeigt sogar mehr: Die Partitionseigenschaft $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_2$, die meßbare Kardinalzahlen in besonders starker Weise erfüllen (die homogenen Mengen sind sogar Elemente des Ultrafilters), nennt man Ramsey-Eigenschaft. Somit sind meßbare Kardinalzahlen nicht nur Rowbottom– und Jónsson–Zahlen, sondern auch Ramsey–Zahlen. Vergleiche [Kanamori, 1994].

Beweis: Zunächst zeigen wir für alle natürlichen Zahlen n, daß jede Funktion $F_n : [\kappa]^n \to \gamma$ eine homogene Menge vom Ordnungstyp κ besitzt, die außerdem im Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegt. Später werden wir abzählbar viele solcher Funktionen $F_n : [\kappa]^n \to \gamma$ betrachten. Für jede dieser Funktionen müssen wir eine homogene Menge H_n auswählen. Da wir das Auswahlaxiom nicht verwenden wollen, werden wir die homogenen Mengen konstruktiv festlegen. Wir gehen bei der Konstruktion induktiv vor:
Im Falle $n = 0$ ist $H_0 := \kappa \in \mathcal{U}$ trivialerweise homogen für jede Funktion $F_0 : [\kappa]^0 \to \gamma$.
Wir betrachten noch den Fall $n = 1$. Ist $F_1 : \kappa \to \gamma$ eine beliebige Funktion, so gibt es ein $\nu < \gamma$ mit $(F_1^{-1})"\{\nu\} \in \mathcal{U}$. Denn setzen wir $X_\nu := (F_1^{-1})"\{\nu\} \in \mathcal{U}$ für alle $\nu < \gamma$, so ist

$$\bigcup_{\nu<\gamma} X_\nu = \kappa.$$

Aus der κ–Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ folgt daher nach Proposition 2.1.16 die Behauptung. Dieses ν ist eindeutig bestimmt. Denn angenommen, es gäbe zwei unterschiedliche Elemente ν_1 und ν_2 von γ mit $X_{\nu_1} \in \mathcal{U}$ und $X_{\nu_2} \in \mathcal{U}$, so folgt $\emptyset = X_{\nu_1} \cap X_{\nu_2} \in \mathcal{U}$, was den Filtereigenschaften widerspricht.
Für dieses somit eindeutig bestimmte $\nu < \gamma$ ist X_ν homogen für F_1. Weiter besitzt X_ν wegen der κ–Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ Ordnungstyp κ, vergleiche Proposition 2.1.18.
Wir setzen daher $H_1 := X_\nu$. Diese Menge erfüllt die gewünschten Eigenschaften.

Wir kommen nun zum Induktionsschritt. Sei $F_{n+1} : [\kappa]^{n+1} \to \gamma$ gegeben. Wir definieren für alle $s \in [\kappa]^n$ eine Funktion $F_s : \kappa \to \gamma$ durch

$$F_s(\beta) := \begin{cases} F_{n+1}(s^\frown\langle\beta\rangle), & \text{falls } \operatorname{Max}(s) < \beta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Induktionsanfang wurde für jede solche Funktion F_s schon eine homogene Menge $Y_s \in \mathcal{U}$ vom Ordnungstyp κ konstruiert.
Ist $F_s"Y_s = \{\delta_s\}$ für alle $s \in [\kappa]^n$, so definieren wir $G : [\kappa]^n \to \gamma$ durch

$$G(s) := \delta_s$$

für alle $s \in [\kappa]^n$. Die Menge $Z \in \mathcal{U}$ sei die nach Induktionsvoraussetzung schon konstruierte homogene Menge für G, und es sei $\delta < \gamma$ diejenige Ordinalzahl mit $G"[Z]^n = \{\delta\}$. Nach Definition von G ist also $G(s) = \delta_s = \delta$ für alle $s \in [Z]^n$.
Wir setzen nun

$$Z_\nu := \bigcap_{\substack{s^* \in [\kappa]^n, \\ \operatorname{Max}(s^*) \leq \nu}} Y_{s^*}$$

für alle $\nu < \kappa$. Da $\mathcal{U}$ κ–vollständig ist, gilt $Z_\nu \in \mathcal{U}$ für alle $\nu < \kappa$. Aus der Normalität von $\mathcal{U}$ folgt damit $\triangle_{\nu<\kappa} Z_\nu \in \mathcal{U}$.
Wir setzen nun $H_{n+1} := Z \cap \triangle_{\nu<\kappa} Z_\nu \in \mathcal{U}$. Als Element von $\mathcal{U}$ besitzt H_{n+1} nach Proposition 2.1.18 Ordnungstyp κ. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß H_{n+1} homogen für F_{n+1} ist. Somit ist dann eine homogene Menge für F_{n+1} explizit konstruiert. Sei dazu $t \in [H_{n+1}]^{n+1}$ beliebig. Wir werden zeigen, daß t durch F_{n+1} auf δ abgebildet wird. Es ist $t = s^\frown\langle\beta\rangle$, wobei $\beta = \operatorname{Max}(t)$ und s das Tupel der restlichen Komponenten von t sei. Es gilt $\operatorname{Max}(s) < \beta$, also ist $F_{n+1}(t) = F_s(\beta)$.
Da β ein Element von H_{n+1} ist, gilt

$$\beta \in \triangle_{\nu<\kappa} Z_\nu = \{\eta < \kappa;\ \eta \in \bigcap_{\nu<\eta} Z_\nu\}.$$

Also ist $\beta \in \bigcap_{\nu<\beta} Z_\nu \subseteq Z_{\operatorname{Max}(s)}$, da $\operatorname{Max}(s) < \beta$ gilt. Nach Definition der Mengen Z_ν ist also

$$\beta \in Z_{\operatorname{Max}(s)} = \bigcap_{\substack{s^* \in [\kappa]^n, \\ \operatorname{Max}(s^*) \leq \operatorname{Max}(s)}} Y_{s^*} \subseteq Y_s.$$

Da s ein Tupel aus H_{n+1} und somit aus Z ist, gilt

$$F_{n+1}(t) = F_s(\beta) = \delta_s = \delta.$$

Das bedeutet, daß alle $(n+1)$–Tupel aus H_{n+1} durch F_{n+1} auf ein und denselben Wert, nämlich auf δ, abgebildet werden. Somit ist eine homogene Menge für F_{n+1} konstruiert.

Nun folgt die Behauptung sehr leicht:
Ist eine Funktion $F : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ gegeben, so betrachten wir für alle natürlichen Zahlen n die Einschränkungen $F_n := F\restriction[\kappa]^n$ von F. Wir nehmen für jedes n die oben konstruierte homogene Menge $H_n \in \mathcal{U}$ für F_n und setzen $H := \bigcap_{n\in\omega} H_n$. Da $\mathcal{U}$ ein κ–vollständiger Ultrafilter ist und $\kappa > \omega$ ist und die Mengen H_n nach Konstruktion Filtermengen sind, gilt $H \in \mathcal{U}$. Insbesondere besitzt H nach Proposition 2.1.18 Ordnungstyp κ. Außerdem ist H homogen für F, denn für alle natürlichen Zahlen n gilt $H \subseteq H_n$, also

$$|F"[H]^n| \leq |F"[H_n]^n| = |F_n"[H_n]^n| \leq 1.$$

Insgesamt ist hiermit gezeigt, daß κ die Partitionseigenschaft $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_{\gamma}$ erfüllt. Daraus folgt nun direkt die Rowbottom-Eigenschaft, und somit nach Satz 2.4.13 auch die Jónsson–Eigenschaft. Denn sei $F : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ für ein $\gamma < \kappa$ gegeben. Wir haben gezeigt, daß F eine homogene Menge H vom Ordnungstyp κ besitzt, d.h. $|F"[H]^{<\omega}| \leq 1 < \aleph_1$. Dies beweist die Rowbottom–Eigenschaft $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ für alle $\gamma < \kappa$.

□

Man hat nun eine Möglichkeit, Partitionsrelationen aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl zu beweisen. Partitionsrelationen sind wiederum eng mit Sharps verbunden.
Eine wichtige Rolle spielen in diesem Zusammenhang die sogenannten Erdős–Zahlen. Ist α eine Ordinalzahl, so heißt eine Kardinalzahl κ genau dann **α–Erdős–Zahl**, wenn die Partitionseigenschaft $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$ erfüllt ist. Beispielsweise ist jede meßbare Kardinalzahl κ nach Satz 2.4.15 eine κ–Erdős–Zahl. Zur Theorie der Erdős–Kardinalzahlen verweisen wir auf [DRAKE, 1974] und [KANAMORI, 1994]. Der Zusammenhang zwischen Erdős–Zahlen und Sharps wird im folgenden Satz deutlich:

Satz 2.4.16 (Silver) Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und α eine Limesordinalzahl. Dann sind äquivalent:

(1) $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$

(2) Ist $\mathcal{M}$ eine Struktur mit Grundmenge M und $\kappa \subseteq M$, so gibt es eine Folge $Y \in [\kappa]^\alpha$ von ununterscheidbaren Elementen für $\mathcal{M}$.

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Theorem 9.3].

□

Mit Hilfe von diesem Resultat erhält man den folgenden Satz, der besagt, daß schon die Existenz einer α–Erdős–Zahl für eine überabzählbare Ordinalzahl α die Existenz aller Sharps impliziert:

Satz 2.4.17 Sei κ eine Kardinalzahl mit $\kappa \to (\aleph_1)^{<\omega}_2$, a eine reelle Zahl.
Dann existiert $a^\#$.

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Lemma 9.6, Lemma 9.8 und Lemma 9.10].

□

Nach dem Satz von Rowbottom 2.4.15 und Satz 2.4.17 existiert somit $a^{\#}$ für jede reelle Zahl a, wenn es eine meßbare Kardinalzahl gibt. Allerdings kann mit dem Argument aus Satz 2.4.17 nicht auf die Existenz der Sharps geschlossen werden, wenn man nur die Existenz einer Jónsson–Zahl voraussetzt. Dennoch existiert $0^{\#}$, wenn es eine Jónsson-Zahl gibt. Da Jónsson–Zahlen für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sind, wollen wir den Beweis hier aufführen:

Satz 2.4.18 (Mit AC)
Wenn es eine Jónsson–Zahl gibt, dann existiert auch $0^{\#}$.

Beweis:
Sei κ eine Jónsson–Zahl. Nach Lemma 2.4.14 gibt es eine Kardinalzahl $\mu < \kappa$ mit $\kappa \to [\kappa]^{<\omega}_{\mu,<\mu}$. Also gilt $\langle \kappa, \mu\rangle \twoheadrightarrow \langle \kappa, <\mu\rangle$ nach Satz 2.4.9.
Wir betrachten nun die Struktur $\mathcal{M} := \langle \mathbf{L}_\kappa, \mathbf{L}_\mu, \in\rangle$. $\mathcal{M}$ ist vom Typ $\langle \kappa, \mu\rangle$. Also gibt es eine elementare Substruktur $\langle M, N, E\rangle \prec \mathcal{M}$ vom Typ $\langle \kappa, \nu\rangle$ für ein $\nu < \mu$. Nach dem Kondensationslemma 2.1.10 gibt es ein λ und einen Isomorphismus $\pi : M \to \mathbf{L}_\lambda$. Dann gilt $\mathcal{N} := \langle \mathbf{L}_\lambda, \pi(N), \in\rangle \prec \langle \mathbf{L}_\kappa, \mathbf{L}_\mu, \in\rangle$.
Wegen der Definierbarkeit (vergleiche Satz 2.1.8) der $\mathbf{L}_\alpha$ gibt es ein γ, so daß

$$\mathcal{N} \models \pi(N) = \mathbf{L}_\gamma$$

ist, wobei $|\gamma| = |N| = \nu < \mu < \kappa \leq \lambda$ gilt. Insbesondere ist $\gamma < \mu$, da μ eine Kardinalzahl ist.

Sei $j : \mathbf{L}_\lambda \to L_\kappa$ die elementare Einbettung.

Dann ist der kritische Punkt von j nicht größer als γ: Denn

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda \models \alpha \in \gamma &\iff \mathbf{L}_\lambda \models \alpha \in \mathrm{Ord} \text{ und } \alpha \in \mathbf{L}_\gamma \\ &\iff \mathbf{L}_\kappa \models j(\alpha) \in \mathrm{Ord} \text{ und } j(\alpha) \in \mathbf{L}_\mu \\ &\iff \mathbf{L}_\kappa \models j(\alpha) \in \mu. \end{aligned}$$

Angenommen, $j(\gamma) = \gamma$. Es gilt $\mathbf{L}_\kappa \models \gamma \in \mu$, also $\mathbf{L}_\kappa \models j(\gamma) \in \mu$ nach Annahme, und somit $\mathbf{L}_\lambda \models \gamma \in \gamma$. Dies ist aber ein Widerspruch! Also ist $\mathrm{krit}(j) \leq \gamma$.

Somit gilt $\langle \mathbf{L}_\lambda, \in\rangle \prec \langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$, wobei $\mathrm{krit}(j) \leq \gamma < |\lambda| = \kappa$ ist. Aus Satz 2.2.10 folgt nun, daß $0^{\#}$ existiert.

□

Nach Satz 2.4.15 und Satz 2.4.18 sind Jónsson– und Rowbottom–Zahlen also zwischen meßbaren Kardinalzahlen und Sharps einzuordnen. Ein Resultat von Kleinberg zeigt, daß die Konsistenzstärken von Jónsson– und Rowbottom–Zahlen gleich sind (vergleiche [Kleinberg, 1973b]):

Satz 2.4.19 Die folgenden Theorien sind äquikonsistent:

(1) ZSF + AC + $\exists\kappa$(κ ist eine Rowbottom–Zahl).

(2) ZSF + AC + $\exists\kappa$(κ ist eine Jónsson–Zahl).

Beweis: Vergleiche [Kanamori, 1994,Theorem 8.16]

□

Wir können nun die betrachteten Partitionskardinalzahlen in unser Bild großer Kardinalzahlen (vergleiche Abbildung 2.1) einordnen und erhalten Abbildung 2.3. Dabei gehören die Resultate über schwache Kompaktheit zum mengentheoretischen Standardwissen und sind in dieser Arbeit nicht bewiesen. Sie sind der Vollständigkeit halber im Diagramm aufgeführt.

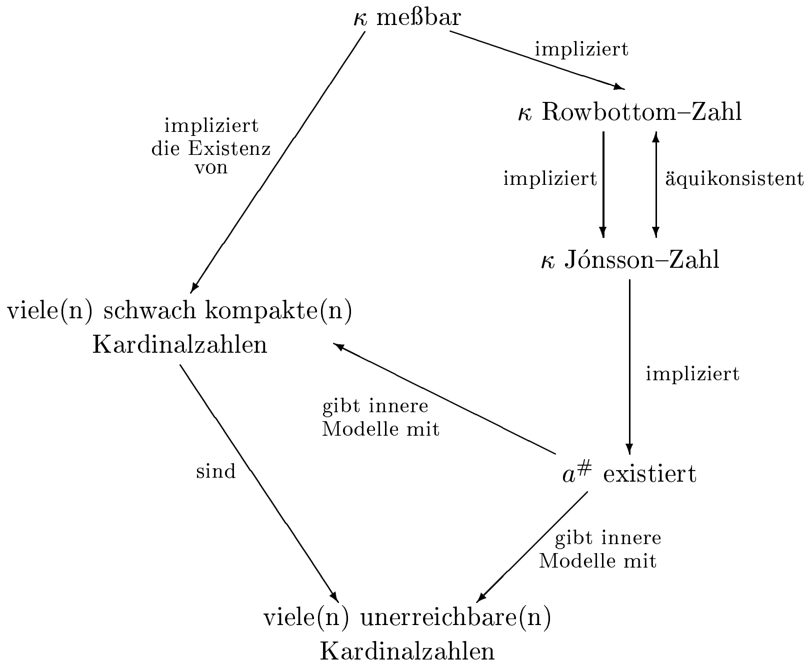

ABBILDUNG 2.3: Konsistenzstärke einiger Partitionskardinalzahlen.

2.4.3 Nachfolger–Partitionskardinalzahlen

Wir haben bereits auf Seite 30 darauf verwiesen, daß wir hier unter Verwendung von AC mit Hilfe von Partitionsrelationen einige Resultate zeigen werden, die aussagen, daß Nachfolgerkardinalzahlen keine Partitionskardinalzahlen sind.
Die folgende Proposition ist bereits in Satz 2.3.7 bewiesen worden. Hier zeigen wir einen anderen Beweis, der die Sprache der Partitionsrelationen benutzt.

Proposition 2.4.20 $\aleph_0$ ist keine Jónsson–Zahl.

Beweis:
Wir definieren eine Funktion $F : [\aleph_0]^{<\omega} \to \aleph_0$ durch $F(x) = |x|$. Dann gilt $F"[Q]^{<\omega} = \aleph_0$ für jedes $Q \subseteq \aleph_0$ der Mächtigkeit $\aleph_0$. Also gilt $\aleph_0 \not\to [\aleph_0]^{<\omega}_{\aleph_0}$.

□

Die folgenden beiden Sätze wurden ebenfalls schon in Satz 2.3.5 aufgeführt. Hier wollen wir sie beweisen:

Satz 2.4.21 (Mit AC)
Wenn κ keine Jónsson–Zahl ist, dann ist auch κ^+ keine Jónsson–Zahl.

Beweis: Sei κ eine Kardinalzahl, die keine Jónsson–Zahl ist, also $\kappa \not\to [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$. Für ein α mit $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ sind α und κ gleichmächtig, daher gilt $\alpha \not\to [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}$. Also können wir für jedes α mit $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ eine Funktion $F_\alpha : [\alpha]^{<\omega} \to \alpha$ wählen, so daß $F_\alpha"[X]^{<\omega} = \alpha$ gilt für alle κ–mächtigen Teilmengen $X \subseteq \alpha$. Definiere damit eine Funktion $F : [\kappa^+]^{<\omega} \to \kappa^+$ durch

$$F(x) := \begin{cases} F_\alpha(x - \{\alpha\}), & \text{falls } \alpha = \mathrm{Max}(x) \geq \kappa \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $Q \subseteq \kappa^+$ eine beliebige κ^+–mächtige Teilmenge von κ^+ und $\beta < \kappa^+$ ebenfalls beliebig. Wähle ein α mit $\beta < \alpha < \kappa^+$, so daß $|Q \cap \alpha| = \kappa$ ist. Dann gibt es ein endliches Tupel x aus $Q \cap \alpha$ mit

$$\beta = F_\alpha(x) = F(x \frown \langle\alpha\rangle).$$

Also ist $F"[Q]^{<\omega} = \kappa^+$. Da Q beliebig gewählt war, gilt $\kappa^+ \not\rightarrow [\kappa^+]^{<\omega}_{\kappa^+}$. Somit ist auch κ^+ nach Korollar 2.4.11 keine Jónsson–Zahl.

□

Aus Proposition 2.4.20 und Satz 2.4.21 folgt das Ergebnis, welches wir bereits in Satz 2.3.7 gezeigt haben: Keine der Zahlen $\aleph_n$ für natürliche Zahlen n ist unter AC eine Jónsson–Zahl.

Unter Voraussetzung der verallgemeinerten Kontinuumshypothese GCH sind alle Jónsson–Zahlen Limeskardinalzahlen. Dieses schon in Satz 2.3.5 erwähnte Resultat wollen wir nun ebenfalls beweisen:

Satz 2.4.22 (Mit AC + GCH)
Sei κ eine beliebige Kardinalzahl. Dann ist κ^+ keine Jónsson–Zahl.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $2^\kappa = \kappa^+$, deshalb gibt es κ^+ Teilmengen von κ^+ der Mächtigkeit κ. Wir wählen eine Aufzählung $\{X_\alpha;\ \kappa \leq \alpha < \kappa^+\}$ aller κ–mächtigen Teilmengen von κ^+ so, daß $X_\alpha \subseteq \alpha$ für alle α ist. Für ein γ mit $\kappa \leq \gamma < \kappa^+$ sei $M_\gamma := \{\alpha;\ \kappa \leq \alpha < \gamma\} \times \gamma$. M_γ ist eine κ–mächtige Menge. Sei $\{\mu^\gamma_\nu;\ \nu < \kappa\}$ eine beliebige Abzählung von M_γ. Es gelte $\mu^\gamma_\nu = \langle\alpha^\gamma_\nu, \eta^\gamma_\nu\rangle$ für alle $\nu < \kappa$ und $\kappa \leq \gamma < \kappa^+$.
Wir wählen jetzt eine injektive Funktion $\tau_\gamma : \kappa \to \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$, so daß gilt:

$$\tau_\gamma(\nu) \in X_{\alpha^\gamma_\nu} \text{ für alle } \nu < \kappa.$$

Damit definieren wir eine Funktion $F : [\kappa^+]^2 \to \kappa^+$ wie folgt:

$$F(\beta, \gamma) := \begin{cases} \eta^\gamma_\nu, & \text{falls } \beta = \tau_\gamma(\nu) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei Q eine beliebige κ^+–mächtige Teilmenge von κ^+ und $\eta < \kappa^+$.
Wir wollen zeigen, daß es ein Paar aus Q gibt, das durch F auf η abgebildet wird. Wähle dazu ein α mit $X_\alpha \subseteq Q$ beliebig und ein $\gamma \in Q$ mit $\gamma > \mathrm{Max}\{\alpha, \eta\}$. Das Paar $\langle\alpha, \eta\rangle$ habe in der Abzählung von M_γ die Nummer ν, d.h. $\langle\alpha, \eta\rangle = \langle\alpha^\gamma_\nu, \eta^\gamma_\nu\rangle$. Dann gilt $F(\tau_\gamma(\nu), \gamma) = \eta$. Da $\eta < \kappa^+$ beliebig gewählt war, folgt nun $F"[Q]^2 = \kappa^+$ und daher $\kappa^+ \not\rightarrow [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$. Dann gilt aber auch $\kappa^+ \not\rightarrow [\kappa^+]^{<\omega}_{\kappa^+}$, also ist κ^+ keine Jónsson–Zahl.

□

Die Beweise der letzten beiden Sätze haben in wesentlicher Weise das Auswahlaxiom benutzt. In Kapitel 4 werden wir sehen, daß auf das Auswahlaxiom auch nicht verzichtet werden kann. Wir werden ein Modell angeben, in dem die Zahlen $\aleph_n$ für alle natürlichen Zahlen n Jónsson–Zahlen sind.

Kapitel 3

Mengenlehre ohne Auswahlaxiom und das Axiom der Determiniertheit

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Hilfsmittel für den Beweis des Hauptresultats in Kapitel 4, des Satzes von Kleinberg 4.1.1, bereitgestellt werden. Wichtig ist, daß diese Sätze ohne Verwendung des Auswahlaxioms bewiesen werden, da der Satz von Kleinberg aus Voraussetzungen folgen wird, die dem Auswahlaxiom widersprechen. Allerdings nehmen wir eine schwächere Form des Auswahlaxioms, nämlich das Axiom der abhängigen Auswahlen DC, an. Da die Voraussetzungen des Satzes von Kleinberg insbesondere unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit AD (vergleiche Abschnitte 3.3, 3.4 und 3.5) erfüllt sind, führt dies nicht zu Widersprüchen, denn AD und DC sind zusammen konsistent, falls ZSF + AD konsistent ist (vergleiche [Kechris, 1984]). Das Axiom der abhängigen Auswahlen setzen wir aus zwei Gründen voraus: Erstens gewährleistet es uns nach Satz 2.1.39 die Existenz normaler Ultrafilter auf meßbaren Kardinalzahlen. Außerdem impliziert DC das abzählbare Auswahlaxiom AC_ω. Dieses Axiom erlaubt es, abzählbar oft auszuwählen. Auch diese Eigenschaft wird an manchen Stellen sehr nützlich sein, beispielsweise für Lemma 3.2.8 und Abschnitt 4.5[1].

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir eine Partitionseigenschaft definieren, deren Erfülltsein dem Auswahlaxiom widerspricht. Sie wird vor allem in Abschnitt 3.4 und im gesamten Kapitel 4 eine wichtige Rolle spielen. Wir werden dann in Abschnitt 3.2 einige eher technischen Hilfssätze beweisen, die in Kapitel 4 sehr hilfreich sein werden. In Abschnitt 3.3 geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der unendlichen Spiele und der Determiniertheit. In den letzten beiden Abschnitten zeigen wir zwei Eigenschaften der Kardinalzahl $\aleph_1$, die sich aus dem Axiom der Determiniertheit ergeben. Zwar ist der Satz von Kleinberg in seiner allgemeinen Form unabhängig von Determiniertheit, jedoch zeigen diese beiden Eigenschaften von $\aleph_1$, daß die Voraussetzungen dieses Satzes insbesondere unter AD erfüllt sind. Dies ist die ursprüngliche Motivation des Satzes von Kleinberg. Insbesondere erhalten wir unter der Existenz von großen Kardinalzahlen ein Modell, in dem die Voraussetzungen des Satzes von Kleinberg erfüllt sind (vergleiche Satz 3.3.3 in Abschnitt 3.3).

[1] Wir bemerken, daß die Voraussetzung von DC nicht unverzichtbar ist, da die abzählbare Auswahl durch geschickte Konstruktion auch vermieden werden kann, und weil außerdem die von uns betrachteten meßbaren Kardinalzahlen meist auch die schwache Partitionseigenschaft besitzen. Nach Satz 3.1.4 gibt es dann auch ohne DC normale Ultrafilter. Da wir jedoch für viele unserer Sätze nur die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl verlangen, soll DC dennoch vorausgesetzt werden.

3.1 Die schwache Partitionseigenschaft

Der Satz von Kleinberg, den wir in Kapitel 4 beweisen wollen, fordert die Existenz einer Kardinalzahl, die die sogenannte schwache Partitionseigenschaft besitzt.

Definition 3.1.1 Eine Kardinalzahl κ besitzt die **schwache Partitionseigenschaft**, wenn $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ erfüllt ist[2].

Diese Eigenschaft widerspricht nach Satz 2.4.3 dem Auswahlaxiom. Die Existenz einer Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft hat sehr starke Konsequenzen.
Ein wichtiges Beispiel dafür ist der Satz von Kleinberg 4.1.1, der zeigt, daß dann eine unendliche Folge von Jónsson–Zahlen existiert, deren Supremum eine Rowbottom–Zahl ist.
Kardinalzahlen $\kappa > \aleph_0$, die die schwache Partitionseigenschaft besitzen, sind selbst schon meßbar. Dies soll in diesem Abschnitt gezeigt werden.
Wir beachten hierzu, daß eine Kardinalzahl κ, die die schwache Partitionseigenschaft besitzt, auch die Relation $\kappa \to (\kappa)^\gamma_2$ für alle $\gamma < \kappa$ erfüllt. Denn nach Proposition 2.4.2 ist κ schwach kompakt, also nach Lemma 2.4.7 regulär. Daher folgt, wieder aus Proposition 2.4.2, daß $\kappa \to (\kappa)^\gamma_2$ erfüllt ist.
Für jede überabzählbare Kardinalzahl κ gibt es eine kleinere, unendliche Kardinalzahl $\lambda < \kappa$, die regulär ist, nämlich $\aleph_0$. Somit sind die Voraussetzungen des folgenden Hilfssatzes insbesondere dann erfüllt, wenn $\kappa > \aleph_0$ die schwache Partitionseigenschaft hat.

Hilfssatz 3.1.2 Sei κ eine Kardinalzahl, $\lambda < \kappa$, wobei λ regulär sei, und $\kappa \to (\kappa)^{\lambda+\lambda}_2$. Dann gilt $\kappa \to (\kappa)^\lambda_\gamma$ für alle $\gamma < \kappa$.

Beweis: Für alle $x \in [\kappa]^{\lambda+\lambda}$ sei x_1 der erste Block von x der Länge λ und x_2 der zweite Block dieser Länge, d.h. es sei $x_1 := x \restriction \lambda$ und $x_2 \in [\kappa]^\lambda$ sei definiert durch $x_2(\alpha) := x(\lambda + \alpha)$ für alle $\alpha < \lambda$.
Sei $\gamma < \kappa$ beliebig, $F : [\kappa]^\lambda \to \gamma$. Wir definieren nun eine Funktion $G : [\kappa]^{\lambda+\lambda} \to 2$ durch

$$G(x) = 0 \iff F(x_1) = F(x_2).$$

G besitzt nach Voraussetzung eine homogene Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ. Da κ eine Kardinalzahl ist und H Ordnungstyp κ besitzt, kann H in κ Blöcke der Länge λ zerlegt werden. Wir nennen den α–ten Block x^α.
Wegen $\gamma < \kappa$ gibt es Ordinalzahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$, so daß $F(x^{\alpha_1}) = F(x^{\alpha_2})$ ist. Dann ist also $G(x^{\alpha_1} {}^\frown x^{\alpha_2}) = 0$, wodurch $G''[H]^{\lambda+\lambda} = \{0\}$ gezeigt ist.
Seien nun $x, y \in [H]^\lambda$. Nach Lemma 2.4.7 ist κ regulär, deshalb sind x und y nicht konfinal in κ. Also kann ein $z \in [H]^\lambda$ so gewählt werden, daß $x = (x {}^\frown z)_1, y = (y {}^\frown z)_1$ und $z = (x {}^\frown z)_2 = (y {}^\frown z)_2$ ist.
Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= F((x {}^\frown z)_1) = F((x {}^\frown z)_2) = F(z) \\ &= F((y {}^\frown z)_2) = F((y {}^\frown z)_1) \\ &= F(y). \end{aligned}$$

Also ist H auch homogen für F, womit $\kappa \to (\kappa)^\lambda_\gamma$ gezeigt ist.

□

[2] Diese Eigenschaft heißt "schwache Partitionseigenschaft", da sie eine Abschwächung der sogenannten **starken Partitionseigenschaft** einer Kardinalzahl κ ist, die besagt, daß $\kappa \to (\kappa)^\kappa_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ erfüllt ist. In der Literatur wird die Eigenschaft $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ auch oft als starke Partitionseigenschaft bezeichnet, während unter der schwachen Partitionseigenschaft die Eigenschaft $\kappa \to (\kappa)^\alpha_2$ für alle $\alpha < \kappa$ verstanden wird.

Um nun zu zeigen, daß jedes $\kappa > \aleph_0$ mit der schwachen Partitionseigenschaft meßbar ist, verwenden wir den durch die λ–abgeschlossenen, unbeschränkten Teilmengen von κ erzeugten Ultrafilter $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$.

Definition 3.1.3 Sei κ eine Kardinalzahl, $\lambda < \kappa$.
Eine Menge $C \subseteq \kappa$ heißt λ–abgeschlossen, wenn für alle $x \in [C]^\lambda$ auch $\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$ in C liegt.

Wir setzen nun

$$\mathcal{C}_\kappa^\lambda := \{X \subseteq \kappa;\ \exists C \subseteq X(\ C \text{ ist } \lambda\text{–abgeschlossen und unbeschränkt in } \kappa)\}.$$

Wir werden zeigen, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ein κ–vollständiger Ultrafilter auf κ ist, wenn κ eine überabzählbare Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft ist und $\lambda < \kappa$ regulär ist.
Insbesondere ist dann κ eine meßbare Kardinalzahl.

Satz 3.1.4 Sei $\kappa > \aleph_0$ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft, $\lambda < \kappa$, wobei λ regulär sei. Dann ist der Filter $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ein freier, κ–vollständiger, normaler Ultrafilter auf κ. Insbesondere ist κ meßbar.

Beweis: Sei $\lambda < \kappa$ regulär. Offensichtlich ist $\emptyset \notin \mathcal{C}_\kappa^\lambda$, $\kappa \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ und mit jeder Menge liegt auch jede Obermenge dieser Menge in $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$. Außerdem ist $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ frei. Denn für alle $\beta < \kappa$ gibt es eine Teilmenge von κ, die λ–abgeschlossen und unbeschränkt in κ ist und deren Elemente alle größer sind als β, also $\bigcap \mathcal{C}_\kappa^\lambda = \emptyset$.

Um die restlichen Eigenschaften von $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ nachzuprüfen, benötigen wir die folgende Eigenschaft: Sei $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ und

$$C := \{\beta < \kappa;\ \mathrm{Sup}(H \cap \beta) = \beta \ \&\ \ \mathrm{cf}(\beta) = \lambda\}.$$

Dann ist C eine λ–abgeschlossene Menge, die unbeschränkt in κ ist. Wir zeigen dies in zwei Schritten:

1. BEHAUPTUNG: C ist λ–abgeschlossen.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Sei $x := \langle \beta_\nu;\ \nu < \lambda \rangle \in [C]^\lambda$. Es muß gezeigt werden, daß $\beta := \mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$ in C liegt:

(1) $\beta = \mathrm{Sup}(H \cap \beta)$: Denn angenommen, $\beta > \mathrm{Sup}(H \cap \beta)$. Dann gibt es ein $\nu < \lambda$, so daß $\beta > \beta_\nu = \mathrm{Sup}(H \cap \beta_\nu) > \mathrm{Sup}(H \cap \beta)$ gilt, was nicht möglich ist.

(2) $\mathrm{cf}(\beta) = \lambda$: Nach Definition von β ist $\mathrm{cf}(\beta) \leq \lambda$. Angenommen, es gäbe eine aufsteigende Folge $\langle \xi_\varrho;\ \varrho < \eta \rangle$ der Länge $\eta < \lambda$, die konfinal in β liegt. Definiere dann eine Teilfolge $\langle \nu_\varrho;\ \varrho < \eta \rangle$ von λ durch $\nu_\varrho := \mathrm{Min}\{\nu < \lambda;\ \beta_\nu > \xi_\varrho\}$. Da $\langle \xi_\varrho;\ \varrho < \eta \rangle$ konfinal in β liegt, ist $\langle \nu_\varrho;\ \varrho < \eta \rangle$ konfinal in λ, was der Regularität von λ widerspricht.

Also ist $\beta \in C$, d.h. C ist λ–abgeschlossen.

2. BEHAUPTUNG: C ist unbeschränkt in κ.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Sei $\delta < \kappa$ beliebig. Da H vom Ordnungstyp κ ist, gibt es eine Folge $x = \langle \beta_\nu;\ \nu < \lambda \rangle \in [H]^\lambda$ mit $\beta_\nu > \delta$ für alle $\delta < \lambda$.
Setze $\beta := \mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$. Wie in der 1. Behauptung folgt, daß β die Konfinalität λ besitzt. Außerdem $\beta = \mathrm{Sup}(H \cap \beta)$. Also $\delta < \beta \in C$.

Mit Hilfe der schwachen Partitionseigenschaft können wir nun zeigen, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ κ–vollständig ist und für jede Teilmenge von κ entweder die Menge selbst oder ihr Komplement enthält: Nach Proposition 2.4.2 und Hilfssatz 3.1.2 gilt $\kappa \to (\kappa)^\lambda_\gamma$ für alle $\gamma < \kappa$. Sei nun $\gamma < \kappa$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß es für jede Funktion $F : \kappa \to \gamma$ ein $\alpha < \gamma$ gibt mit $(F^{-1})"\{\alpha\} \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$. Daraus folgt dann leicht, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ein κ–vollständiger Ultrafilter ist. Sei also $F : \kappa \to \gamma$.
Sei $G : [\kappa]^\lambda \to \gamma$ definiert durch $G(x) = F(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x)))$.
G besitzt eine homogene Menge H_1 vom Ordnungstyp κ. Sei $G"[H_1]^\lambda = \{\alpha\}$. Es wird sich zeigen, daß $(F^{-1})"\{\alpha\} \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ist.
Wir definieren die Menge $C_1 \subseteq \kappa$ durch

$$C_1 := \{\beta < \kappa;\ \mathrm{Sup}(H_1 \cap \beta) = \beta \ \&\ \ \mathrm{cf}(\beta) = \lambda\}.$$

Nach den ersten beiden Behauptungen ist C_1 eine λ–abgeschlossene Menge, die unbeschränkt in κ ist.

Es kann nun gezeigt werden, daß $C_1 \subseteq (F^{-1})"\{\alpha\}$ gilt: Sei $\beta \in C_1$. Dann ist $\mathrm{cf}(\beta) = \lambda$ und $\mathrm{Sup}(H_1 \cap \beta) = \beta$. Also gibt es eine Folge $x \in [H_1]^\lambda$ mit $\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x)) = \beta$. Wegen $G(x) = \alpha$ folgt nach Definition von G auch $F(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) = F(\beta) = \alpha$, also $\beta \in (F^{-1})"\{\alpha\}$ und somit $C_1 \subseteq (F^{-1})"\{\alpha\}$.

Jetzt ist gezeigt, daß $(F^{-1})"\{\alpha\}$ in $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ liegt.

Nun können wir zeigen, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ein κ–vollständiger Ultrafilter ist. Sei dazu wieder $\gamma < \kappa$ beliebig und $\{X_\alpha;\ \alpha < \gamma\}$ eine Partition von κ . Wir definieren eine Funktion $F : \kappa \to \gamma$ durch $F(\beta) = \alpha$ genau dann, wenn $\beta \in X_\alpha$ ist. Diese Funktion ist wohldefiniert. Nach dem, was oben gezeigt wurde, gibt es ein $\alpha < \gamma$, so daß $X_\alpha = (F^{-1})"\{\alpha\} \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ gilt. Nach Proposition 2.1.16 folgt, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ein κ–vollständiger Ultrafilter auf κ ist. Insbesondere ist κ meßbar.

Als letztes zeigen wir nun noch, daß $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$ normal ist. Wir benutzen dafür Hilfssatz 2.1.24: Sei $h : \kappa \to \kappa$ eine regressive Funktion, d.h. $h(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha < \kappa - \{0\}$. Wir definieren eine Partition $K : [\kappa]^\lambda \to 2$ durch

$$K(x) = 0 \iff h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) < \mathrm{Min}(\mathrm{Im}(x)).$$

Da $\kappa \to (\kappa)^\lambda_2$ erfüllt ist, gibt es eine homogene Menge $H_2 \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ für K. Wir zeigen, daß $K"[H_2]^\lambda = \{0\}$ gelten muß: Sei dazu $x \in [H_2]^\lambda$ und y die Aufzählung der Menge $\mathrm{Im}(x) - (h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x)))+1)$. Da h regressiv ist, gilt $h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) < \mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$, und da $\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$ eine Limeszahl ist, folgt auch $h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) + 1 < \mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))$. Da λ eine Kardinalzahl ist, ergibt sich daraus, daß $y \in [H_2]^\lambda$ ist. Nun gilt

$$\begin{aligned} h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(y))) &= h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) \\ &< \mathrm{Min}(\mathrm{Im}(y)) \end{aligned}$$

nach Definition von y. Also ist $K(y) = 0$ und daher $K"[H_2]^\lambda = \{0\}$.

Wir setzen nun $\delta := \mathrm{Min}(H_2)$ und

$$C_2 := \{\beta < \kappa;\ \mathrm{Sup}(H_2 \cap \beta) = \beta \ \&\ \ \mathrm{cf}(\beta) = \lambda\}.$$

Nach den ersten beiden Behauptungen ist C_2 λ–abgeschlossen und unbeschränkt in κ. Außerdem gilt $h"C_2 \subseteq \delta$: Sei $\beta \in C_2$. Nach Definition von C_2 gibt es eine aufsteigende Folge $x \in [H_2]^\lambda$ mit $\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x)) = \beta$. Da H_2 homogen für K ist, gilt dann

$$\begin{aligned} h(\beta) &= h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(x))) = h(\mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(\langle\delta\rangle {}^\frown x))) \\ &< \mathrm{Min}(\mathrm{Im}(\langle\delta\rangle {}^\frown x)) = \delta. \end{aligned}$$

Also ist $h"C_2 \subseteq \delta$. Damit gilt also $\bigcup_{\nu<\delta}(h^{-1})"\{\nu\} \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$. Nun folgt jedoch nach Proposition 2.1.16, daß es ein $\gamma < \delta$ gibt, so daß $(h^{-1})"\{\gamma\} \in \mathcal{C}_\kappa^\lambda$ ist. Nach Hilfssatz 2.1.24 folgt nun die Normalität von $\mathcal{C}_\kappa^\lambda$.

□

Wir wissen nun nicht nur, daß jede Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft meßbar ist, sondern zusätzlich, daß es normale, κ–vollständige Ultrafilter auf κ gibt. In Kapitel 4 wird die Existenz eines solchen Filters eine grundlegende Voraussetzung sein. Zwar ist schon nach Satz 2.1.39 bekannt, daß es normale, κ–vollständige Ultrafilter auf meßbaren Kardinalzahlen gibt, jedoch verwendet der Beweis dieses Satzes DC. Auf diese Voraussetzung kann nach dem eben bewiesenen Satz 3.1.4 verzichtet werden, wenn die betrachtete meßbare Kardinalzahl zusätzlich die schwache Partitionseigenschaft besitzt.

3.2 Mengenlehre ohne Auswahlaxiom

Wir zeigen nun einige Hilfssätze, die ohne Verwendung des Auswahlaxioms beweisbar sind. Viele der Sätze fordern allerdings die Existenz großer Kardinalzahlen. Zunächst werden wir einige Eigenschaften betrachten, die sich aus der Existenz eines normalen Ultrafilters auf einer meßbaren Kardinalzahl κ für Folgen der Länge κ ergeben. Darauf werden wir ein Resultat von James M. Henle beweisen. Danach zeigen wir noch zwei Sätze, die unter Voraussetzung des Auswahlaxioms trivial sind. In unserer auswahlfreien Situation dagegen sind zum Beweis einige technische Überlegungen erforderlich. Beide Sätze setzen ebenfalls die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl voraus.

3.2.1 Hilfssätze

Im folgenden sei κ eine meßbare Kardinalzahl mit einem normalen Ultrafilter $\mathcal{C}$. M sei eine durch $<$ wohlgeordnete Menge.
Wir werden zunächst drei Sätze beweisen, die alle das Ausdünnen von Folgen der Länge κ in M betreffen. So zeigt der folgende Hilfssatz, daß eine Folge der Länge κ um eine Nullmenge ausgedünnt werden kann, und die dabei entstehende Folge immer noch $\mathcal{C}$–fast überall mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Hilfssatz 3.2.1 Seien $f, g \in [M]^\kappa$, $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ und $\{\alpha < \kappa;\ f(\alpha) \in \mathrm{Im}(g)\} \in \mathcal{C}$. Dann gilt: $f = g$ $\mathcal{C}$–fast überall, d.h. $f(\alpha) = g(\alpha)$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$.

Beweis:
Sei $C := \{\alpha < \kappa;\ f(\alpha) \in \mathrm{Im}(g)\} \in \mathcal{C}$. Definiere eine Funktion $w : \kappa \to \kappa$ durch

$$\begin{array}{rcl} w(\alpha) & := & \beta \iff f(\alpha) = g(\beta), \quad \text{falls } \alpha \in C \\ w(\alpha) & := & 0 \quad \text{sonst.} \end{array}$$

Wegen $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ ist $w(\alpha) \leq \alpha$ für alle $\alpha < \kappa$.
Angenommen, $w(\alpha) < \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$. Dann gibt es nach Hilfssatz 2.1.24 wegen der Normalität von $\mathcal{C}$ ein $\beta_0 < \kappa$, so daß $w(\alpha) = \beta_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$ ist. Da $\kappa - C \notin \mathcal{C}$ ist, bedeutet das: $f(\alpha) = g(\beta_0)$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$. Da f streng monoton ist, ist dies nicht möglich!
Also $w(\alpha) = \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$, d.h. $f(\alpha) = g(\alpha)$ für $\mathcal{C}$–fast alle α, was die Behauptung beweist.

□

Aus Hilfssatz 3.2.1 ergeben sich nun zwei weitere Hilfssätze, die zeigen, daß man Folgen so ausdünnen kann, daß sie besonders regelmäßige Eigenschaften besitzen und trotzdem im wesentlichen gleichbleiben.

Hilfssatz 3.2.2 Sei $m \in \omega$, $f_1, ..., f_m \in [M]^\kappa$ und $f_k < f_{k+1}$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle k mit $1 \leq k < m$. Dann gibt es Funktionen $g_1, ..., g_m \in [M]^\kappa$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f_k = g_k$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle k mit $1 \leq k \leq m$,

(2) $\mathrm{Im}(g_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k)$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$,

(3) $g_k(\alpha) < g_{k+1}(\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$ und $1 \leq k < m$.

Beweis:
Sei $C_k := \{\alpha < \kappa;\ f_k(\alpha) < f_{k+1}(\alpha)\}$ für alle k mit $1 \leq k < m$. Nach Voraussetzung liegen alle Mengen C_k in $\mathcal{C}$, also auch $C := \bigcap_{1 \leq k < m} C_k \in \mathcal{C}$. Sei nun $b : \kappa \to C$ eine ordnungserhaltende Bijektion. Definiere Funktionen $g_k \in [M]^\kappa$ durch

$$g_k(\alpha) := f_k(b(\alpha)) \quad \text{für alle } \alpha < \kappa.$$

Dann gilt $\mathrm{Im}(g_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k)$ für alle k. Außerdem ist $\{\alpha < \kappa;\ f_k(\alpha) \in \mathrm{Im}(g)\} = C \in \mathcal{C}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$. Nach Hilfssatz 3.2.1 gilt also $g_k = f_k$ $\mathcal{C}$–fast überall. Außerdem ist $g_k(\alpha) = f_k(b(\alpha)) < f_{k+1}(b(\alpha)) = g_{k+1}(\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$ und $1 \leq k < m$. Somit hat man Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

□

Der nächste Hilfssatz ist eine Verschärfung von Hilfssatz 3.2.2.

Hilfssatz 3.2.3 Sei $m \in \omega$, $f_1, ..., f_m \in [M]^\kappa$ und $f_k < f_{k+1}$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle k mit $1 \leq k < m$. Dann gibt es Funktionen $g_1, ..., g_m \in [M]^\kappa$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $f_k = g_k$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle k mit $1 \leq k \leq m$,

(2) $\mathrm{Im}(g_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k)$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$,

(3) $g_k(\alpha) < g_{k+1}(\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$ und $1 \leq k < m$,

(4) $g_m(\beta) < g_1(\alpha)$ für alle $\beta < \alpha$.

Beweis:
Nach Hilfssatz 3.2.2 kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Funktionen $f_1, ..., f_m$ schon die Eigenschaft (3) besitzen.
Wir definieren nun eine Folge $\langle \alpha_\beta;\ \beta < \kappa \rangle$ in κ durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= 0 \\ \alpha_\beta &:= \mathrm{Min}\{\alpha < \kappa;\ f_1(\alpha) > f_m(\alpha_\nu) \text{ für alle } \nu < \beta\} \quad \text{für alle } \beta < \kappa. \end{aligned}$$

Diese Folge ist wohldefiniert, da $\mathrm{Im}(f_k)$ für alle k konfinal in κ liegt.
Nun sei $g_k(\beta) := f_k(\alpha_\beta)$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$. Die dadurch definierten Funktionen g_k erfüllen die Eigenschaften (2), (3) und (4). Zu zeigen bleibt also noch, daß $f_k = g_k$ $\mathcal{C}$–fast überall gilt für alle k.
Definiere dazu eine Funktion $w : \kappa \to \kappa$ wie folgt:

$$w(\beta) := \mathrm{Min}\{\nu < \kappa;\ f_1(\beta) \leq f_m(\alpha_\nu)\}.$$

Wegen $\alpha_\beta \geq \beta$ für alle $\beta < \kappa$ ist $f_1(\beta) \leq f_1(\alpha_\beta) < f_m(\alpha_\beta)$, also $w(\beta) \leq \beta$.
Angenommen $w(\beta) < \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Da $\mathcal{C}$ normal ist, gibt es dann nach Hilfssatz 2.1.24 ein ν_0 mit $w(\beta) = \nu_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Also gilt $f_1(\beta) \leq f_m(\alpha_{\nu_0})$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Da $\mathrm{Im}(f_1)$ konfinal in κ liegt und f_1 aufsteigend ist, ist dies nicht möglich!
Also folgt $w(\beta) = \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. D.h. für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ gilt $f_1(\beta) > f_m(\alpha_\nu)$ für alle $\nu < \beta$. Also gilt $\alpha_\beta \leq \beta$ nach Definition der Zahlen α_β. Da jedoch $\beta \leq \alpha_\beta$ ist für alle $\beta < \kappa$, folgt $\alpha_\beta = \beta$ für alle β aus einer Menge $C \in \mathcal{C}$.

Dies bedeutet $g_k(\beta) = f_k(\alpha_\beta) = f_k(\beta)$ für alle $\beta \in \mathcal{C}$. Also gilt $g_k = f_k$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle k mit $1 \leq k \leq m$. Somit erfüllen die Funktionen g_k auch Eigenschaft (1).

□

Der folgende Hilfssatz zeigt, daß eine Funktion von κ in κ, deren Bildbereich kleinere Mächtigkeit als κ besitzt, schon $\mathcal{C}$–fast überall konstant ist.

Hilfssatz 3.2.4 Sei $f \in \kappa^\kappa$, $C \in \mathcal{C}$ und $|\mathrm{Im}(f{\restriction}C)| < \kappa$. Dann ist f $\mathcal{C}$–fast überall konstant.

Beweis:
Der Ordnungstyp von $\mathrm{Im}(f{\restriction}C)$ sei $\eta < \kappa$. Wir definieren für alle $\alpha \in \mathrm{Im}(f{\restriction}C)$ die Menge $C_\alpha := \{\beta < \kappa;\ f(\beta) = \alpha\}$. Dadurch sind η Mengen definiert, wobei $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Im}(f{\restriction}C)} C_\alpha = C \in \mathcal{C}$ gilt. Da $\mathcal{C}$ ein κ–vollständiger Ultrafilter ist, gibt es nach Proposition 2.1.16 ein $\alpha \in \mathrm{Im}(f{\restriction}C)$, so daß $C_\alpha \in \mathcal{C}$ ist. Somit ist gezeigt, daß f auf einer Menge aus $\mathcal{C}$ konstant ist.

□

3.2.2 Ein Satz von Henle

Der Satz von Kleinberg, den wir in Kapitel 4 beweisen werden, wird die Existenz einer Kardinalzahl κ mit der schwachen Partitionseigenschaft voraussetzen. Diese Eigenschaft wird dort eingesetzt werden, um für abzählbar viele Partitionen $G_n : [\kappa]^\kappa \to 2$ eine homogene Menge zu finden. Die schwache Partitionseigenschaft gibt zwar sofort für jede dieser Partitionen eine homogene Menge vom Ordnungstyp κ, jedoch ist nicht von vornherein klar, daß es auch eine simultan für alle diese Funktionen homogene Menge vom Ordnungstyp κ gibt.
In der ersten Version seines Beweises mußte Kleinberg daher die betrachteten abzählbar vielen Funktionen genau analysieren, damit eine solche simultan homogene Menge gefunden werden konnte. Eine große Vereinfachung des Beweises bedeutete ein Resultat von Henle, das wir in diesem Abschnitt beweisen werden. Es besagt, daß unter Voraussetzung der schwachen Partitionseigenschaft von κ für beliebige, abzählbar viele Partitionen $G_n : [\kappa]^\kappa \to 2$ immer eine Menge gefunden werden kann, die homogen für alle diese Partitionen ist.
Die folgende Darstellung beruht auf den Arbeiten [KLEINBERG, 1977b] und [KLEINBERG, 1977a] von Eugene M. Kleinberg.
Eine grundlegende Bedeutung haben im folgenden für eine reguläre Kardinalzahl κ die sogenannten ω–Limiten von Folgen aus $[\kappa]^\kappa$:

Definition 3.2.5 Sei κ eine reguläre Kardinalzahl.

(1) Für $p \in [\kappa]^\kappa$ definieren wir eine Menge $K_p := \{\mathrm{Sup}\{p(\omega \cdot \alpha + n);\ n \in \omega\}\ ;\ \alpha < \kappa\}$.

(2) $\Lambda_\omega(p) \in \kappa^\kappa$ sei definiert durch

$$(\Lambda_\omega(p))(\alpha) := \mathrm{Sup}\{p(\omega \cdot \alpha + n);\ n \in \omega\}.$$

Wir nennen $\Lambda_\omega(p)$ die Folge der ω–**Limiten** von p.

Wir werden als nächstes zeigen, daß die Folge $\Lambda_\omega(p)$ der ω–Limiten für ein $p \in [\kappa]^\kappa$ strikt aufsteigend ist. Dazu verwenden wir die folgenden Grundrechenregeln für Ordinalzahlarithmetik:

Satz 3.2.6 Es gelten die folgenden Gesetze der Ordinalzahlarithmetik:

(1) Für alle Ordinalzahlen α, β und γ mit $1 \leq \alpha$ und $\beta < \gamma$ gilt $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

(2) Für je zwei Ordinalzahlen $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 1$ gibt es Ordinalzahlen γ und $\delta < \beta$ mit $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$. Dabei sind γ und δ eindeutig bestimmt.

Beweis: Vergleiche [FELGNER, 1996, Proposition 10.7 und Proposition 10.8].

□

Nun folgt die strenge Monotonie von $\Lambda_\omega(p)$:

Proposition 3.2.7 Sei κ regulär und $p \in [\kappa]^\kappa$. Dann ist auch $\Lambda_\omega(p) \in [\kappa]^\kappa$, d.h. die Funktion $\Lambda_\omega(p)$ ist die Aufzählung der Menge K_p.

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \kappa$ mit $\alpha < \beta$. Wir wollen zeigen, daß $(\Lambda_\omega(p))(\alpha) < (\Lambda_\omega(p))(\beta)$ gilt. Es gilt $\omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta$ nach Proposition 3.2.6. Da jedoch $\omega \cdot \beta$ eine Limesordinalzahl ist, gilt auch $\omega \cdot \alpha + n < \omega \cdot \beta$ für alle natürlichen Zahlen n und somit, da p ordnungserhaltend ist, auch $p(\omega \cdot \alpha + n) < p(\omega \cdot \beta)$. Also $\mathrm{Sup}\{p(\omega \cdot \alpha + n);\ n \in \omega\} \leq p(\omega \cdot \beta)$. Nun gilt aber $\mathrm{Sup}\{p(\omega \cdot \alpha + n);\ n \in \omega\} < \mathrm{Sup}\{p(\omega \cdot \beta + n);\ n \in \omega\}$ und somit $(\Lambda_\omega(p))(\alpha) < (\Lambda_\omega(p))(\beta)$.

□

Für eine reguläre Kardinalzahl κ definieren wir eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}([\kappa]^\kappa)$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \quad := \quad & \{M \subseteq [\kappa]^\kappa;\ \text{es gibt ein } p \in [\kappa]^\kappa, \text{ so daß} \\ & \Lambda_\omega(q) \in M \text{ gilt für alle } q \in [\kappa]^\kappa \text{ mit } \mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p)\} \end{aligned}$$

Wir werden nun zunächst zeigen, daß die Menge $\mathcal{F}$ ein Filter auf $[\kappa]^\kappa$ ist:

Lemma 3.2.8 (Mit AC_ω)
Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Dann ist $\mathcal{F}$ ein σ–vollständiger Filter auf $[\kappa]^\kappa$.

Beweis:
(1) Es gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $[\kappa]^\kappa \in \mathcal{F}$: Trivialerweise ist $\emptyset$ kein Element von $\mathcal{F}$.
Für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ gilt $\Lambda_\omega(q) \in [\kappa]^\kappa$ nach Proposition 3.2.7. Daher ist $[\kappa]^\kappa \in \mathcal{F}$.

(2) Wenn $M \in \mathcal{F}$ und $M \subseteq N \subseteq [\kappa]^\kappa$ gilt, dann ist auch $N \in \mathcal{F}$: Es gibt ein $p \in [\kappa]^\kappa$ so daß $\Lambda_\omega(q) \in M$ ist für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p)$. Also gilt wegen $M \subseteq N$ auch $\Lambda_\omega(q) \in N$ für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p)$. Daher ist $N \in \mathcal{F}$.

(3) $\mathcal{F}$ ist σ–vollständig:
Sei $\{M_k\ ;\ k \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Zu zeigen ist $\bigcap_{k\in\omega} M_k \in \mathcal{F}$. Da AC_ω vorausgesetzt wurde, kann man für jedes $k \in \omega$ eine Funktion $p_k \in [\kappa]^\kappa$ wählen, so daß $\Lambda_\omega(q) \in M_k$ gilt für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p_k)$.

Wir definieren rekursiv Funktionen $f_k \in [\kappa]^\kappa$: Es sei $f_0(0) := p_0(0)$ und

$$f_k(0) := \mathrm{Min}\{\gamma \in \mathrm{Im}(p_k);\ \gamma > f_\ell(0) \text{ für alle } \ell < \kappa\}$$

für $k > 0$. Für $0 < \alpha < \kappa$ und $k \in \omega$ sei

$$\begin{aligned} f_k(\alpha) \quad := \quad & \mathrm{Min}\{\gamma \in \mathrm{Im}(p_k);\ \gamma > f_\ell(\alpha) \text{ für alle } \ell < k \text{ und} \\ & \gamma > f_j(\beta) \text{ für alle } \beta < \alpha, j \in \omega\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $f_k \in [\kappa]^\kappa$ sind wohldefiniert, da κ nach Voraussetzung regulär ist.
Außerdem erfüllen die Funktionen die folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{Im}(f_k) \subseteq \mathrm{Im}(p_k)$

(b) $f_k(\alpha) < f_\ell(\alpha) < f_k(\alpha+1)$ für alle $\alpha < \kappa$ und $k < \ell$.

Sei q mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(f_0)$ beliebig. Dann gibt es für alle $k \in \omega$ ein q_k mit $\mathrm{Im}(q_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k)$ und $\Lambda_\omega(q_k) = \Lambda_\omega(q)$: Sei $k > 0$. Nach Eigenschaft (b) und wegen $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(f_0)$ gibt es für alle $\alpha < \kappa$ ein η, so daß $q(\alpha) < f_k(\eta) < q(\alpha+1)$ ist. Sei $\eta_\alpha := \mathrm{Min}\{\eta < \kappa;\ q(\alpha) < f_k(\eta) < q(\alpha+1)\}$ und definiere q_k durch $q_k(\alpha) := f_k(\eta_\alpha)$.
Dann gilt $K_q = K_{q_k}$. Denn für alle $\alpha < \kappa$ und $n \in \omega$ ist $q(\omega\cdot\alpha+n) < q_k(\omega\cdot\alpha+n) < q(\omega\cdot\alpha+n+1) < q_k(\omega\cdot\alpha+n+1)$, also $\mathrm{Sup}\{q(\omega\cdot\alpha+n);\ n\in\omega\} = \mathrm{Sup}\{q_k(\omega\cdot\alpha+n);\ n\in\omega\}$ für alle $\alpha < \kappa$.
Aus $K_q = K_{q_k}$ folgt jedoch $\Lambda_\omega(q) = \Lambda_\omega(q_k)$, da diese Funktionen nach Proposition 3.2.7 die Aufzählungen der Mengen K_q bzw. K_{q_k} sind.

Nach Eigenschaft (a) gilt $\mathrm{Im}(q_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k) \subseteq \mathrm{Im}(p_k)$. Also ist $\Lambda_\omega(q) = \Lambda_\omega(q_k) \in M_k$ nach Wahl von p_k. D.h. für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(f_0)$ ist $\Lambda_\omega(q) \in \bigcap_{k\in\omega} M_k$. Somit gilt $\bigcap_{k\in\omega} M_k \in \mathcal{F}$, womit die σ–Vollständigkeit gezeigt ist.

(4) Wenn $M, N \in \mathcal{F}$ ist, dann gilt auch $M \cap N \in \mathcal{F}$. Dies folgt insbesondere aus (3).

Also ist $\mathcal{F}$ ein σ–vollständiger Filter auf $[\kappa]^\kappa$.

□

Wir benötigen den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 3.2.9 Sei $q \in [\kappa]^\kappa,\ r \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(r) \subseteq \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(q))$.
Dann gibt es ein $p \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(q)$, so daß $r = \Lambda_\omega(p)$ gilt.

Beweis:
Wir setzen $X := \{\beta < \kappa;\ \mathrm{Sup}\{q(\omega\cdot\beta+n);\ n\in\omega\} \in \mathrm{Im}(r)\}$. Da $\mathrm{Im}(r)$ wegen $r \in [\kappa]^\kappa$ und der Regularität von κ eine Menge vom Ordnungstyp κ ist, und weil außerdem $\mathrm{Im}(r) \subseteq \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(q))$ gilt, ist X ebenfalls eine Menge vom Ordnungstyp κ, und somit gibt es eine ordnungserhaltende Bijektion $\psi : \kappa \to X$. Wir definieren dann die Funktion $p \in [\kappa]^\kappa$ durch

$$p(\omega\cdot\alpha+n) := q(\omega\cdot\psi(\alpha)+n)$$

für alle $\alpha < \kappa$ und alle natürlichen Zahlen n. Hierdurch ist die Funktion p auf ganz κ definiert, da es nach Proposition 3.2.6 für jede Ordinalzahl β genau eine Ordinalzahl α und eine natürliche Zahl n gibt mit $\beta = \omega\cdot\alpha+n$. Die Funktion p ist strikt aufsteigend, da q und ψ strikt aufsteigend sind und nach Proposition 3.2.6 $\omega\cdot\alpha_1 < \omega\cdot\alpha_2$ für alle $\alpha_1 < \alpha_2$ gilt. Offensichtlich gilt auch $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(q)$. Es ist nun $K_p = \mathrm{Im}(r)$: Sei $\gamma \in K_p$. Dann gibt es nach Definition von K_p ein $\alpha < \kappa$ mit $\gamma = \mathrm{Sup}\{p(\omega\cdot\alpha+n);\ n\in\omega\} = \mathrm{Sup}\{q(\omega\cdot\psi(\alpha)+n);\ n\in\omega\}$. Nun ist aber $\psi(\alpha) \in X$, also $\gamma \in \mathrm{Im}(r)$. Somit ist gezeigt, daß K_p eine Teilmenge von $\mathrm{Im}(r)$ ist. Ist andererseits $\gamma \in \mathrm{Im}(r)$, so gibt es ein $\beta \in X$ mit $\mathrm{Sup}\{q(\omega\cdot\beta+n);\ n\in\omega\} = \gamma$. Da ψ bijektiv ist, gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $\psi(\alpha) = \beta$. Dann ist also $\gamma = \mathrm{Sup}\{q(\omega\cdot\beta+n);\ n\in\omega\} = \mathrm{Sup}\{p(\omega\cdot\alpha+n);\ n\in\omega\} \in K_p$. Also ist auch $\mathrm{Im}(r)$ eine Teilmenge von K_p, also $K_p = \mathrm{Im}(r)$. Aber r ist als strikt aufsteigende Funktion die Aufzählung von $\mathrm{Im}(r)$. Die Folge $\Lambda_\omega(p)$ der ω–Limiten ist aber nach Proposition 3.2.7 ebenfalls die Aufzählung von $\mathrm{Im}(r) = K_p$, also gilt $\Lambda_\omega(p) = r$.

□

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß κ eine reguläre Kardinalzahl ist. Im folgenden soll κ sogar die schwache Partitionseigenschaft besitzen, d.h. $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$. Dann ist κ insbesondere regulär, denn nach Satz 3.1.4 ist κ meßbar, und jede meßbare Kardinalzahl ist nach Satz 2.1.38 regulär.

Die Idee ist nun, zu zeigen, daß für jede Partition $G : [\kappa]^\kappa \to 2$ die Menge der Aufzählungen ihrer κ–mächtigen homogenen Mengen ein Element von $\mathcal{F}$ ist. Sind dann abzählbar viele Partitionen gegeben, so liegt der Schnitt dieser Filtermengen wegen der σ–Vollständigkeit ebenfalls in $\mathcal{F}$, ist also insbesondere nicht leer. Jedes Element aus diesem Schnitt ist jedoch die Aufzählung einer für jede der gegebenen Partitionen homogenen Menge, und eine simultan für alle gegebenen Funktionen homogene Menge ist gefunden.
Für jede κ–mächtige Teilmenge H bezeichne $f_H \in [\kappa]^\kappa$ die eindeutig bestimmte, strikt aufsteigende Aufzählung von H.
Ist eine Partition $G : [\kappa]^\kappa \to 2$ gegeben, so sei

$$M_G := \{f_H;\ H \text{ ist homogen für } G \text{ und } |H| = \kappa\}$$

die Menge aller Aufzählungen von homogenen Mengen von G, die Mächtigkeit κ besitzen.
Als nächstes zeigen wir nun also, daß für jede Partition $G : [\kappa]^\kappa \to 2$ die Menge M_G Element des Filters $\mathcal{F}$ ist.

Lemma 3.2.10 Sei κ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft, $G : [\kappa]^\kappa \to 2$ eine Partition. Dann ist die Menge M_G ein Element von $\mathcal{F}$.

Beweis:
Wir definieren eine Partition $F : [\kappa]^\kappa \to 2$ durch

$$F(p) := G(\Lambda_\omega(p)) \text{ für alle } p \in [\kappa]^\kappa.$$

Da κ die schwache Partitionseigenschaft besitzt, kann eine homogene Menge X für F vom Ordnungstyp κ gewählt werden.

Wir zeigen, daß f_X die folgende Eigenschaft besitzt:
Ist $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(f_X)$, dann ist $\Lambda_\omega(q) \in M_G$. Daraus folgt dann $M_G \in \mathcal{F}$.

Sei also $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(f_X)$. Um zu zeigen, daß $H := \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(q))$ homogen für G ist, wählen wir $r_1, r_2 \in [H]^\kappa$.
Nach Hilfssatz 3.2.9 gibt es Funktionen $p_1, p_2 \in [X]^\kappa$ mit $\Lambda_\omega(p_1) = r_1$ und $\Lambda_\omega(p_2) = r_2$.
Dann gilt:

$$G(r_1) = G(\Lambda_\omega(p_1)) = F(p_1) = F(p_2) = G(\Lambda_\omega(p_2)) = G(r_2).$$

Also ist $H = \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(q))$ homogen für G und somit $\Lambda_\omega(q) \in M_G$.
Es ist nun gezeigt, daß es eine Funktion $p := f_X \in [\kappa]^\kappa$ gibt, so daß $\Lambda_\omega(q) \in M_G$ gilt für alle $q \in [\kappa]^\kappa$ mit $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p)$. Also ist $M_G \in \mathcal{F}$.

□

Wegen der σ–Vollständigkeit von $\mathcal{F}$ ist nun die Existenz simultan homogener Mengen für abzählbar viele Partitionen beinahe offensichtlich:

Satz 3.2.11 (Mit AC_ω) κ besitze die schwache Partitionseigenschaft.
Gegeben sei für jede natürliche Zahl n eine Partition $G_n : [\kappa]^\kappa \to 2$.
Dann gibt es eine Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, die für alle Funktionen G_n homogen ist.

Beweis:
Nach Lemma 3.2.10 gilt $M_{G_n} \in \mathcal{F}$ für alle natürlichen Zahlen n. Da wir AC_ω vorausgesetzt haben, ist $\mathcal{F}$ ein σ–vollständiger Filter, also gilt auch $\bigcap_{n\in\omega} M_{G_n} \in \mathcal{F}$, insbesondere $\bigcap_{n\in\omega} M_{G_n} \neq \emptyset$. Wir wählen ein $f \in \bigcap_{n\in\omega} M_{G_n}$ beliebig. Dann ist $H := \mathrm{Im}(f)$ homogen für alle G_n.

□

Daraus ergibt sich nun sehr einfach eine weitere Partitionseigenschaft von κ:

Satz 3.2.12 (Mit AC_ω)
Sei κ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft.
Dann gilt: $\kappa \to (\kappa)^\kappa_{2^{\aleph_0}}$.

Beweis:
Sei $F : [\kappa]^\kappa \to 2^{\aleph_0}$ gegeben.
Wir definieren für alle $n \in \omega$ eine Funktion $F_n : [\kappa]^\kappa \to 2$ durch

$$F_n(f) := (F(f))(n) \quad \text{für alle } f \in [\kappa]^\kappa.$$

Nach Satz 3.2.11 gibt es eine Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, die für alle Funktionen F_n homogen ist. Dann ist H auch homogen für F. Denn seien $f, g \in [H]^\kappa$ beliebig. Dann gilt für alle $n \in \omega$:

$$(F(f))(n) = F_n(f) = F_n(g) = (F(g))(n),$$

also $F(f) = F(g)$.

□

Als direktes Korollar erhält man das folgende Lemma:

Korollar 3.2.13 κ erfülle die schwache Partitionseigenschaft.
Dann gilt auch $\kappa \to (\kappa)^\kappa_\alpha$ für alle $\alpha < \aleph_1$.

Beweis: Nach Satz 3.2.12 gilt $\kappa \to (\kappa)^\kappa_{2^{\aleph_0}}$. Aus Proposition 2.4.1, Eigenschaft (3), folgt dann die Behauptung, da alle $\alpha < \aleph_1$ in $2^{\aleph_0}$ einbettbar sind.

□

3.2.3 Das Misch– und Sortierlemma

Eine der Schwierigkeiten, denen man beim Arbeiten mit dem Axiom der Determiniertheit stets begegnet, ist, daß es dem Auswahlaxiom widerspricht. Da in der Mathematik, insbesondere in der kombinatorischen Mengenlehre, im allgemeinen in Modellen von AC gearbeitet und das Auswahlaxiom häufig ohne besondere Erwähnung benutzt wird, ist in auswahlfreien Kontexten eine gesonderte Überprüfung vieler Sachverhalte notwendig. In diesem Abschnitt wollen wir ein paar im folgenden häufig benutzte kombinatorische Fakten beweisen, die auch ohne Auswahlaxiom ihre Gültigkeit behalten. Da bei ihren Beweisen üblicherweise zumeist nicht darauf geachtet wird, ob das Auswahlaxiom benutzt wird, werden wir diese Sätze hier mit Beweis anführen, wobei wir besonderen Wert auf die Vermeidung des Auswahlaxioms legen. Im gesamten Abschnitt sei κ eine meßbare Kardinalzahl und $\mathcal{C}$ ein normaler, κ–vollständiger Ultrafilter auf κ. Ein solcher Filter existiert mit DC für jede meßbare Kardinalzahl nach Satz 2.1.39.
In diesem und auch in den folgenden Abschnitten werden wir Folgen von Funktionen betrachten, die in einem gewissen Sinne aufsteigend sind. Auf $[\kappa]^\kappa$ kann keine natürliche Ordnung definiert werden. Wir werden trotzdem von strikt aufsteigenden Folgen in $[\kappa]^\kappa$ sprechen: Eine Folge $\langle f_\nu;\ \nu < \alpha\rangle$ in $[\kappa]^\kappa$ heißt strikt aufsteigend, wenn $f_{\nu_1} < f_{\nu_2}$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\nu_1 < \nu_2 < \alpha$ gilt. Wir schreiben auch $\langle f_\nu;\ \nu < \alpha\rangle \in [[\kappa]^\kappa]^\alpha$.

Hilfssatz 3.2.14 Sei $f : \kappa \to [\kappa]^2$ eine Funktion, so daß für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ gilt: Wenn $f(\beta) = \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ gilt, dann ist $\mathrm{Max}\{\beta_1, \beta_2\} < \beta$.
Dann gibt es ein Paar $\langle \nu_1, \nu_2\rangle$ mit $f(\beta) = \langle \nu_1, \nu_2\rangle$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$.

Beweis:
Definiere Funktionen $f_1, f_2: \ \kappa \to \kappa$ durch

$$f_1(\beta) := \beta_1 \text{ und } f_2(\beta) := \beta_2 \iff f(\beta) = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle.$$

Da $\mathcal{C}$ ein normaler Ultrafilter ist und nach Voraussetzung $f_1(\beta) < \beta$ und $f_2(\beta) < \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ gilt, gibt es Mengen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ und $\nu_1, \nu_2 \in \kappa$, so daß $f_1(\beta) = \nu_1$ für alle $\beta \in C_1$ und $f_2(\beta) = \nu_2$ für alle $\beta \in C_2$ gilt. Dann ist $f(\beta) = \langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$.

□

Eine wichtige Technik, die in der kombinatorischen Mengenlehre häufig benutzt wird, ist das Kodieren von Folgen bestimmter Objekte durch ein einziges solches Objekt, z.B. abzählbarer Folgen reeller Zahlen durch eine reelle Zahl. In unserem Zusammenhang benötigen wir diese Technik, um Folgen κ–langer, aufsteigender Folgen in κ durch eine einzige solche Folge zu kodieren. Dies wird die Aussage des folgenden, von uns sehr oft verwendeten Misch– und Sortierlemmas sein:

Misch– und Sortierlemma 3.2.15 Sei eine Ordinalzahl α mit $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ gegeben. Dann gibt es für jede Bijektion $h : \kappa \to \alpha$ Funktionen $\mathrm{Sort}^h_\alpha : \ [\kappa]^\kappa \to [[\kappa]^\kappa]^\alpha$ und $\mathrm{Misch}^h_\alpha : [[\kappa]^\kappa]^\alpha \to [\kappa]^\kappa$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es gilt $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)) = f$ für alle $f \in [\kappa]^\kappa$.

(2) Wenn $\langle g_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle = \mathrm{Sort}^h_\alpha(\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle))$ ist, dann gilt $f_\eta = g_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\eta < \alpha$.

(3) Wenn H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ ist, dann gilt: Für $f \in [H]^\kappa$ und $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f) = \langle f_\eta ; \ \eta < \alpha \rangle$ ist $f_\eta(\beta) \in H$ für $\mathcal{C}$–fast alle β und alle η. Ist umgekehrt $\langle f_\eta ; \ \eta < \alpha \rangle \in [[H]^\kappa]^\alpha$, so ist $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta ; \ \eta < \alpha \rangle) \in [H]^\kappa$.

Beweis:
Sei $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ und $h : \ \kappa \to \alpha$ eine Bijektion.
Die Ordnung $<_h$ auf κ sei durch $\nu_1 <_h \nu_2 \iff h(\nu_1) < h(\nu_2)$ definiert.

Nun wird zunächst die Funktion Sort^h_α definiert. Sei $f \in [\kappa]^\kappa$ gegeben. Wir werden aus f eine Folge $\langle f_\eta ; \eta < \alpha \rangle$ der Länge α konstruieren. Die Idee hierbei ist, die Funktionswerte von f auf eine $\kappa \times \alpha$–Matrix zu verteilen. Zeile für Zeile wird dabei die Matrix mit den der Größe nach geordneten Elementen aus $\mathrm{Im}(f)$ gefüllt. Die α Spalten dieser Matrix ergeben dann $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)$. D.h. für jedes $\eta < \alpha$ ist die Aufzählung der η–ten Spalte gerade die Funktion f_η. Da ausschließlich Funktionswerte von f verwendet wurden, ist aus dieser Konstruktion von $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)$ die Funktion f eindeutig rekonstruierbar.
Allerdings ergibt sich dabei ein Problem. Würde man die Matrix tatsächlich Zeile für Zeile mit Funktionswerten von f auffüllen, so wären diese spätestens am Ende der ersten Zeile erschöpft, denn die Matrix besitzt mindestens κ Spalten, und $\mathrm{Im}(f)$ besitzt nur Ordnungstyp κ. Man löst dieses Problem, indem man die Matrix nur unterhalb der Hauptdiagonalen mit Funktionswerten auffüllt. Oberhalb der Diagonalen setzt man beliebige Werte so ein, daß die in den Spalten stehenden Ordinalzahlen von oben nach unten aufsteigend sind. Die oberhalb der Diagonalen stehenden Elemente sind dabei eigentlich irrelevant, da sie nur Nullmengen der Bilder der spaltenweise abgelesenen Funktionen f_η ausmachen. Es handelt sich dabei also lediglich um Platzhalter. Da jede Zeile links von der Hauptdiagonalen weniger als κ Einträge erlaubt, kann auf diese Weise die untere Dreiecksmatrix vollständig mit Funktionswerten gefüllt werden. Ist $\alpha > \kappa$, so wäre nach diesem Prozeß für jedes β mit $\kappa \leq \beta < \alpha$ die β–te Spalte dieser Matrix ausschließlich mit Platzhaltern aufgefüllt. Um dieses Problem zu umgehen, benutzt man die Bijektion

$h : \kappa \to \alpha$, um die $\kappa \times \alpha$–Matrix auf eine $\kappa \times \kappa$–Matrix zurückführen zu können. Abbildung 3.1 veranschaulicht die Vorgehensweise für den Fall $\alpha = \kappa$: Die Funktionswerte von f werden der Reihe nach unterhalb der Hauptdiagonalen einsortiert. Die Spalten der Matrix zählen dann die Bildwerte der Funktionen f_η für $\eta < \kappa$ auf.

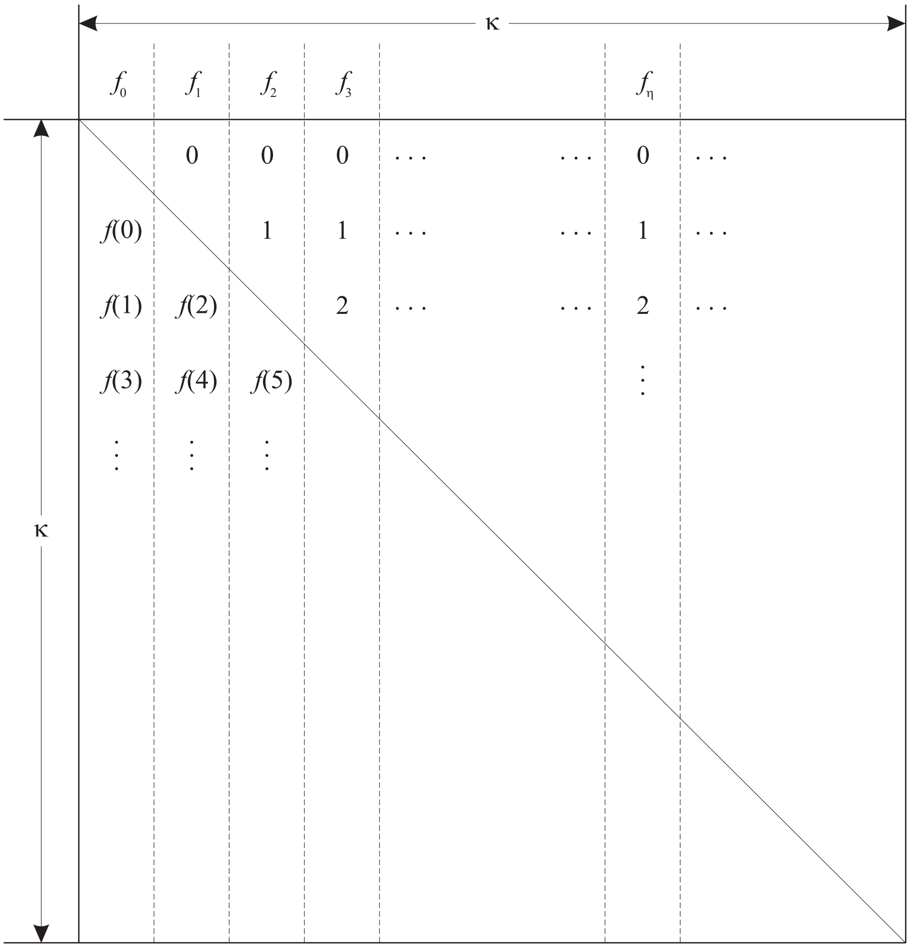

ABBILDUNG 3.1: Veranschaulichung der Konstruktion von Sort_κ.

Wir beschreiben die Konstruktion nun detailliert: Sei dazu τ_β für alle $\beta < \kappa$ der Ordnungstyp von $\langle \beta, <_h \rangle$. Dann werden für alle $\beta < \kappa$ Mengen M_β wie folgt rekursiv definiert:

$$M_0 := \emptyset.$$

Wenn für alle $\xi < \beta$ die Mengen M_ξ schon definiert sind, dann definiere man die Elemente von M_β ebenfalls rekursiv:

$$\begin{aligned}
\gamma_0^\beta &:= \mathrm{Min}(\mathrm{Im}(f) - \bigcup_{\xi < \beta} M_\xi) \quad \text{und} \\
\gamma_\nu^\beta &:= \mathrm{Min}\{\gamma \in \mathrm{Im}(f);\ \gamma > \gamma_\zeta^\beta \text{ für alle } \zeta < \nu\} \text{ für } 0 < \nu < \tau_\beta.
\end{aligned}$$

Setze dann $M_\beta := \{\gamma_\nu^\beta;\ \nu < \tau_\beta\}$. Da $\tau_\beta < \kappa$ für alle $\beta < \kappa$ gilt, sind die Mengen M_β definiert. Außerdem ist $\bigcup_{\beta<\kappa} M_\beta = \mathrm{Im}(f)$.

Sei $a_\beta : \langle \beta, <_h \rangle \to \langle \tau_\beta, < \rangle$ für alle β die ordnungserhaltende Bijektion.
Damit definieren wir nun die gewünschte Folge $\langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle$:

$$f_\eta(\beta) := \begin{cases} \beta \ \text{ für } \ h^{-1}(\eta) \geq \beta, \\ \gamma^\beta_{a_\beta(h^{-1}(\eta))} \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so definierten Funktionen f_η sind strikt aufsteigende Funktionen von κ nach κ : Nach Konstruktion gilt $f_\eta \in \kappa^\kappa$. Außerdem sind die Funktionen strikt aufsteigend. Denn sei $\eta < \alpha$ beliebig. Dann gilt $f_\eta(\beta_1) = \beta_1 < \beta_2 = f_\eta(\beta_2)$ für $\beta_1 < \beta_2 \leq h^{-1}(\eta)$.
Für $\beta_1 < \beta_2 < \kappa$ gilt $\gamma^{\beta_1}_\nu < \gamma^{\beta_2}_\delta$ für alle $\nu < \tau_{\beta_1}$ und $\delta < \tau_{\beta_2}$. Daher ist $f_\eta(\beta_1) < f_\eta(\beta_2)$ für $h^{-1}(\eta) < \beta_1 < \beta_2$.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $f_\eta(h^{-1}(\eta)) = h^{-1}(\eta) < f_\eta(h^{-1}(\eta) + 1)$ gilt. Sei dazu $p : \kappa \to \mathrm{Im}(f)$ die durch $p(\beta) := \mathrm{Min}(M_\beta)$ definierte Funktion. Da $\mathrm{Im}(f) \subseteq \kappa$ ist, gilt $\beta \leq p(\beta)$ für alle $\beta \in \kappa$. Da aber $f_\eta(h^{-1}(\eta) + 1) \in M_{h^{-1}(\eta)+1}$ gilt, heißt das insbesondere $f_\eta(h^{-1}(\eta)) = h^{-1}(\eta) < h^{-1}(\eta) + 1 \leq f_\eta(h^{-1}(\eta) + 1)$.

Außerdem ist $\langle f_\eta; \eta < \alpha \rangle$ eine echt aufsteigende Folge von Funktionen, d.h. es gilt $\eta_1 < \eta_2$ genau dann, wenn $f_{\eta_1} < f_{\eta_2}$ $\mathcal{C}$–fast überall ist:
Denn seien $\eta_1 < \eta_2 < \alpha$ gegeben, $\beta > \mathrm{Max}\{h^{-1}(\eta_1), h^{-1}(\eta_2)\}$. Da $h^{-1}(\eta_1) <_h h^{-1}(\eta_2)$ ist, gilt $a_\beta(h^{-1}(\eta_1)) < a_\beta(h^{-1}(\eta_2))$, also $f_{\eta_1}(\beta) < f_{\eta_2}(\beta)$. Da jedoch nach Proposition 2.1.18 $\{\beta < \kappa \ ; \ \beta > \mathrm{Max}\{h^{-1}(\eta_1), h^{-1}(\eta_2)\}\} \in \mathcal{C}$ ist, folgt die Behauptung.

Definiere nun $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f) := \langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle$. Dann ist Sort^h_α eine Funktion von $[\kappa]^\kappa$ nach $[[\kappa]^\kappa]^\alpha$.

Als nächstes wird $\mathrm{Misch}^h_\alpha : [[\kappa]^\kappa]^\alpha \to [\kappa]^\kappa$ konstruiert. Die Konstruktion kehrt den Prozeß der Konstruktion von Sort^h_α um.
Sei $\langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle \in [[\kappa]^\kappa]^\alpha$ gegeben. Diese Folge wird in Matrixform angeordnet. Nach einer Ausdünnung der Bildbereiche wird die Menge aller Funktionswerte, die unterhalb der Hauptdiagonalen stehen, aufgezählt. Dies ergibt dann $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta; \ \eta < \alpha \rangle)$.
Sei wieder τ_β für alle $\beta < \kappa$ der Ordnungstyp von $\langle \beta, <_h \rangle$ und $a_\beta : \langle \beta, <_h \rangle \to \langle \tau_\beta, < \rangle$ die ordnungserhaltende Bijektion.
Nun werden für alle $\beta < \kappa$ Mengen N_β folgendermaßen rekursiv definiert:

$$N_0 := \emptyset.$$

Wenn die Mengen N_ξ für alle $\xi < \beta$ schon definiert sind, so werden die Elemente von N_β ebenfalls rekursiv definiert: Für alle $\delta < \kappa$ sei dazu $F(\delta) := \mathrm{Im}(f_{h(\delta)}) - \{f_{h(\delta)}(\xi) \ ; \ \xi \leq \delta\}$. Dann sei

$$\begin{aligned} \delta^\beta_0 &:= \mathrm{Min}\{\delta \in F(a^{-1}_\beta(0)) \ ; \ \forall \xi < \beta \ \forall \varrho \in N_\xi (\delta > \varrho)\} \text{ und} \\ \delta^\beta_\nu &:= \mathrm{Min}\{\delta \in F(a^{-1}_\beta(\nu)) \ ; \ \delta > \delta^\beta_\zeta \ \text{ für alle } \zeta < \nu\} \\ &\quad\ \text{für } 0 < \nu < \tau_\beta. \end{aligned}$$

Setze nun $N_\beta := \{\delta^\beta_\nu \ ; \nu < \tau_\beta\}$.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Aufzählung $f \in [\kappa]^\kappa$ der Menge $\bigcup_{\beta<\kappa} N_\beta$.
Definiere $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle) := f$.

Jetzt muß nur noch gezeigt werden, daß die so definierten Funktionen Sort^h_α und Misch^h_α die Eigenschaften (1),(2) und (3) erfüllen.

Zunächst zu Eigenschaft (1):
Es gilt $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)) = f$ für alle $f \in [\kappa]^\kappa$: Sei $f \in [\kappa]^\kappa$ gegeben und $\langle f_\eta \ ; \ \eta < \alpha \rangle =:$ $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)$. Nach Konstruktion gilt $M_\beta = N_\beta$ für alle $\beta < \kappa$. Da jedoch $\bigcup_{\beta<\kappa} N_\beta =$

$\bigcup_{\beta<\kappa} M_\beta = \mathrm{Im}(f)$ ist, folgt $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\mathrm{Sort}^h_\alpha(f)) = \mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle) = f$, da $\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta;\ \eta<\alpha\rangle)$ die Aufzählung von $\bigcup_{\beta<\kappa} N_\beta$ ist.

Nun zu Eigenschaft (2):
Seien Folgen $\langle f_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle$ und $\langle g_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle$ mit $\langle g_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle = \mathrm{Sort}^h_\alpha(\mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle))$ gegeben. Zu zeigen ist, daß $f_\eta = g_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall gilt für alle $\eta<\alpha$. Im folgenden sei $f := \mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta\ ;\ \eta<\alpha\rangle)$. Außerdem seien die Mengen N_β für $\langle f_\eta\ ;\eta<\alpha\rangle$ und M_β für f wie oben definiert.

1. BEHAUPTUNG: Es gibt ein $C_1\in\mathcal{C}$, so daß für alle $\beta\in C_1,\nu_1,\nu_2<\beta$ gilt:

$$f_{h(\nu_1)}(\beta)<f_{h(\nu_2)}(\beta) \iff f_{h(\nu_1)}<f_{h(\nu_2)}\ \ \mathcal{C}\text{–fast überall} \iff \nu_1<_h\nu_2.$$

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Wir definieren eine Funktion $w_1:\kappa\to[\kappa]^2$. Sei $\beta<\kappa$. Wenn es $\nu_1,\nu_2<\beta$ gibt, so daß $\nu_1<_h\nu_2$ gilt, aber $f_{h(\nu_1)}(\beta)>f_{h(\nu_2)}(\beta)$, so bezeichne $m(\beta)$ das (bzgl. einer Wohlordnung von $[\kappa]^2$) kleinste Paar mit dieser Eigenschaft.
Setze dann

$$w_1(\beta) := \begin{cases} m(\beta), & \text{falls existent,}\\ \langle 0,\beta\rangle & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für alle $\beta<\kappa$ gilt: Wenn $w_1(\beta)=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ ist, dann gilt $\mathrm{Max}\{\beta_1,\beta_2\}\le\beta$.
Angenommen, $\mathrm{Max}\{\beta_1,\beta_2\}<\beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta<\kappa$. Nach Hilfssatz 3.2.14 gibt es dann ein Paar, auf das $\mathcal{C}$–fast alle $\beta<\kappa$ durch w_1 abgebildet werden. D.h. es gibt ν_1,ν_2, so daß $\nu_1<_h\nu_2$ und $f_{h(\nu_1)}(\beta)>f_{h(\nu_2)}(\beta)$ für $\mathcal{C}$–fast alle β gilt. Damit ist dann $f_{h(\nu_1)}>f_{h(\nu_2)}$ $\mathcal{C}$–fast überall, im Widerspruch zur Wahl der Funktionen f_η!
Also gibt es ein $C_1\in\mathcal{C}$ mit $w_1(\beta)=\langle 0,\beta\rangle$ für alle $\beta\in C_1$. Diese Menge C_1 erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

2. BEHAUPTUNG:
Sei $\nu<\kappa$ beliebig und $\nu<\beta<\kappa$.
ξ_β bezeichne das eindeutig bestimmte ξ mit $f_{h(\nu)}(\xi)\in N_\beta$.
Dann gilt $\xi_\beta\ge\beta$.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Die Behauptung folgt durch Induktion nach β, wenn man beachtet, daß $f_{h(\nu)}(\xi_\beta)$ aus der Menge $F(\nu)$ ausgewählt wird.
Sei zunächst $\beta=\nu+1$. Da $f_{h(\nu)}(\xi_{\nu+1})\in F(\nu)$ ist, gilt in diesem Fall $\xi_{\nu+1}\ge\nu+1$.

Sei nun die Behauptung für alle $\gamma<\beta$ schon gezeigt. Dann gilt $\xi_\beta>\xi_\gamma\ge\gamma$ für alle $\gamma<\beta$, und damit auch $\xi_\beta\ge\beta$.

3. BEHAUPTUNG: Es gibt ein $C_2\in\mathcal{C}$, so daß für alle $\beta\in C_2$ gilt:

$$N_\beta=\{f_{h(\nu)}(\beta)\ ;\ \nu<\beta\}.$$

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG:
Definiere eine Funktion $w_2:\ \kappa\to\kappa$ durch

$$w_2(\beta) := \begin{cases} \mathrm{Min}\{\varrho<\kappa\ ;\ \exists\nu<\beta\ \exists\delta\in N_\varrho(f_{h(\nu)}(\beta)\le\delta)\}, & \text{falls existent,}\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Insbesondere folgt aus der 2. Behauptung $w_2(\beta)\le\beta$ für alle $\beta<\kappa$ wegen $f_{h(\nu)}(\beta)\le f_{h(\nu)}(\xi_\beta)\in N_\beta$ für alle $\nu<\beta$.

Angenommen $w_2(\beta) < \beta$ $\mathcal{C}$–fast überall. Da $\mathcal{C}$ normal ist, gibt es dann ein β_0, so daß $w_2(\beta) = \beta_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ ist.
Sei nun

$$\mu := \operatorname{Sup}\{\delta < \kappa \ ; \ \delta \in N_{\beta_0})\}.$$

Da N_{β_0} Ordnungstyp $\tau_{\beta_0} < \kappa$ besitzt und κ regulär ist, gilt $\mu < \kappa$.
Da alle f_η streng monoton wachsend sind, gilt $\beta \leq f_\eta(\beta)$ für alle $\beta, \eta < \kappa$. Wenn nun $\beta > \mu$ ist, so bedeutet das deshalb $\mu < f_{h(\nu)}(\beta)$ für alle $\nu < \beta$ und damit auch $\delta < f_{h(\nu)}(\beta)$ für alle $\nu < \beta$ und $\delta \in N_{\beta_0}$. Also gilt $w_2(\beta) \neq \beta_0$ für alle $\beta > \mu$. Da jedoch $\{\beta \ ; \ \mu < \beta < \kappa\}$ nach Proposition 2.1.18 in $\mathcal{C}$ liegt, führt dies zu einem Widerspruch.
Also gilt $w_2(\beta) = \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle β, d.h. für alle β aus einer Menge $D \in \mathcal{C}$.
Dies bedeutet: Für alle $\beta \in D$, für alle $\nu, \varrho < \beta$ und alle $\delta \in N_\varrho$ gilt $f_{h(\nu)}(\beta) > \delta$.

Setze nun $C_2 := D \cap C_1 \in \mathcal{C}$. Dann folgt mit der 2. Behauptung $N_\beta = \{f_{h(\nu)}(\beta) \ ; \ \nu < \beta\}$ für alle $\beta \in C_2$.

4. BEHAUPTUNG:
Es gibt eine Menge $C_3 \in \mathcal{C}$, so daß $f(\beta) = \operatorname{Min}(N_\beta)$ gilt für alle $\beta \in C_3$.

BEWEIS DER 4. BEHAUPTUNG:
Definiere eine Funktion $w_3 : \kappa \to \kappa$ durch $w_3(\beta) = \varrho$ genau dann, wenn $f(\beta) \in N_\varrho$ ist. Wegen $f(\beta) \leq \delta_0^\beta$ für alle β gilt $w_3(\beta) \leq \beta$. Angenommen $w_3(\beta) < \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle β. Wegen der Normalität von $\mathcal{C}$ gibt es dann ein β_0, so daß $w_3(\beta) = \beta_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle β ist. Dies bedeutet jedoch, daß $f(\beta) \in N_{\beta_0}$ für $\mathcal{C}$–fast alle β gilt, was nach Proposition 2.1.18 zum Widerspruch führt, da N_{β_0} Ordnungstyp $\tau_{\beta_0} < \kappa$ besitzt.
Also ist $w_3(\beta) = \beta$ für alle β aus einer Menge $C_3 \in \mathcal{C}$. Dies bedeutet, daß $f(\beta)$ für alle $\beta \in C_3$ in N_β liegt. Zu zeigen ist also noch, daß $f(\beta)$ dann das Minimum von N_β ist. Definiere dazu eine Abbildung $q : \kappa \to \kappa$ durch $q(\beta) = \gamma$ genau dann, wenn $\delta_0^\beta = f(\gamma)$ ist.
Es gilt $q(\beta) \geq \beta$, weil f die Aufzählung der Menge $\bigcup_{\beta<\kappa} N_\beta$ ist. Wenn also $f(\beta) \in N_\beta$ gilt, dann ist $f(\beta) = \delta_0^\beta = \operatorname{Min}(N_\beta)$.

5. BEHAUPTUNG:
Es gibt ein $C_4 \in \mathcal{C}$, so daß $f(\beta) = \operatorname{Min}(M_\beta)$ gilt für alle $\beta \in C_4$.

BEWEIS DER 5. BEHAUPTUNG:
Definiere eine Funktion $w_4 : \ \kappa \to \kappa$ durch $w_4(\beta) = \varrho$ genau dann, wenn $f(\beta) \in M_\varrho$ ist. Wie in der 4. Behauptung folgt nun $f(\beta) = \operatorname{Min}(M_\beta)$ für alle β aus einer Menge $C_4 \in \mathcal{C}$.

Setze nun $C := C_2 \cap C_3 \cap C_4 \in \mathcal{C}$. Nach der 4. und 5. Behauptung ist $M_\beta = N_\beta$ für alle $\beta \in C$, also folgt mit der 3. Behauptung $\{f_{h(\nu)}(\beta) \ ; \ \nu < \beta\} = \{g_{h(\nu)}(\beta) \ ; \ \nu < \beta\}$.
Es gilt sogar $f_{h(\nu)}(\beta) = g_{h(\nu)}(\beta)$ für alle $\nu < \beta \in C$. Denn sei $\beta \in C$ gegeben, $\nu < \beta$. Dann ist

$$f_{h(\nu)}(\beta) = \delta^\beta_{a_\beta(\nu)} = \gamma^\beta_{a_\beta(\nu)} = g_{h(\nu)}(\beta).$$

Also haben wir für alle $\eta < \alpha$ die Eigenschaft $f_\eta(\beta) = g_\eta(\beta)$ für alle $\beta > h^{-1}(\eta)$, also für $\mathcal{C}$–fast alle β. Somit ist auch Eigenschaft (2) nachgewiesen.

Eigenschaft (3) folgt unmittelbar aus der Konstruktion der Funktionen $\operatorname{Sort}^h_\alpha$ und $\operatorname{Misch}^h_\alpha$: Sei H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ, $f \in [H]^\kappa$ und $\langle f_\eta; \ \eta < \alpha\rangle = \operatorname{Sort}^h_\alpha(f)$. Für $\eta < \alpha$ und ein beliebiges $\beta > h^{-1}(\eta)$ gilt $f_\eta(\beta) \in \bigcup_{\xi<\kappa} M_\xi = \operatorname{Im}(f) \subseteq H$. Wegen $h^{-1}(\eta) < \kappa$ ist nach Proposition 2.1.18 die Menge aller $\beta < \kappa$, die größer als $h^{-1}(\eta)$ sind, eine Filtermenge. Also gilt $f_\eta(\beta) \in H$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ und alle $\eta < \alpha$.

Sei umgekehrt $\langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle \in [[H]^\kappa]^\alpha,\ f = \mathrm{Misch}^h_\alpha(\langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle)$. Nach Konstruktion ist $\mathrm{Im}(f) \subseteq \bigcup_{\eta<\alpha} \mathrm{Im}(f_\eta) \subseteq H$, also $f \in [H]^\kappa$, was den Beweis vervollständigt.

□

Ebenso können auch für Ordinalzahlen $\alpha < \kappa$ Funktionen Sort_α und Misch_α mit den entsprechenden Eigenschaften aus Satz 3.2.15 konstruiert werden. D.h. es gibt Funktionen $\mathrm{Sort}_\alpha : [\kappa]^\kappa \to [[\kappa]^\kappa]^\alpha$ und $\mathrm{Misch}_\alpha : [[\kappa]^\kappa]^\alpha \to [\kappa]^\kappa$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $f \in [\kappa]^\kappa$ gilt $\mathrm{Misch}_\alpha(\mathrm{Sort}_\alpha(f)) = f$.

(2) Wenn $\langle g_\eta\ ;\ \eta < \alpha\rangle = \mathrm{Sort}_\alpha(\mathrm{Misch}_\alpha(\langle f_\eta\ ;\ \eta < \alpha\rangle))$ ist, dann gilt $f_\eta = g_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\eta < \alpha$.

(3) Wenn H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ ist, dann gilt: Für $f \in [H]^\kappa$ und $\mathrm{Sort}_\alpha(f) = \langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle$ ist $f_\eta(\beta) \in H$ für $\mathcal{C}$–fast alle β und alle η. Ist umgekehrt $\langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle \in [[H]^\kappa]^\alpha$, so ist $\mathrm{Misch}_\alpha(\langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle) \in [H]^\kappa$.

Diese Funktionen werden ebenso wie die Funktionen Sort^h_α und Misch^h_α aus Satz 3.2.15 konstruiert, mit dem Unterschied, daß auf die Wahl einer Abbildung $h : \kappa \to \alpha$ verzichtet werden kann. Diese bewirkte ja nur, daß die Matrix, unter deren Diagonale die Funktionswerte einsortiert wurden, nicht mehr Spalten als Zeilen besitzt.
Ist eine Funktion f gegeben, so werden also die Funktionswerte von f in eine $\kappa \times \alpha$–Matrix sortiert, indem die Zeilen nacheinander jeweils von links nach rechts aufgefüllt werden, vergleiche Abbildung 3.2. Die Folge der Aufzählungen der Spalten ergibt dann das Bild von f unter Sort_α.
Ist umgekehrt $\langle f_\eta;\ \eta < \alpha\rangle$ eine aufsteigende Folge, so ist die Aufzählung von $\bigcup_{\eta<\alpha} \mathrm{Im}(f_\eta)$ das Bild dieser Folge unter Misch_α. Der Nachweis der gewünschten Eigenschaften dieser Funktionen verläuft analog zum Beweis von Satz 3.2.15, daher soll hier darauf verzichtet werden.

Das Argument des Beweises von Satz 3.2.15 gibt unmittelbar, daß man ordnungserhaltende Funktionen aus Sort^h_α ausklammern kann:

Korollar 3.2.16 Sei Sort^h_α eine Funktion mit den Eigenschaften aus 3.2.15. Seien außerdem $f, w \in [\kappa]^\kappa$ beliebig und $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f) = \langle f_\eta,\ \eta < \alpha\rangle$.
Dann gilt: Wenn $\mathrm{Sort}^h_\alpha(w \circ f) = \langle g_\eta\ ;\ \eta < \alpha\rangle$ ist, dann gilt $g_\eta = w \circ f_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Konstruktion, wenn man beachtet, daß w ordnungserhaltend ist.

□

Wir erinnern daran, daß schon in Abschnitt 2.1.4 für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ eine Äquivalenzrelation $\sim_\mathcal{U}$ definiert wurde. Diese Notation werden wir auch hier und in den folgenden Abschnitten verwenden. Mit unserem normalen, κ–vollständigen Ultrafilter $\mathcal{C}$ auf κ erhalten wir so in unserem Fall für jede beliebige Menge M eine Äquivalenzrelation $\sim_\mathcal{C}$ auf M^κ. Sie ist definiert durch

$$f \sim_\mathcal{C} g \iff f = g \ \ \mathcal{C}\text{–fast überall.}$$

Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation, die genau die Elemente der Ultrapotenz von κ mit $\mathcal{C}$ bilden, werden mit $[f]_\mathcal{C} := \{g \in \kappa^\kappa; f \sim_\mathcal{C} g\}$ bezeichnet.
Ist M eine wohlgeordnete Menge, so kann wie in Abschnitt 2.1.4 auf $M^\kappa/\sim_\mathcal{C}$ eine Ordnung $<_\mathcal{C}$ durch

$$[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [g]_\mathcal{C} \iff f < g \ \ \mathcal{C}\text{–fast überall}$$

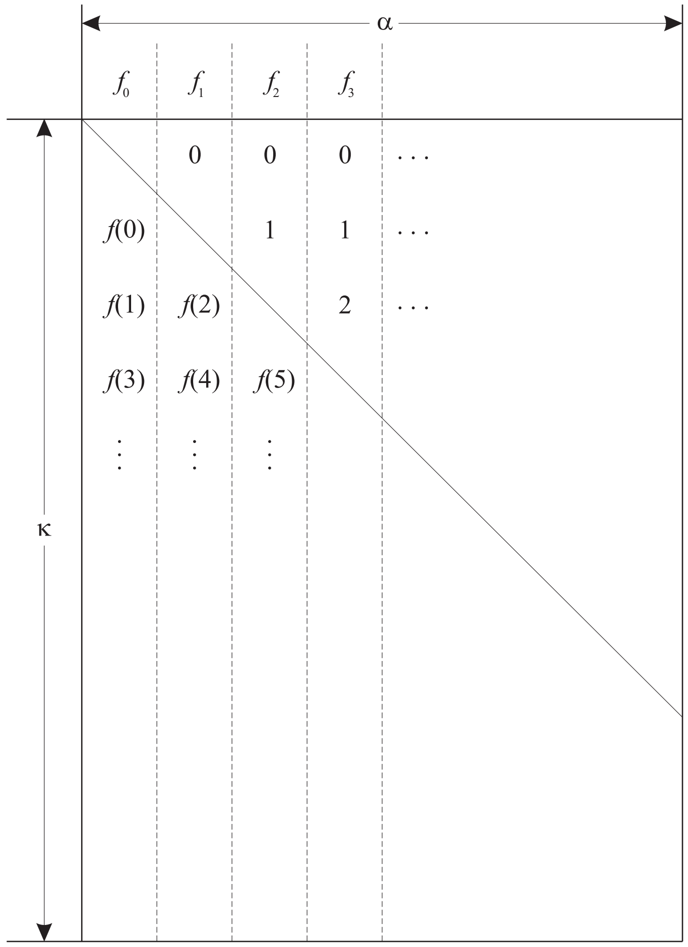

ABBILDUNG 3.2: Veranschaulichung der Konstruktion von Sort_α für $\alpha < \kappa$.

definiert werden. Da $\mathcal{C}$ insbesondere σ–vollständig ist, ist $\langle M^\kappa/{\sim_\mathcal{C}}, <_\mathcal{C}\rangle$ nach Satz 2.1.33 eine Wohlordnung.

Die Kodierung von Folgen der Länge $\alpha < \kappa^+$ durch das Misch– und Sortierlemma hängt ab von der gewählten Bijektion zwischen α und κ. Wollte man die Kodierung simultan für alle $\alpha < \kappa^+$ erhalten, so müßte man κ^+–oft auswählen, was wir ohne Verwendung des Auswahlaxioms nicht können.
Die folgenden Überlegungen zeigen, daß in den Situationen, in denen wir das tun wollen, Auswahl nicht nötig ist (siehe Lemma 3.2.17, Korollar 3.2.18 und Satz 3.2.19).

Lemma 3.2.17 Seien $f \in [\kappa]^\kappa$ und ein α mit $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ gegeben. Außerdem sei $h : \kappa \to \alpha$ eine Bijektion und $\mathrm{Sort}^h_\alpha : [\kappa]^\kappa \to [[\kappa]^\kappa]^\alpha$ die wie im Misch– und Sortierlemma 3.2.15 konstruierte Funktion, $\mathrm{Sort}^h_\alpha(f) = \langle f_\eta\ ;\ \eta < \alpha\rangle$.
Dann ist $\langle [f_\eta]_\mathcal{C}\ ;\ \eta < \alpha\rangle$ ein Anfangssegment von $\langle\{[g]_\mathcal{C};\ g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa\}, <_\mathcal{C}\rangle$.

Beweis:
Sei $\eta < \alpha$ beliebig. Zu zeigen ist, daß für alle $g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa$ mit $g < f_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall $[g]_\mathcal{C} = [f_\nu]_\mathcal{C}$ gilt für ein $\nu < \eta$. Sei also $g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa$ mit $g < f_\eta$ $\mathcal{C}$–fast überall gegeben. Setze $C_1 := \{\beta \in \kappa\ ;\ g(\beta) < f_\eta(\beta)\ \&\ h^{-1}(\eta) < \beta\}$. Als Schnitt der beiden Filtermengen $\{\beta \in \kappa\ ;\ g(\beta) < f_\eta(\beta)\}$ und $\{\beta \in \kappa;\ h^{-1}(\eta) < \beta\}$ liegt C_1 in $\mathcal{C}$.

Definiere dann eine Funktion $w_1 : \kappa \to \kappa$ durch

$$w_1(\beta) = \delta \iff \exists \varrho (h^{-1}(\varrho) < \delta \ \& \ f_\varrho(\delta) = g(\beta)).$$

Für alle $\beta < \kappa$ existieren solche eindeutig bestimmten δ und ϱ, da $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \bigcup_{\varrho<\eta} \mathrm{Im}(f_\varrho)$ gilt.

Es gilt $w_1(\beta) \leq \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Denn angenommen, es gibt eine Menge $C_2 \in \mathcal{C}$, so daß $w_1(\beta) > \beta$ für alle $\beta \in C_2$ gilt. Wähle ein beliebiges $\beta \in C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$ und sei $w_1(\beta) = \delta > \beta$.
Dann gibt es ein ϱ mit $h^{-1}(\varrho) < \delta$ und $f_\varrho(\delta) = g(\beta) < f_\eta(\beta)$. Da jedoch $h^{-1}(\varrho) < \delta$, $h^{-1}(\eta) < \beta$ und $\delta > \beta$ gilt, folgt aus der Konstruktion von Sort^h_α, daß $f_\varrho(\delta) > f_\eta(\beta)$ ist, im Widerspruch zur Wahl von ϱ.
Also gilt $w_1(\beta) \leq \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle β.

Angenommen, $w_1(\beta) < \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Aus der Normalität von $\mathcal{C}$ folgt dann nach Hilfssatz 2.1.24 die Existenz eines δ_0, so daß $w_1(\beta) = \delta_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle β gilt. D.h. für $\mathcal{C}$–fast alle β gibt es ein ϱ_β mit $h^{-1}(\varrho_\beta) < \delta_0$ und $f_{\varrho_\beta}(\delta_0) = g(\beta)$. Da aber der Ordnungstyp von $\langle \delta_0, <_h \rangle$ kleiner als κ ist, ist dies unmöglich.

Also gilt $w_1(\beta) = \beta$ für alle β aus einer Menge $C_3 \in \mathcal{C}$.

Definiere nun noch eine Funktion $w_2 : C_1 \cap C_3 \to \kappa$ durch

$$w_2(\beta) = \gamma \iff \gamma < \beta \ \& \ f_{h(\gamma)}(\beta) = g(\beta).$$

Nach dem, was wir oben gezeigt haben, gibt es für alle $\beta \in C_1 \cap C_3$ ein solches, eindeutig bestimmtes γ. Nach Definition gilt $w_2(\beta) < \beta$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_3$.
Wieder folgt aus der Normalität von $\mathcal{C}$, daß es ein γ_0 gibt, so daß $f_{h(\gamma_0)}(\beta) = g(\beta)$ gilt für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Damit ist also $f_{h(\gamma_0)} = g$ $\mathcal{C}$–fast überall. Aus der Voraussetzung $[g]_\mathcal{C} < [f_\eta]_\mathcal{C}$ kann geschlossen werden, daß $\nu := h(\gamma_0)$ kleiner als η ist. Also gilt $[g]_\mathcal{C} = [f_\nu]_\mathcal{C}$ für ein $\nu < \eta$. Somit ist $\langle [f_\eta]_\mathcal{C} \ ; \ \eta < \alpha \rangle$ tatsächlich ein Anfangssegment von $\langle [g]_\mathcal{C}; \ g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa \rangle$.

□

Korollar 3.2.18 Sei $\kappa \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \kappa^+$, $h_1 : \kappa \to \alpha_1$ und $h_2 : \kappa \to \alpha_2$ Bijektionen. Dann gilt für alle $f \in [\kappa]^\kappa$: $[(\mathrm{Sort}^{h_1}_{\alpha_1}(f))(\eta)]_\mathcal{C} = [(\mathrm{Sort}^{h_2}_{\alpha_2}(f))(\eta)]_\mathcal{C}$ für alle $\eta < \alpha_1$.

Beweis: Nach Lemma 3.2.17 ist $\langle [(\mathrm{Sort}^{h_1}_{\alpha_1}(f))(\eta)]_\mathcal{C}; \ \eta < \alpha_1 \rangle$ das Anfangssegment von $\{[g]_\mathcal{C}; \ g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa\}$ der Länge α_1. $\langle [(\mathrm{Sort}^{h_2}_{\alpha_2}(f))(\eta)]_\mathcal{C}; \ \eta < \alpha_2 \rangle$ ist das Anfangssegment von $\{[g]_\mathcal{C}; \ g \in [\mathrm{Im}(f)]^\kappa\}$ der Länge α_2. Also ist

$$[(\mathrm{Sort}^{h_1}_{\alpha_1}(f))(\eta)]_\mathcal{C} = [(\mathrm{Sort}^{h_2}_{\alpha_2}(f))(\eta)]_\mathcal{C}$$

für alle $\eta < \alpha_1$.

□

In Kapitel 4 (Satz 4.2.19) werden wir vor das Problem gestellt werden, aus überabzählbar vielen Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_\mathcal{C}$ jeweils einen Repräsentanten auszuwählen. Da uns das Auswahlaxiom nicht zur Verfügung steht, müssen wir diese Repräsentantenfolge konstruieren. Der folgende Satz zeigt, daß die Konstruktion solcher Folgen möglich ist.

Satz 3.2.19 Sei $\kappa \leq \gamma < \kappa^+$. Außerdem sei eine Teilmenge $H \subseteq \kappa$ der Mächtigkeit κ gegeben.
Dann gibt es eine Funktion $K : [H]^\kappa \times \gamma \to [H]^\kappa$, so daß für jedes Paar $\langle f, \beta \rangle \in [H]^\kappa \times \gamma$ gilt: $[K(f,\beta)]_\mathcal{C}$ ist das β–te Element von $[H]^\kappa/\sim_\mathcal{C}$, das größer ist als $[f]_\mathcal{C}$.

Beweis:
Im folgenden sei

$$\begin{aligned} \mathrm{kos}_H(X) &:= \mathrm{Min}\{y \in H;\ \forall x \in X(x < y)\} \quad \text{für alle } X \subseteq \kappa, \\ \mathrm{succ}_H(x) &:= \mathrm{Min}\{y \in H;\ y > x\} \quad \text{für alle } x \in \kappa. \end{aligned}$$

Sei $h : \kappa \to \gamma$ eine Bijektion. Zunächst definieren wir für alle Limeszahlen $\beta < \gamma$ eine kanonische konfinale Folge in β, die höchstens Länge κ besitzt.
Sei dazu $\beta < \gamma$ eine Limeszahl, $M_\beta := \{h^{-1}(\nu);\ \nu < \beta\}$. M_β hat als Teilmenge von κ höchstens Ordnungstyp κ. Sei τ_β der Ordnungstyp von M_β. Sei außerdem $M_\beta := \{\eta_\nu^\beta;\ \nu < \tau_\beta\}$ eine aufsteigende Aufzählung von M_β. Setze nun $\alpha_\nu^\beta := h(\eta_\nu^\beta)$ für alle $\nu < \tau_\beta$. Dann ist $\langle \alpha_\nu^\beta;\ \nu < \tau_\beta \rangle$ eine in β konfinale Folge der Länge $\tau_\beta \leq \kappa$.

Wir definieren nun die Funktion K. Sei dazu $f \in [H]^\kappa$ beliebig. Nun konstruieren wir die Funktionen $K(f,\beta)$ für $\beta < \gamma$ rekursiv:
Sei

$$K(f,0) := f.$$

Wenn $\beta = \delta + 1$ eine Nachfolgerzahl ist, so definiere $K(f,\beta)$ durch

$$(K(f,\beta))(\xi) := \mathrm{succ}_H((K(f,\delta))(\xi)) \quad \text{für alle} \quad \xi < \kappa.$$

Wenn β eine Limeszahl ist und $\langle \alpha_\nu^\beta;\ \nu < \tau_\beta \rangle$ die kanonische konfinale Folge in β, dann definiere $K(f,\beta)$ durch

$$(K(f,\beta))(\xi) := \mathrm{kos}_H(\{(K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi);\ \nu < \xi\}).$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß die so definierte Funktion K die gewünschte Eigenschaft erfüllt.
Sei dazu $f \in [H]^\kappa$. Wir wollen zeigen, daß $[K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ für alle $\beta < \gamma$ das β–te Element von $[H]^\kappa/\!\sim_{\mathcal{C}}$ ist, das größer ist als $[f]_{\mathcal{C}}$.
Dazu zeigen wir zunächst durch Induktion nach β: Wenn $\delta < \beta$ gilt, so ist $K(f,\delta) < K(f,\beta)$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Für alle Nachfolgerzahlen $\beta = \delta + 1 \in \gamma$ gilt nach Konstruktion $(K(f,\delta))(\xi) < (K(f,\beta))(\xi)$ für alle $\xi < \kappa$.
Es muß nur noch der Fall, daß β eine Limeszahl ist, betrachtet werden: Angenommen, es gibt ein $\delta < \beta$, so daß $K(f,\delta) \geq K(f,\beta)$ $\mathcal{C}$–fast überall ist. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung auch ein $\nu < \tau_\beta$ mit $K(f,\alpha_\nu^\beta) \geq K(f,\beta)$ $\mathcal{C}$–fast überall. Nach Definition von $K(f,\beta)$ ist aber $(K(f,\beta))(\xi) > (K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi)$ für alle $\xi > \nu$, d.h. für $\mathcal{C}$–fast alle $\xi < \kappa$ und somit ist ein Widerspruch herbeigeführt!
Also ist $[K(f,\delta)]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ für $\delta < \beta$.

Nun muß noch gezeigt werden, daß die Funktionen $K(f,\beta)$ direkt aufeinanderfolgen.
Sei zunächst $\beta = \delta + 1 < \gamma$ eine Nachfolgerzahl. Angenommen, es gäbe ein $g \in [H]^\kappa$, so daß $[K(f,\delta)]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ ist. Dann gibt es also eine Menge $C \in \mathcal{C}$ mit $(K(f,\delta))(\xi) < g(\xi) < (K(f,\beta))(\xi) = \mathrm{succ}_H((K(f,\delta))(\xi))$ für alle $\xi \in C$, was unmöglich ist. D.h. für alle Nachfolgerzahlen $\beta = \delta + 1$ folgen $[K(f,\delta)]_{\mathcal{C}}$ und $[K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ in $[H]^\kappa/\!\sim_{\mathcal{C}}$ direkt aufeinander.
Sei nun $\beta < \gamma$ eine Limeszahl. Angenommen, es gäbe ein $g \in [H]^\kappa$, so daß $[K(f,\delta)]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ ist für alle $\delta < \beta$.
Dann gilt insbesondere auch $[K(f,\alpha_\nu^\beta)]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ für alle $\nu < \tau_\beta$. Also gibt es für alle $\nu < \tau_\beta$ eine Menge $C_\nu \in \mathcal{C}$ mit $(K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi) < g(\xi) < (K(f,\beta))(\xi)$ für alle $\xi \in C_\nu$. Wenn $\tau_\beta < \kappa$ ist, dann definiere für alle ν mit $\tau_\beta \leq \nu < \kappa$ die Menge $C_\nu := \kappa \in \mathcal{C}$.
Da $\mathcal{C}$ normal ist, liegt der Diagonalschnitt $C := \{\xi < \kappa;\ \xi \in \bigcap_{\nu<\xi} C_\nu\}$ ebenfalls in $\mathcal{C}$.

Sei nun $\xi \in C$ beliebig. Dann gilt $(K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi) < g(\xi) < (K(f,\beta))(\xi)$ für alle $\nu < \xi$. Also ist auch

$$\begin{aligned}\mathrm{kos}_H(\{(K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi);\ \nu<\xi\}) &\leq g(\xi) < (K(f,\beta))(\xi)\\ &= \mathrm{kos}_H(\{(K(f,\alpha_\nu^\beta))(\xi);\ \nu<\xi\}).\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch!

Also ist gezeigt, daß $[K(f,\beta)]_{\mathcal{C}}$ für alle $\beta < \gamma$ das β-te Element von $[H]^\kappa/\sim_{\mathcal{C}}$ ist, das größer ist als $[f]_{\mathcal{C}}$.

□

3.3 Spiele und Determiniertheit

Teil des Hauptergebnisses dieser Arbeit wird es sein, daß unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit die Zahlen $\aleph_n$ für natürliche Zahlen n Jónsson–Zahlen sind. Daher soll nun eine kurze Einführung in die Theorie der unendlichen Spiele gegeben und das Axiom der Determiniertheit definiert werden.
Erste wichtige Konsequenzen des Axioms der Determiniertheit für die Theorie der großen Kardinalzahlen werden am Schluß dieses Abschnitts betrachtet.
Für eine detailliertere Beschreibung verweisen wir auf [STEINWAND, 1998, Kapitel 2] und [KANAMORI, 1994, §§ 27 & 28].
In unserem Zusammenhang ist nur ein Typ unendlicher Spiele interessant. Es handelt sich dabei um Spiele, die von zwei Spielern gespielt werden. Vor Spielbeginn wird eine Teilmenge A der reellen Zahlen festgelegt. Nun wählen die beiden Spieler immer abwechselnd je eine natürliche Zahl:

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I}: & x(0) & & x(2) & & \dots \\ \mathrm{II}: & & x(1) & & x(3) & \dots \end{array}$$

Nach unendlich langem Spielverlauf erhält man eine unendliche Folge $x := \langle x(i);\ i \in \omega\rangle$ natürlicher Zahlen, d.h. eine reelle Zahl. Liegt x in der Menge A, so gewinnt Spieler I, sonst gewinnt Spieler II.
Ein solches, von der Menge A abhängiges Spiel, wird mit $S(A)$ bezeichnet.
Die Folge, die von Spieler I gespielt wird, also $\langle x(2i);\ i \in \omega\rangle$, wird mit x_{I} bezeichnet, die von Spieler II gespielte Folge $\langle x(2i+1);\ i \in \omega\rangle$ mit x_{II}.
Die beiden Spieler spielen gemäß einer Strategie, die ihnen in Abhängigkeit der bisher gespielten Züge vorgibt, was ihr nächster Zug ist. Eine Strategie kann also aufgefaßt werden als eine Funktion, die jeder endlichen Folge in ω, d.h. der Folge der bisher gespielten Züge, eine natürliche Zahl, d.h. den nächsten Zug, zuordnet. Dabei werden Strategien für Spieler I üblicherweise mit σ, Strategien für Spieler II mit τ bezeichnet:

Definition 3.3.1

(1) Eine **Strategie für Spieler** I ist eine Funktion $\sigma : \omega^{<\omega} \to \omega$. Spieler I spielt gemäß der Strategie σ, wenn $x(0) = \sigma(\emptyset)$ und $x(2n) = \sigma(\langle x(0), ..., x(2n-1)\rangle)$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

(2) Entsprechend ist eine **Strategie für Spieler** II eine Funktion $\tau : \omega^{<\omega} \to \omega$. Spieler II spielt gemäß der Strategie τ, wenn $x(2n+1) = \sigma(\langle x(0), ..., x(2n)\rangle)$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Wenn Spieler I gemäß der Strategie σ und Spieler II die Folge $y \in \omega^\omega$ spielt, so bezeichnen wir mit $\sigma * y$ die beim Spiel resultierende reelle Zahl. Entsprechend bezeichnen wir mit $y * \tau$ die reelle Zahl, die entsteht, wenn Spieler I die Folge $y \in \omega^\omega$ und Spieler II gemäß der Strategie τ spielt.

Definition 3.3.2

(1) Eine Strategie σ für Spieler I heißt **Gewinnstrategie**, wenn Spieler I immer gewinnt, wenn er gemäß dieser Strategie spielt, d.h. wenn

$$\{\sigma * y;\ y \in \omega^\omega\} \subseteq A.$$

(2) Entsprechend heißt eine Strategie τ für Spieler II **Gewinnstrategie**, wenn

$$\{y * \tau;\ y \in \omega^\omega\} \subseteq \omega^\omega - A,$$

d.h. wenn Spieler II immer gewinnt, wenn er gemäß τ spielt, gleichgültig, was Spieler I spielt.

Wir nennen eine Menge A **determiniert**, wenn beim Spiel $S(A)$ einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.
In der Tat kann man für interessante Klassen von Mengen die Determiniertheit beweisen: Gale und Stewart zeigten 1953, daß jede offene Menge determiniert ist[3], Martin zeigte 1975, daß jede Borelmenge determiniert ist[4]. Unter zusätzlichen Voraussetzungen erhält man die Determiniertheit von projektiven Mengen[5].
Allerdings war schon Gale und Stewart bekannt, daß unter ZSF + AC die Determiniertheit aller Teilmengen der reellen Zahlen nicht bewiesen werden kann: Sie konstruierten mit dem Auswahlaxiom eine nichtdeterminierte Menge.
Andererseits zieht die Determiniertheit aller Teilmengen von ω^ω einige wünschenswerte Konsequenzen nach sich, insbesondere in der Analysis[6]. So folgt daraus z.B. die Lebesgue–Meßbarkeit aller Teilmengen der reellen Zahlen.
Daher formulierten Jan Mycielski und Hugo Steinhaus 1962 das **Axiom der Determiniertheit**:

$$\text{AD}: \qquad \text{Jedes } A \subseteq \omega^\omega \text{ ist determiniert.}$$

Dieses Axiom hat trotz des Widerspruchs zu AC große Bedeutung in der Mengenlehre: Die Strukturtheorie der reellen Zahlen und der Kardinalzahlen unterhalb von $\Theta := \mathrm{Sup}\{\alpha;\ \exists f : \mathbb{R} \to \alpha \text{ surjektiv}\}$ ist ein hochinteressantes Forschungsgebiet, zu dem auch in dieser Arbeit dargestellte Resultate (insbesondere Satz 3.4.5 und der Satz von Kleinberg 4.1.1) gehören. Der Grund dafür, daß AD trotz seines zu AC komplementären Charakters so wichtig geworden ist, liegt insbesondere im folgenden, von Woodin bewiesenen Satz:

Satz 3.3.3 Gibt es unendlich viele Woodin–Kardinalzahlen und eine meßbare Kardinalzahl, die größer als diese Woodin–Zahlen ist, so gilt $\mathbf{L}(\mathbb{R}) \models \text{AD}$.

Die Aussage dieses Satzes ist äquivalent zu “jedes $A \in \mathcal{P}(\omega^\omega) \cap \mathbf{L}(\mathbb{R})$ ist determiniert”. Wir bezeichnen sie auch mit $\text{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$. Satz 3.3.3 besagt, daß es unter Voraussetzung der Existenz großer Kardinalzahlen ein Modell gibt, in dem AD wahr ist.
Untersuchungen von AD und Abwandlungen davon ($\text{AD}^{\mathbf{L}(\mathbb{R})}$, AD^+, $\text{AD}_\mathbb{R}$) gehören mittlerweile zu den wesentlichen Gebieten der Mengenlehre, man vergleiche dazu [Woodin, 1999].

Erstaunliche Konsequenzen hat das Axiom der Determiniertheit für die Theorie der großen Kardinalzahlen. So besitzen verhältnismäßig kleine Kardinalzahlen unter AD große Kardinalzahl–Eigenschaften. Beispielsweise kann gezeigt werden, daß $\aleph_1$ und $\aleph_2$ meßbar sind, siehe Satz 3.3.5 und Satz 3.3.7.

[3] Vergleiche [Gale und Stewart, 1953].
[4] Vergleiche [Martin, 1975].
[5] Vergleiche [Martin, 1970] und [Martin und Steel, 1989].
[6] Zu Konsequenzen in der Algebra kann man z.B. nachlesen in [Felgner und Schulz, 1984].

Ein Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_1$, der 1968 von Martin gefunden wurde[7], beruht darauf, daß der Martin–Filter unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit ein Ultrafilter ist. Dies soll im folgenden gezeigt werden. Die Darstellung beruht auf [STEINWAND, 1998, Proposition 5.6].
Wir definieren zunächst eine Relation auf ω^ω :
Für $x, y \in \omega^\omega$ sei $x \equiv_{\Delta^1_1} y$ genau dann, wenn $x \in \Delta^1_1(y)$ und $y \in \Delta^1_1(x)$.
Es läßt sich leicht überprüfen, daß durch $\equiv_{\Delta^1_1}$ eine Äquivalenzrelation definiert ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D} := \{[x]_{\Delta^1_1};\ x \in \omega^\omega\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $\mathcal{D}$ läßt sich nun eine Ordnung $\leq_{\Delta^1_1}$ durch

$$[x]_{\Delta^1_1} \leq_{\Delta^1_1} [y]_{\Delta^1_1} \quad :\Longleftrightarrow \quad x \in \Delta^1_1(y)$$

definieren.
Martin definierte nun einen Filter $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{D}$. Dieser sogenannte Martin–Filter besteht aus allen Teilmengen von $\mathcal{D}$, die ein Endsegment bezüglich der Ordnung $\leq_{\Delta^1_1}$ enthalten:
Für $X \subseteq \mathcal{D}$ sei

$$X \in \mathcal{M} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists d_0 \in \mathcal{D}\ (\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq_{\Delta^1_1} d\} \subseteq X).$$

Schon mit ZSF und $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ läßt sich zeigen, daß $\mathcal{M}$ ein freier, $\aleph_1$–vollständiger Filter auf $\mathcal{D}$ ist.
Unter zusätzlicher Annahme von AD ist $\mathcal{M}$ ein Ultrafilter:

Satz 3.3.4 (ZSF + AD)
$\mathcal{M}$ ist ein Ultrafilter auf $\mathcal{D}$.

Beweis:
Sei $X \subseteq \mathcal{D}$. Wir werden zeigen, daß $\mathcal{M}$ entweder X selbst oder das Komplement $\mathcal{D} - X$ enthält. Dazu betrachten wir das Spiel $S(\bigcup X)$.
Zwei Spieler wählen also abwechselnd natürliche Zahlen:

I :	$x(0)$		$x(2)$		...
II:		$x(1)$		$x(3)$	...

Liegt die resultierende Folge $\langle x(i);\ i \in \omega\rangle$ in $\bigcup X$, so gewinnt Spieler I, sonst gewinnt Spieler II.
Da wir AD vorausgesetzt haben, besitzt einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. Wir werden zeigen, daß X ein Element von $\mathcal{M}$ ist, falls Spieler I eine Gewinnstrategie besitzt, und daß im anderen Fall $\mathcal{D} - X$ in $\mathcal{M}$ liegt.

1. Fall: Spieler I besitzt eine Gewinnstrategie σ.
Um zu zeigen, daß X in $\mathcal{M}$ liegt, müssen wir ein $d_0 \in \mathcal{D}$ finden, so daß alle Elemente von $\mathcal{D}$, die bezüglich der Ordnung $\leq_{\Delta^1_1}$ oberhalb von d_0 liegen, Elemente von X sind.
σ ist ein Element von $\omega^{(\omega^{<\omega})}$. Da es eine Bijektion zwischen $\omega^{<\omega}$ und ω gibt, kann σ deshalb durch eine reelle Zahl kodiert werden. Wir fassen daher σ hier als eine reelle Zahl auf und setzen $d_0 := [\sigma]_{\Delta^1_1}$.
Sei $y \in \omega^\omega$ mit $d_0 \leq_{\Delta^1_1} [y]_{\Delta^1_1}$. Dann ist also $\sigma \in \Delta^1_1(y)$ und somit auch $\sigma * y \in \Delta^1_1(y)$. Umgekehrt ist jedoch wegen $(\sigma * y)_{\mathrm{II}} = y$ auch $y \in \Delta^1_1(\sigma * y)$. Daher gilt $\sigma * y \equiv_{\Delta^1_1} y$. Da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist, liegt $\sigma * y$ in $\bigcup X$, und deshalb ist $[y]_{\Delta^1_1} = [\sigma * y]_{\Delta^1_1} \in X$.
Somit ist gezeigt, daß $\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq_{\Delta^1_1} d\}$ eine Teilmenge von X ist, also $X \in \mathcal{M}$.

[7] Vergleiche [MARTIN, 1968].

2. Fall: Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie τ.
Wie im ersten Fall folgt $[y]_{\Delta^1_1} = [y * \tau]_{\Delta^1_1}$ für alle $y \in \omega^\omega$ mit $[\tau]_{\Delta^1_1} \leq_{\Delta^1_1} [y]_{\Delta^1_1}$. Also gilt $\{[y]_{\Delta^1_1} \in \mathcal{D};\ [\tau]_{\Delta^1_1} \leq_{\Delta^1_1} [y]_{\Delta^1_1}\} \subseteq \mathcal{D} - X$, da τ eine Gewinnstrategie für Spieler II ist. Somit liegt in diesem Fall $\mathcal{D} - X$ in $\mathcal{M}$.

□

Durch Übergang auf den Bildfilter bezüglich der Abbildung $f : \mathcal{D} \to \aleph_1$, die durch $f(d) := \aleph_1^{\mathbf{L}[d]}$ definiert ist[8], erhält man einen $\aleph_1$–vollständigen Ultrafilter auf $\aleph_1$:

Satz 3.3.5 (Mit AD)
$\aleph_1$ ist meßbar.

Beweis: Für einen vollständigen Beweis verweisen wir auf [STEINWAND, 1998, 2. Beweis von Satz 5.1].

□

Der oben skizzierte Beweis für diesen Satz gibt zunächst nicht das ursprüngliche Resultat von Solovay, der bewiesen hatte:

Satz 3.3.6 (Mit AD)
Der Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ ist ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter.

Beweis: Vergleiche [STEINWAND, 1998, Kapitel 5].

□

Allerdings weisen Martin und Mitchell in [MARTIN und MITCHELL, 1979] darauf hin, daß man durch eine leichte Überlegung auch aus dem Beweis von Martin erhält, daß der gewonnene Filter der Clubfilter ist.
Martins Beweis hat zusätzlich den Vorteil, daß er eine Methode gibt, um über $\aleph_1$ hinauszukommen. Aufbauend auf Martins Beweis zeigte Solovay im Jahre 1968:

Satz 3.3.7 (Mit AD)
$\aleph_2$ ist meßbar.

Beweis: Vergleiche [STEINWAND, 1998, Satz 7.3].

□

Natürlicherweise stellt sich nun die Frage, ob man diese Eigenschaft auch für $\aleph_3$ und allgemeiner für alle Zahlen $\aleph_n$ beweisen kann. Etwas überraschend zeigte Martin 1970, daß die Zahlen $\aleph_n$ für $3 \leq n < \omega$ unter AD singulär mit Konfinalität $\aleph_2$ sind[9]. Somit können die Zahlen $\aleph_n$ für $3 \leq n < \omega$ nach Satz 2.1.38 unter AD nicht meßbar sein. In dieser Arbeit wird gezeigt werden, daß sie dennoch große Kardinalzahlen sind (siehe Korollar 4.6.2), wenn man AD voraussetzt.

[8] Diese Abbildung f ist wohldefiniert nach [KANAMORI, 1994, Theorem 13.12 und Corollary 27.6].

[9] Wir werden dieses Resultat in einem anderen Zusammenhang in Satz 4.4.20 beweisen. Martins ursprünglicher Beweis hat die sogenannte Klasse der uniformen ununterscheidbaren Elemente benutzt, vergleiche [KANAMORI, 1994, Corollary 28.8].

3.4 Die schwache Partitionseigenschaft von $\aleph_1$

Solovays kombinatorischer Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_1$ unter AD war ein erstes Anzeichen dafür, daß mit kombinatorischen Hilfsmitteln erstaunliche Konsequenzen aus AD bewiesen werden können. Hierauf war das Interesse an Untersuchungen des Zusammenspiels von AD und Kombinatorik geweckt. So galt die Forschung in den 70er Jahren unter anderem der Frage, welche Partitionseigenschaften unter AD erfüllt sind. Während beispielsweise unter Voraussetzung des Auswahlaxioms die schwache Partitionseigenschaft $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ nach Satz 2.4.3 für keine unendliche Kardinalzahl κ erfüllt sein kann, ist dies unter AD nicht von vornherein ausgeschlossen. Eine Frage, mit der sich unter anderen Eugene Kleinberg (vergleiche [KLEINBERG, 1973a]), Ilias Kastanas (vergleiche [KASTANAS, 1983]), Ramez Sami (vergleiche [SAMI, 1989]) und Hugh Woodin beschäftigten, ist, ob $\aleph_0$ unter AD die schwache Partitionseigenschaft besitzt. Die Frage ist daher interessant, weil die schwache Partitionseigenschaft von $\aleph_0$ äquivalent dazu ist, daß jede Menge reeller Zahlen die sogenannte Ramsey–Eigenschaft besitzt. Sie gehört immer noch zu den offenen Fragen der Mengenlehre, vergleiche [KANAMORI, 1994, Question 27.18]. Dagegen kann die Frage, ob $\aleph_1$ unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit die schwache Partitionseigenschaft hat, positiv beantwortet werden. Den Beweis dieses Resultats wollen wir in diesem Abschnitt vorführen. Die schwache Partitionseigenschaft von $\aleph_1$ wird eine entscheidende Voraussetzung sein für den Nachweis der Jónsson–Eigenschaft der Zahlen $\aleph_n$ in Kapitel 4 (siehe Satz 4.4.22 und Korollar 4.6.2).
Der Beweis geht zurück auf Donald A. Martin. Schon im Jahre 1968 konnte Martin eine schwächere Partitionseigenschaft für $\aleph_1$ unter Voraussetzung von AD nachweisen, nämlich $\aleph_1 \to (\aleph_1)^\omega_2$. Kenneth Kunen verallgemeinerte dieses Ergebnis. Er zeigte, daß sogar $\aleph_1 \to (\aleph_1)^\alpha_2$ für alle abzählbaren Ordinalzahlen $\alpha < \aleph_1$ gilt.
Im Jahre 1971 gelang es wiederum Martin, die schwache Partitionseigenschaft von $\aleph_1$ zu beweisen. Er verwendete dazu das folgende Ergebnis von Solovay:

Lemma 3.4.1 (Mit AD)
Es gibt eine Formel $\vartheta(v_0, v_1)$ der Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$, so daß es für jede Funktion $q \in \aleph_1^{\aleph_1}$ eine reelle Zahl $b \in \omega^\omega$ gibt mit

$$q(\alpha) = \beta \iff \langle \mathbf{L}[b], \in, b\rangle \models \vartheta[\alpha, \beta].$$

Beweis: Vergleiche [KANAMORI, 1994, Beweis von Theorem 28.5].

□

Martins Beweis, daß $\aleph_1$ die schwache Partitionseigenschaft erfüllt, lehnt sich eng an Solovays Originalbeweis der Meßbarkeit von $\aleph_1$ unter AD an. Solovay zeigte, daß der Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ ein Ultrafilter ist, d.h. daß für jedes $Y \subseteq \aleph_1$ entweder Y selbst oder aber das Komplement von Y in $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ liegt. Die Idee Solovays bestand darin, ein Spiel zu definieren, in dem die beiden Spieler eine abzählbare Folge von Ordinalzahlen spielen. Dabei gewinnt Spieler I, falls das Supremum dieser Folge in Y liegt, Spieler II gewinnt sonst.
Martin verallgemeinerte diese Idee, indem er für abzählbare Zahlen α die Spieler α Folgen der Länge ω spielen ließ. Dadurch erhält man eine Menge X vom Ordnungstyp α von Suprema dieser Folgen. Ist nun eine Partition $F : [\aleph_1]^\alpha \to 2$ gegeben, so kann der Spielverlauf so festgelegt werden, daß Spieler I genau dann gewinnt, wenn $F(X) = 0$ ist. Diese Spielfestlegung ergibt eine homogene Menge. Auf dieser Idee baut ein Beweis für den Satz von Kunen auf.
Natürlich kann man diesen Satz nicht einfach verallgemeinern, indem man die Spieler $\aleph_1$–lange Folgen spielen läßt, denn diese können nicht durch reelle Zahlen kodiert werden. Die Rettung liefert hier Lemma 3.4.1, das aussagt, daß eben doch ein enger Zusammenhang besteht zwischen Folgen in $\aleph_1$ und reellen Zahlen.

Martins Idee war, die beiden Spieler je einen Term und ein Modell, in dem dieser Term interpretiert wird, spielen zu lassen. Dabei wird das gespielte Modell durch ein Sharp kodiert[10]. Die beiden Terme geben dann eine $\aleph_1$–mächtige Menge von Ordinalzahlen, deren Bild unter der gegebenen Partition über den Spielverlauf entscheidet.
Der Beweis benutzt das sogenannte Beschränktheitslemma. Dieses besagt, daß es zu einer $\mathbf{\Sigma}^1_1$–Menge reeller Zahlen, deren Elemente alle Wohlordnungen kodieren, eine abzählbare Ordinalzahl gibt, die die Ordnungstypen dieser Wohlordnungen nach oben beschränkt. WO und WO_α seien dabei definiert wie in Abschnitt 2 in Kapitel 2.

Lemma 3.4.2 (Beschränktheitslemma)
Wenn $B \subseteq \mathrm{WO}$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$–Menge ist, dann gibt es ein $\alpha < \aleph_1$, so daß $B \subseteq \mathrm{WO}_\alpha$ gilt.

Beweis: Vergleiche [STEINWAND, 1998, Korollar 4.27].

□

In den Beweis des Hauptresultats dieses Abschnitts geht wesentlich die Theorie der Sharps ein, um das Spielen von Termen und Modellen zu ermöglichen. Wir hatten in Abschnitt 2.2 eine Formel $S(x)$ angegeben, die im wesentlichen beschreibt, daß x eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause ist, die zusätzlich die Eigenschaften (2) und (3) aus Definition 2.2.4 besitzt. $S(x)$ gibt noch keine vollständige Beschreibung eines Sharps, da sie die Fundiertheit von x nicht impliziert. Jedoch ist die Theorie T_x dann immerhin stark genug, um die folgende Proposition zu zeigen. Bei dieser Proposition geht es um Anfangssegmente der Modelle $\mathcal{M}(x,\alpha)$, wobei dies die Modelle mit den in Lemma 2.2.2 genannten Eigenschaften sind. Da $S(x)$ erfüllt ist, existieren solche Modelle für alle Ordinalzahlen α nach Lemma 2.2.2. Ist E die binäre Relation des Modells $\mathcal{M}(x,\alpha)$, so verstehen wir dabei unter einem **Anfangssegment** von $\mathcal{M}(x,\alpha)$ eine Teilmenge X von $\mathcal{M}(x,\alpha)$, für die gilt: Ist $x \in X$ und $y \mathrel{E} x$, so ist auch $y \in X$.

Proposition 3.4.3 Wenn $S(x)$ erfüllt ist, dann gibt es für alle α ein größtes Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$, das fundiert ist.

Beweis:
Setze

$$A = \bigcup\{B; B \text{ ist fundiertes Anfangssegment von } \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}\}.$$

(1) A ist ein Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$. Denn sei $a \in A$. Dann gibt es ein fundiertes Anfangssegment B von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$ mit $a \in B$. Also ist insbesondere $a \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$. Sei $b \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$ mit $b \mathrel{E} a$. Dann gilt $b \in B \subseteq A$, da B ein Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$ ist. Also ist auch A ein Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$.

(2) A ist fundiert: Angenommen, es gibt eine absteigende Folge in A. Dann gibt es ein fundiertes Anfangssegment B von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$ mit $a_0 \in B$. Also gilt $a_i \in B$ für alle $i \in \omega$, weil B ein Anfangssegment von $\mathcal{M}(x,\alpha)$ ist. Somit ist $\langle a_i; i \in \omega\rangle$ eine absteigende Folge in B, im Widerspruch zur Fundiertheit von B!

[10] Statt die Spieler je einen Term und ein Modell spielen zu lassen, gibt es auch andere Wege, um Elemente von $[\aleph_1]^{\aleph_1}$ durch reelle Zahlen zu kodieren. Eine Möglichkeit ist die Verwendung tieferer Strukturtheorie von $\mathbf{V}_\Theta$ unter AD, wie z.B. das Kodierungslemma von Moschovakis, vergleiche [MOSCHOVAKIS, 1970]. Dieser Ansatz wird im Beweis von Satz I.2.5 in [APTER *et al.*, noch nicht erschienen] benutzt. Eine andere Möglichkeit der Kodierung von Funktionen aus $[\aleph_1]^{\aleph_1}$ durch reelle Zahlen verwendet Steve Jackson in [JACKSON, 1990].

Offensichtlich ist A das größte fundierte Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$. A ist isomorph zu einer Ordinalzahl.

□

Wir bezeichnen das größte fundierte Anfangssegment von $\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}(x,\alpha)}$, welches nach Proposition 3.4.3 existiert, als $\mathrm{FK}(\mathcal{M}(x,\alpha))$ und nennen es den **fundierten Kern** von $\mathcal{M}(x,\alpha)$.

Ist x ein Sharp, so sind die Modelle $\mathcal{M}(x,\alpha)$ alle fundiert. Nach Definition von Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupausen gibt es eine Limeszahl $\delta > \omega$, so daß x die Theorie für $\langle \mathbf{L}_\delta[a], \in, \xi_n\rangle_{n\in\omega}$ ist, wobei $\{\xi_n;\ n \in \omega\}$ eine Menge von ununterscheidbaren Elementen für $\langle \mathbf{L}_\delta[a], \in\rangle$ ist. Daher enthält x den Satz σ_1 aus Abschnitt 2.1.2. Für jedes α folgt daraus im Falle $x = a^{\#}$ aus Satz 2.1.8 und Satz 2.1.9 wegen der Fundiertheit, daß $\mathcal{M}(x,\alpha)$ isomorph zu $\langle \mathbf{L}_\gamma[a], \in\rangle$ für eine Limeszahl γ ist. O.B.d.A. identifizieren wir $\mathcal{M}(x,\alpha)$ dann auch mit $\langle \mathbf{L}_\gamma[a], \in\rangle$. Nun kann leicht der folgende Hilfssatz gezeigt werden:

Hilfssatz 3.4.4 Sei $a \in \omega^\omega$ und $a^{\#}$ existiere.
Dann gilt für alle $\alpha < \aleph_1$ und alle Skolemterme t der Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$ mit einer freien Variablen:

$$t^{\langle \mathbf{L}[a],\in,a\rangle}[\alpha] = t^{\mathcal{M}(a^{\#},\alpha+\omega)}[\alpha].$$

Beweis: Nach Satz 2.2.8 ist $\mathcal{M}(a^{\#},\alpha+\omega)$ isomorph zu $\mathbf{L}_{\iota^a_{\alpha+\omega}}[a]$ und somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{M}(a^{\#},\alpha+\omega)$ gleich $\mathbf{L}_{\iota^a_{\alpha+\omega}}[a]$ ist. Ebenfalls nach Satz 2.2.8 ist die Identität eine elementare Einbettung von $\mathbf{L}_{\iota^a_{\alpha+\omega}}[a]$ in $\mathbf{L}[a]$. Also gilt

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathbf{L}[a], \in, a\rangle & \models & t_{z(0)}[\alpha] = \eta \\ \iff \mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega) & \models & t_{z(0)}[\alpha] = \eta. \end{array}$$

□

Satz 3.4.5 (Mit AD)
$\aleph_1$ besitzt die schwache Partitionseigenschaft, d.h. $\aleph_1 \to (\aleph_1)^{\aleph_1}_2$.

Beweis:
Sei $F : [\aleph_1]^{\aleph_1} \to 2$ gegeben. Es soll gezeigt werden, daß F eine homogene Menge vom Ordnungstyp $\aleph_1$ besitzt.
Wir definieren dazu ein geeignetes Spiel und konstruieren eine Menge $H \subseteq \aleph_1$, so daß $f"[H]^{\aleph_1} = \{0\}$ gilt, falls Spieler I eine Gewinnstrategie besitzt, und $f"[H]^{\aleph_1} = \{1\}$ ist, wenn Spieler II eine Gewinnstrategie hat.

Für die Beschreibung des Spiels werden Mengen A_α benötigt. Wir halten zur Definition dieser Mengen zunächst eine Aufzählung $\{t_k;\ k \in \omega\}$ aller Skolemterme der Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$ mit einer freien Variablen fest. Ist $z \in \omega^\omega$, so sei die Folge z^+ durch $z^+(i) := z(i+1)$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen sei für $\alpha < \aleph_1$:

$$\begin{array}{rcl} A_\alpha & := & \{z \in \omega^\omega; S(z^+)\ \wedge\ \forall\beta \leq \alpha(\beta \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega)) \\ & & \wedge\ \beta \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega)}[\beta] \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega))) \\ & & \wedge\ \forall\beta_1\ \forall\beta_2(\beta_1 \leq \beta_2 \leq \alpha\ \longrightarrow\ t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega)}[\beta_1] \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega)}[\beta_2])\}. \end{array}$$

Es gilt $A_\alpha \subseteq A_\beta$ für $\beta \leq \alpha$.
Damit wird das Spiel wie folgt definiert:
Die Spieler wählen natürliche Zahlen wie gewöhnlich:

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I:} & x(0) & & x(2) & & \dots \\ \mathrm{II:} & & x(1) & & x(3) & \dots \end{array}$$

Wir definieren nun die Auszahlungsmenge für dieses Spiel. Wir unterteilen dazu die Menge der reellen Zahlen in drei Teilmengen. Je nachdem, in welche der Teilmengen Spieler I und Spieler II spielen, wird dann der Spielausgang festgelegt.

Fall A: Es existiert ein $\alpha < \aleph_1$, so daß $x_{\mathrm{I}} \notin A_\alpha$ oder $x_{\mathrm{II}} \notin A_\alpha$ ist. Sei α minimal mit dieser Eigenschaft. Dann soll Spieler II gewinnen, falls $x_{\mathrm{I}} \notin A_\alpha$ gilt. Im anderen Fall gewinnt Spieler I.

Fall B: Es gilt $x_{\mathrm{I}} \in A_\alpha$ und $x_{\mathrm{II}} \in A_\alpha$ für alle $\alpha < \aleph_1$, aber die von den beiden Spielern gespielten Modelle $\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \alpha+\omega)$ bzw. $\mathcal{M}(x_{\mathrm{II}}^+, \alpha+\omega)$, die wegen $S(x_{\mathrm{I}}^+)$ bzw. $S(x_{\mathrm{II}}^+)$ existieren, sind nicht für alle Ordinalzahlen $\alpha < \aleph_1$ fundiert. Sei α die kleinste Ordinalzahl, für die mindestens eines der Modelle $\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \alpha+\omega)$ oder $\mathcal{M}(x_{\mathrm{II}}^+, \alpha+\omega)$ nicht fundiert ist. Dann gewinnt Spieler II, falls $\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \alpha+\omega)$ nicht fundiert ist. Im anderen Fall gewinnt Spieler I.

Fall C: Es gilt $x_{\mathrm{I}} \in A_\alpha$ und $x_{\mathrm{II}} \in A_\alpha$ für alle $\alpha < \aleph_1$, und zusätzlich sind alle gespielten Modelle $\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \alpha+\omega)$ und $\mathcal{M}(x_{\mathrm{II}}^+, \alpha+\omega)$ fundiert. Nach Hilfssatz 2.2.5 sind somit für alle $\gamma < \aleph_1$ die Modelle $\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \gamma)$ und $\mathcal{M}(x_{\mathrm{II}}^+, \gamma)$ fundiert. Dies bedeutet nach Lemma 2.2.11, daß die Spieler Sharps spielen, d.h. es gibt reelle Zahlen $a, b \in \omega^\omega$, so daß $x_{\mathrm{I}}^+ = a^\#$ und $x_{\mathrm{II}}^+ = b^\#$ gilt.
Wir definieren dann eine Funktion $p_x : \aleph_1 \to \aleph_1$ durch

$$p_x(\xi) := \mathrm{Sup}(\{t_{x(0)}^{\langle \mathbf{L}[a], \in, a\rangle}[\omega\cdot\xi + i]; i \in \omega\} \cup \{t_{x(1)}^{\langle \mathbf{L}[b], \in, b\rangle}[\omega\cdot\xi + i]; i \in \omega\}).$$

Da $\mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega)$ ein abzählbares Modell ist, gilt nach Lemma 3.4.4 für alle $\alpha < \aleph_1$

$$t_{x(0)}^{\langle \mathbf{L}[a], \in, a\rangle}[\alpha] = t_{x(0)}^{\mathcal{M}(x_{\mathrm{I}}^+, \alpha+\omega)}[\alpha] < \aleph_1$$

und entsprechend

$$t_{x(1)}^{\langle \mathbf{L}[b], \in, b\rangle}[\alpha] = t_{x(1)}^{\mathcal{M}(x_{\mathrm{II}}^+, \alpha+\omega)}[\alpha] < \aleph_1.$$

Weil $\aleph_1$ regulär ist, ordnet p_x daher jedem Element aus $\aleph_1$ wieder eine Ordinalzahl $< \aleph_1$ zu.
Außerdem ist $\mathrm{Im}(p_x)$ vom Ordnungstyp $\aleph_1$. Denn $\mathrm{Im}(p_x)$ ist konfinal in $\aleph_1$: Sei $\alpha < \aleph_1$ beliebig. Dann gilt $\alpha \leq \omega\cdot\alpha + i \leq t_{x(0)}^{\langle \mathbf{L}[a], \in, a\rangle}[\omega\cdot\alpha + i]$ für alle natürlichen Zahlen i nach Lemma 3.4.4 und der Definition der Menge $A_{\omega\cdot\alpha+i}$.
Also gilt auch $\alpha \leq p_x(\alpha)$, d.h. für alle $\alpha < \aleph_1$ gibt es ein $\beta \in \mathrm{Im}(p_x)$ mit $\alpha \leq \beta$. Da aber $\aleph_1$ regulär ist, hat $\mathrm{Im}(p_x)$ Ordnungstyp $\aleph_1$.
Also macht die folgende Festlegung für den Spielausgang Sinn: Wenn q_x die aufsteigende Aufzählung von $\mathrm{Im}(p_x)$ ist, dann gewinnt Spieler I, falls $F(q_x) = 0$ ist, und Spieler II gewinnt, falls $F(q_x) = 1$ ist.

Dadurch sind die Spielregeln eindeutig festgelegt.
Da AD vorausgesetzt wurde, besitzt einer der Spieler eine Gewinnstrategie. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

1. Fall: Spieler I besitzt eine Gewinnstrategie σ.
Wie schon erwähnt, suchen wir eine Teilmenge H von $\aleph_1$, so daß $F"[H]^{\aleph_1} = \{0\}$ gilt. Dazu betrachten wir für alle $\eta < \aleph_1$ die folgende Menge:

$$\begin{aligned} B_\eta \quad := \quad & \{r \in \omega^\omega \; ; \; \exists z \in \omega^\omega \; \exists \alpha \leq \eta \;\; \forall \beta \leq \alpha (S(z^+) \;\wedge\; \beta \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+, \beta+\omega)) \\ & \wedge\; t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+, \beta+\omega)}[\beta] \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+, \beta+\omega)) \;\wedge\; t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+, \alpha+\omega)}[\alpha] = \eta) \\ & \wedge\; \forall \beta_1 \; \forall \beta_2 (\beta_1 < \beta_2 < \alpha \;\longrightarrow\; t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+, \beta_1+\omega)}[\beta_1] \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+, \beta_2+\omega)}[\beta_2] \leq \eta) \\ & \wedge\; E_r \text{ hat Ordnungstyp } \; t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma * z)_{\mathrm{I}})^+, \alpha+\omega)}[\alpha]\}. \end{aligned}$$

Dies ist die Menge all der Codes für Relationen, die Spieler I antwortet, wenn er gemäß σ gegen eine Folge z von Zügen des Spielers II spielt, in der Spieler II

(a) in jedes A_β für $\beta \leq \alpha$ spielt,

(b) in $\mathcal{M}(z^+, \alpha + \omega)$ genau η spielt.

(Wir erinnern dabei daran, daß in diesem Spiel die Spielzüge als Terme aufgefaßt werden, die in verschiedenen Modellen interpretiert werden).

1. BEHAUPTUNG: Für alle $\eta < \aleph_1$ ist B_η eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$–Menge.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Wir werden die Formel, die die Menge B_η beschreibt, genau aufschlüsseln. Dazu verwenden wir die in Abschnitt 2 eingeführte Notation.

Modelle der Kardinalität $\aleph_0$ besitzen o.B.d.A. die Grundmenge ω: Sei $\langle M, E\rangle$ ein beliebiges abzählbares Modell, $f : \omega \to M$ eine Bijektion. Dann definieren wir eine Relation $R_{E,f}$ auf ω durch

$$n \; R_{E,f} \; m \iff f(n) \; E \; f(m).$$

Offensichtlich sind die Modelle $\langle M, E\rangle$ und $\langle \omega, R_{E,f}\rangle$ isomorph. Insbesondere ist für abzählbare Modelle M die Erfüllbarkeitsrelation "$M \models \varphi$" stets hyperarithmetisch (vergleiche [MOSCHOVAKIS, 1980, Seite 401]), da alle auftretenden Quantoren in M durch natürliche Zahlen interpretiert werden.
Für reelle Zahlen w und u definieren wir eine binäre Relation $e_{u,w}$ auf ω: Ist w^+ eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause und kodiert u eine abzählbare Zahl γ, so gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{M}(w^+, \gamma + \omega)$ mit den in Lemma 2.2.2 genannten Eigenschaften. Da dieses Modell die Kardinalität $\aleph_0$ besitzt, kann als Grundmenge nach der obigen Bemerkung ω gewählt werden. Die zu diesem Modell gehörende binäre Relation nennen wir dann $e_{u,w}$. Ist jedoch eine der beiden Voraussetzungen nicht erfüllt, so sei $e_{u,w}$ diejenige binäre Relation auf ω, die jedes Paar natürlicher Zahlen enthält, d.h. die Menge $\omega \times \omega$.
Wir halten außerdem eine arithmetische Bijektion $B : \omega \to \omega^{<\omega}$ mit der Eigenschaft $B(0) = \emptyset$ fest.

Sei nun $\eta < \aleph_1, c \in \mathrm{WO}_\eta$ fest gewählt. c ist also eine reelle Zahl, die die Wohlordnung η kodiert.

Die Formel, die B_η beschreibt, sieht dann aus wie folgt:

$$\begin{aligned} r \in B_\eta \iff & \exists^1 z \; \exists^1 y \; \exists^0 n_0 \; \exists^0 n_1 (\psi_1(z) \wedge \psi_2(y,c) \wedge \psi_3(y,y,z,n_0) \wedge \\ & \psi_4(y,z,z,n_0,n_1) \wedge \psi_3(c,y,z,n_1) \wedge \exists^0 n_2 \; \exists^0 n_3 \; (\psi_3(y,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, n_2) \wedge \psi_4(y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, \sigma \circ B, n_2, n_3) \wedge \psi_5(r,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, n_3)\;) \wedge \\ & \forall^0 m_1 \; \forall^0 m_2 \; \exists^1 x_1 \; \exists^1 x_2 \; \exists^1 w_1 \; \exists^1 w_2 \; \exists^0 n_4 \; \exists^0 n_5 \; \exists^0 n_6 \; \exists^0 n_7 (\psi_6(x_2,y,m_2) \wedge \\ & \psi_6(x_1,x_2,m_1) \wedge \psi_3(x_1,x_1,z,n_6) \wedge \psi_3(x_2,x_2,z,n_4) \wedge \\ & \psi_2(w_2,c) \wedge \psi_4(x_2,z,z,n_4,n_5) \wedge \psi_3(w_2,x_2,z,n_5) \wedge \psi_2(w_1,w_2) \wedge \\ & \psi_4(x_1,z,z,n_6,n_7) \wedge \psi_3(w_1,x_1,z,n_7) \wedge \psi_2(x_1,w_1) \wedge \psi_2(x_2,w_2)) \\ \iff & \exists^1 z \; \exists^1 y \; \exists^0 n_0 \; \exists^0 n_1 \; \exists^0 n_2 \; \exists^0 n_3 \; \forall^0 m_1 \; \forall^0 m_2 \; \exists^1 x_1 \; \exists^1 x_2 \; \exists^1 w_1 \; \exists^1 w_2 \; \exists^0 n_4 \\ & \exists^0 n_5 \; \exists^0 n_6 \; \exists^0 n_7 \; (\psi_1(z) \wedge \psi_2(y,c) \wedge \psi_3(y,y,z,n_0) \wedge \\ & \psi_4(y,z,z,n_0,n_1) \wedge \psi_3(c,y,z,n_1) \wedge \psi_3(y,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, n_2) \wedge \\ & \psi_4(y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, \sigma \circ B, n_2, n_3) \wedge \psi_5(r,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}}, n_3) \wedge \psi_6(x_2,y,m_2) \wedge \\ & \psi_6(x_1,x_2,m_1) \wedge \psi_3(x_1,x_1,z,n_6) \wedge \psi_3(x_2,x_2,z,n_4) \wedge \\ & \psi_2(w_2,c) \wedge \psi_4(x_2,z,z,n_4,n_5) \wedge \psi_3(w_2,x_2,z,n_5) \wedge \psi_2(w_1,w_2) \wedge \\ & \psi_4(x_1,z,z,n_6,n_7) \wedge \psi_3(w_1,x_1,z,n_7) \wedge \psi_2(x_1,w_1) \wedge \psi_2(x_2,w_2)). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die Formeln im einzelnen:

$$\psi_1(v_0) \iff \exists^1 w\ \forall^0 t(w(t) = v_0(t+1)\ \wedge\ S(w)),$$

wobei S die arithmetische Formel aus Lemma 2.2.11 ist. $\psi_1(z)$ ist eine Σ^1_1–Formel. Sie bedeutet: Die reelle Zahl v_0^+ erfüllt die Formel $\mathrm{S}(v_0^+)$, ist also eine nicht notwendigerweise fundierte Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause mit den Eigenschaften (2) und (3) aus Definition 2.2.4.

$$\psi_2(v_0, v_1) \iff \exists^1 f\ \forall^0 s_1\ \forall^0 s_2(\ ((v_0(\langle\!\langle s_1, s_2\rangle\!\rangle) = 1 \longleftrightarrow v_1(\langle\!\langle f(s_1), f(s_2)\rangle\!\rangle) = 1)\ \wedge\ \forall^0 t_1,\ \forall^0 t_2\ (v_1(\langle\!\langle t_1, t_2\rangle\!\rangle) = 1 \longrightarrow \exists^0 s_3,\ \exists^0 s_4(\ f(s_3) = t_1 \wedge f(s_4) = t_2))\ \vee\ \exists^0 t_0((v_0(\langle\!\langle s_1, s_2\rangle\!\rangle) = 1 \longleftrightarrow (v_1(\langle\!\langle f(s_1), f(s_2)\rangle\!\rangle) = 1\ \wedge v_1(\langle\!\langle f(s_2), t_0\rangle\!\rangle) = 1)\ \wedge \forall^0 t(\ v_1(\langle\!\langle t, t_0\rangle\!\rangle) = 1 \longrightarrow \exists^0 s(f(s) = t)\ )).$$

$\psi_2(v_0, v_1)$ ist eine Σ^1_1–Formel. Sie beschreibt, daß es eine strukturerhaltende Abbildung f von der von v_0 kodierten Relation E_{v_0} auf die von v_1 kodierte Relation E_{v_1} gibt. f ist entweder surjektiv auf der ganzen von v_1 kodierten Relation oder aber surjektiv auf einem Anfangssegment $\langle i \in \omega;\ i\ E_{v_1}\ t_0\rangle$. Ist schon bekannt, daß v_1 eine Wohlordnung γ kodiert, so ist also f eine ordnungserhaltende Surjektion auf γ beziehungsweise auf ein Anfangssegment davon. Somit kodiert v_0 ebenfalls eine Wohlordnung $\leq \gamma$.

$$\psi_3(v_0, v_1, v_2, k_0) \iff \exists^1 f\ \forall^0 s_1,\ \forall^0 s_2((v_0(\langle\!\langle s_1, s_2\rangle\!\rangle) = 1 \longleftrightarrow (f(s_1)\ e_{v_1,v_2}\ f(s_2) \wedge f(s_2)\ e_{v_1,v_2}\ k_0))\ \wedge\ \forall^0 t(\ t\ e_{v_1,v_2}\ k_0 \longrightarrow \exists^0 s\ \exists^0 s_0((f(s) = t)\ \wedge\ (v_0(\langle\!\langle s_0, s\rangle\!\rangle) = 1 \vee v_0(\langle\!\langle s, s_0\rangle\!\rangle) = 1))\ \wedge \forall^0 t_1\ \forall^0 t_2((t_1\ e_{v_1,v_2}\ t_2\ \wedge\ t_2\ e_{v_1,v_2}\ k_0) \longrightarrow t_1\ e_{v_1,v_2}\ k_0)).$$

$\psi_3(v_0, v_1, v_2, k_0)$ ist eine Σ^1_1–Formel. Sie drückt aus, daß es eine surjektive, strukturerhaltende Funktion f von der von v_0 kodierten Relation E_{v_0} auf das durch k_0 bestimmte echte Anfangssegment $\langle i \in \omega;\ i\ e_{v_1,v_2}\ k_0\rangle$ von $\langle \omega, e_{v_1,v_2}\rangle$ gibt, wobei dieses Anfangssegment transitiv ist. Kodiert v_0 eine Wohlordnung γ, so bedeutet dies, daß es eine ordnungserhaltende Funktion f von γ in das transitive Anfangssegment $\langle i \in \omega;\ i\ e_{v_1,v_2}\ k_0\rangle$ des Modells $\langle \omega, e_{v_1,v_2}\rangle$ gibt. Dieses Anfangssegment ist somit selbst eine Wohlordnung vom Ordnungstyp γ.

$$\psi_4(v_0, v_1, v_2, k_0, k_1) \iff t_{v_2(0)}^{\langle \omega,\ e_{v_0,v_1}\rangle}(k_0) = k_1.$$

Diese Formel ist hyperarithmetisch nach der Vorbemerkung über abzählbare Modelle auf Seite 86. Sie drückt aus, daß $\{i \in \omega;\ i\ e_{v_0,v_1}\ k_1\}$ durch den im Modell $\langle \omega, e_{v_0,v_1}\rangle$ an der Stelle $\{i \in \omega;\ i\ e_{v_0,v_1}\ k_0\}$ interpretierten Term $t_{v_2(0)}$ beschrieben wird.

$$\psi_5(v_0, v_1, v_2, k_0) \iff \exists^1 f\ \forall^0 s_1,\ \forall^0 s_2((v_0(\langle\!\langle s_1, s_2\rangle\!\rangle) = 1 \longleftrightarrow (f(s_1)\ e_{v_1,v_2}\ f(s_2) \wedge f(s_2)\ e_{v_1,v_2}\ k_0))\ \wedge\ (s_1 \neq s_2 \longrightarrow f(s_1) \neq f(s_2))\ \wedge \forall^0 t(\ t\ e_{v_1,v_2}\ k_0 \longrightarrow \exists^0 s\ \exists^0 s_0((f(s) = t)\ \wedge\ (v_0(\langle\!\langle s_0, s\rangle\!\rangle) = 1 \vee v_0(\langle\!\langle s, s_0\rangle\!\rangle) = 1))).$$

Diese Σ^1_1–Formel beschreibt, daß es eine strukturerhaltende, bijektive Funktion f zwischen der von v_0 kodierten Relation und dem durch k_0 bestimmtem Anfangssegment $\langle i \in \omega;\ i\ e_{v_1,v_2}\ k_0\rangle$ von $\langle \omega,\ e_{v_1,v_2}\rangle$ gibt.

$$\psi_6(v_0, v_1, k_0) \iff \exists^1 f\ \forall^0 s_1,\ \forall^0 s_2((v_0(\langle\!\langle s_1, s_2\rangle\!\rangle) = 1 \longleftrightarrow (v_1(\langle\!\langle f(s_1), f(s_2)\rangle\!\rangle) = 1\ \wedge\ v_1(\langle\!\langle f(s_2), k_0\rangle\!\rangle) = 1))\ \wedge\ \forall^0 t(\ v_1(\langle\!\langle t, k_0\rangle\!\rangle) = 1 \longrightarrow \exists^0 s\ (f(s) = t))).$$

$\psi_6(v_0, v_1, k_0)$ ist eine Σ^1_1–Formel. Sie drückt aus, daß es eine strukturerhaltende Surjektion f von der von v_0 kodierten Relation auf ein echtes Anfangssegment $\langle i \in \omega;\ i\ E_{v_1}\ k_0\rangle$ der von v_1 kodierten Relation gibt. Ist schon bekannt, daß v_1 eine Wohlordnung γ kodiert, so ist somit auch die von v_0 kodierte Relation eine Wohlordnung $< \gamma$.

Wir betrachten nun genau, was die Formel $\psi_2(y,c) \wedge \psi_3(y,y,z,n_0) \wedge \psi_4(y,z,z,n_0,n_1) \wedge \psi_3(c,y,z,n_1) \wedge \psi_3(y,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},n_2) \wedge \psi_4(y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},\sigma \circ B,n_2,n_3) \wedge \psi_5(r,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},n_3) \wedge \psi_6(x_2,y,m_2) \wedge \psi_6(x_1,x_2,m_1) \wedge \psi_3(x_1,x_1,z,n_6) \wedge \psi_3(x_2,x_2,z,n_4) \wedge \psi_2(w_2,c) \wedge \psi_4(x_2,z,z,n_4,n_5) \wedge \psi_3(w_2,x_2,z,n_5) \wedge \psi_2(w_1,w_2) \wedge \psi_4(x_1,z,z,n_6,n_7) \wedge \psi_3(w_1,x_1,z,n_7) \wedge \psi_2(x_1,w_1) \wedge \psi_2(x_2,w_2)$ beschreibt:
Nach Wahl von c kodiert y wegen $\psi_2(y,c)$ eine Wohlordnung $\alpha \leq \eta$. Wegen $\psi_3(y,y,z,n_0)$ ist $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,z}\ n_0\}$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp α, also $\alpha \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega))$. Wegen $\psi_4(y,z,z,n_0,n_1)$ wird die Menge $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,z}\ n_1\}$ durch $t_{z(0)}(n_0)$, interpretiert im Modell $\langle \omega, e_{y,z}\rangle$, beschrieben. Dabei ist $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,z}\ n_1\}$ wegen $\psi_3(c,y,z,n_1)$ isomorph zu der von c kodierten Wohlordnung η, also ist η ebenfalls ein fundiertes Anfangssegment des Modells $\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)$, d.h.

$$t_{z(0)}^{\langle \omega, e_{y,z}\rangle}[\alpha] = \eta \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)).$$

Weiter wissen wir wegen $\psi_3(y,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},n_2)$, daß $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}}} n_2\}$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp α ist, wobei wir wieder ausgenutzt haben, daß y wegen $\psi_2(y,c)$ die Wohlordnung α kodiert. Also gilt $\alpha \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(((\sigma*z)_{\mathrm{I}})^+,\alpha+\omega))$. Wegen $\psi_4(y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}},\sigma\circ B,n_2,n_3)$ wird die Menge $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}}}\ n_3\}$ durch $t_{\sigma(\emptyset)}(\alpha)$, interpretiert im Modell $\langle \omega, e_{y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}}}\rangle$, beschrieben. Gleichzeitig ist jedoch $\{i \in \omega;\ i\ e_{y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}}}\ n_3\}$ und somit auch $t_{\sigma(\emptyset)}(\alpha)$ wegen $\psi_5(r,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},n_3)$ isomorph zu der von r kodierten Relation E_r. Ist E_r eine Wohlordnung, so ist auch $t_{\sigma(\emptyset)}[\alpha]$, interpretiert in $\langle \omega, e_{y,(\sigma*z)_{\mathrm{I}}}\rangle$, eine Wohlordnung.

Wegen $\psi_6(x_2,y,m_2)$ wissen wir, daß x_2 eine Wohlordnung $\beta_2 < \alpha$ kodiert, denn y kodiert die Wohlordnung α. Nach $\psi_3(x_2,x_2,z,n_4)$ ist $\{i \in \omega;\ i\ e_{x_2,z} n_4\}$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp β_2. Also gilt $\beta_2 \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega))$. Ebenso wissen wir wegen $\psi_6(x_1,x_2,m_1)$, daß x_1 eine Wohlordnung $\beta_1 < \beta_2$ kodiert, und wegen $\psi_3(x_1,x_1,z,n_6)$, daß $\beta_1 \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega))$ gilt. Wegen $\psi_4(x_2,z,z,n_4,n_5)$ wird die Menge $\{i \in \omega;\ i\ e_{x_2,z}\ n_5\}$ durch $t_{z(0)}(\beta_2)$, interpretiert im Modell $\langle \omega, e_{x_2,z}\rangle$, beschrieben. Nach Wahl von c kodiert w_2 wegen $\psi_2(w_2,c)$ eine Wohlordnung $\mu_2 \leq \eta$. Doch wegen $\psi_3(w_2,x_2,z,n_5)$ ist diese von w_2 kodierte Wohlordnung μ_2 isomorph zu $\{i \in \omega;\ i\ e_{x_2,z}\ n_5\}$, d.h.

$$t_{z(0)}^{\langle \omega, e_{x_2,z}\rangle}[\beta_2] = \mu_2 \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega)).$$

Wegen $\psi_2(x_2,w_2)$ wissen wir nun, daß die von x_2 kodierte Wohlordnung keine größere Länge besitzt als die von w_2 kodierte Wohlordnung, also $\beta_2 \leq \mu_2 = t_{z(0)}^{\langle \omega, e_{x_2,z}\rangle}[\beta_2]$.
Ebenso folgt wegen $\psi_4(x_1,z,z,n_6,n_7)$, daß die Menge $\{i \in \omega;\ i\ e_{x_1,z}\ n_7\}$ durch $t_{z(0)}(\beta_1)$, interpretiert im Modell $\langle \omega, e_{x_1,z}\rangle$, beschrieben wird. Wegen $\psi_2(w_1,w_2)$ kodiert w_1 eine Wohlordnung $\mu_1 \leq \mu_2$. Doch wegen $\psi_3(w_1,x_1,z,n_7)$ ist diese von w_1 kodierte Wohlordnung μ_1 isomorph zu $\{i \in \omega;\ i\ e_{x_1,z}\ n_7\}$, d.h.

$$t_{z(0)}^{\langle \omega, e_{x_1,z}\rangle}[\beta_1] = \mu_1 \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega)).$$

Wegen $\psi_2(x_1,w_1)$ wissen wir außerdem, daß die von x_1 kodierte Wohlordnung keine größere Länge besitzt als die von w_1 kodierte Wohlordnung, also $\beta_1 \leq \mu_1 = t_{z(0)}^{\langle \omega, e_{x_1,z}\rangle}[\beta_1]$.

Die Formel

$$\begin{aligned} r \in B_\eta \iff\ & \exists^1 z\ \exists^1 y\ \exists^0 n_0\ \exists^0 n_1 (\psi_1(z) \wedge \psi_2(y,c) \wedge \psi_3(y,y,z,n_0) \wedge \\ & \psi_4(y,z,z,n_0,n_1) \wedge \psi_3(c,y,z,n_1) \wedge \exists^0 n_2\ \exists^0 n_3\ (\psi_3(y,y,(\sigma * \\ & z)_{\mathrm{I}},n_2) \wedge \psi_4(y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},\sigma \circ B,n_2,n_3) \wedge \psi_5(r,y,(\sigma * z)_{\mathrm{I}},n_3)\ ) \wedge \\ & \forall^0 m_1\ \forall^0 m_2\ \exists^1 x_1\ \exists^1 x_2\ \exists^1 w_1\ \exists^1 w_2\ \exists^0 n_4\ \exists^0 n_5\ \exists^0 n_6\ \exists^0 n_7 (\psi_6(x_2,y,m_2) \wedge \\ & \psi_6(x_1,x_2,m_1) \wedge \psi_3(x_1,x_1,z,n_6) \wedge \psi_3(x_2,x_2,z,n_4) \wedge \\ & \psi_2(w_2,c) \wedge \psi_4(x_2,z,z,n_4,n_5) \wedge \psi_3(w_2,x_2,z,n_5) \wedge \psi_2(w_1,w_2) \wedge \\ & \psi_4(x_1,z,z,n_6,n_7) \wedge \psi_3(w_1,x_1,z,n_7) \wedge \psi_2(x_1,w_1) \wedge \psi_2(x_2,w_2)) \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow: \Psi(c,\sigma)$

bedeutet also zusammenfassend: Die reelle Zahl r liegt genau dann in der Menge B_η, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind: Es gibt eine reelle Zahl z, so daß z^+ eine Ehrenfeucht–Mostowski–Blaupause mit den Eigenschaften (2) und (3) aus Definition 2.2.4 ist. Außerdem gibt es eine Ordinalzahl $\alpha < \aleph_1$ gibt mit $\alpha \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)}[\alpha] = \eta \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega))$. Für alle β_1, β_2 mit $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$ gilt ebenfalls $\beta_1 \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega)}[\beta_1] \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega))$ und $\beta_2 \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega)}[\beta_2] \in \mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega))$. Zusätzlich gilt $t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega)}[\beta_1] \leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega)}[\beta_2] \leq \eta$ für alle $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$. Außerdem besitzt $t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma*z)_\mathrm{I})^+,\alpha+\omega)}[\alpha]$ denselben Ordnungstyp wie die von r kodierte Relation E_r.
Dies entspricht genau unserer Definition von B_η, d.h. wir haben eine Beschreibung dieser Menge gefunden.

Nun muß noch die Komplexität dieser Formel berechnet werden. Sei d eine reelle Zahl, die die beiden Zahlen c und $\sigma \circ B$ kodiert (z.B. $d := c \oplus \sigma \circ B$), und bezeichne Hyp die Menge aller hyperarithmetischen Mengen reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
B_\eta \in\ & \exists^1 \exists^1 \exists^0 \exists^0 (\Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1(c) \cap \Sigma^1_1 \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1(c) \\
& \cap \exists^0 \exists^0 (\Sigma^1_1(\sigma) \cap \mathrm{Hyp}(\sigma) \cap \Sigma^1_1(\sigma)) \\
& \cap \forall^0 \forall^0 \exists^1 \exists^1 \exists^1 \exists^1 \exists^0 \exists^0 \exists^0 \exists^0 (\Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \\
& \cap \Sigma^1_1(c) \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1)) \\
=\ & \exists^1 \exists^1 \exists^0 \exists^0 \exists^0 \exists^0 \forall^0 \forall^0 \exists^1 \exists^1 \exists^1 \exists^1 \exists^0 \exists^0 \exists^0 \exists^0 (\Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1(c) \\
& \cap \Sigma^1_1 \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1(c) \cap \Sigma^1_1(\sigma) \cap \mathrm{Hyp}(\sigma) \cap \Sigma^1_1(\sigma) \\
& \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1(c) \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \\
& \cap \mathrm{Hyp} \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1 \cap \Sigma^1_1). \\
=\ & \Sigma^1_1(d).
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also $B_\eta \in \Sigma^1_1(d)$, und damit ist B_η eine $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$–Menge.

2. BEHAUPTUNG: Für alle $\eta < \aleph_1$ gilt $B_\eta \subseteq \mathrm{WO}$.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG: Sei $\eta < \aleph_1$ und $r \in B_\eta$.
Dann gibt es ein $z \in \omega^\omega$ und ein $\alpha \leq \eta$, so daß $z \in A_\alpha$ ist. Also gilt wegen $A_\alpha \subseteq A_\beta$ für $\beta \leq \alpha$ auch $z \in A_\beta$ für alle $\beta \leq \alpha$. Da jedoch σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist, folgt nach Definition des Spiels (Fall A):

$$(\sigma * z)_\mathrm{I} \in A_\alpha.$$

Insbesondere ist $t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma*z)_\mathrm{I})^+,\alpha+\omega)}[\alpha]$ eine echte Ordinalzahl. Weil E_r vom Ordnungstyp $t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma*z)_\mathrm{I})^+,\alpha+\omega)}[\alpha]$ ist, ist E_r fundiert, also gilt $r \in \mathrm{WO}$.

Aus den beiden Behauptungen und Lemma 3.4.2 folgt, daß es für alle $\eta < \aleph_1$ ein $\gamma < \aleph_1$ gibt, so daß $B_\eta \subseteq \mathrm{WO}_\gamma$ gilt. Sei γ_η minimal mit dieser Eigenschaft.
Damit definieren wir nun eine Funktion $w : \aleph_1 \to \aleph_1$ durch $w(\eta) := \gamma_\eta + 1$.
Sei

$$C := \{\alpha < \aleph_1;\ \forall \eta < \alpha (w(\eta) < \alpha)\}.$$

Es wird sich herausstellen, daß eine Teilmenge von C homogen für F ist. Dazu zeigen wir zunächst:

3. BEHAUPTUNG: C ist club in $\aleph_1$.

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG:

(1) C ist abgeschlossen: Sei $\gamma < \aleph_1$ mit $C \cap \gamma \neq \emptyset$. Sei $\delta := \mathrm{Sup}(\gamma \cap C) \in \aleph_1$. Für alle $\eta < \delta$ gibt es ein $\alpha \in \gamma \cap C$ mit $\eta < \alpha$. Da $\alpha \in C$ ist, folgt $w(\eta) < \alpha$, also $w(\eta) < \delta$. Daher gilt $\delta \in C$.

(2) C ist konfinal in $\aleph_1$: Sei $\gamma \in \aleph_1$. Wir definieren eine Folge $\langle \gamma_i;\ i \in \omega \rangle \subseteq \aleph_1$: Es sei $\gamma_0 := \gamma$ und $\gamma_{n+1} := \mathrm{Sup}\{w(\alpha) + 1;\ \alpha < \gamma_n\}$ für alle $n \in \omega$. Da $\aleph_1$ regulär ist, folgt induktiv $\gamma_n < \aleph_1$ für alle $n \in \omega$, also auch $\delta := \mathrm{Sup}\{\gamma_n;\ n \in \omega\} < \aleph_1$. Außerdem gilt $\delta \in C$, denn für alle $\eta < \delta$ gibt es ein $n \in \omega$ mit $\eta < \gamma_n$, also $w(\eta) < w(\eta) + 1 \leq \gamma_{n+1} \leq \delta$. Somit ist ein $\delta \geq \gamma$ gefunden, das in C liegt. Also ist C konfinal.

Insbesondere ist C also vom Ordnungstyp $\aleph_1$, d.h. es gibt eine ordnungserhaltende Bijektion $\pi : \aleph_1 \to C$.
Nun definieren wir

$$H := \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(\pi)) = \{\mathrm{Sup}(\{\pi(\omega \cdot \xi + n);\ n \in \omega\}); \xi < \aleph_1\} \subseteq \aleph_1.$$

Dies ist die Menge der schon in Definition 3.2.5 eingeführten ω–Limiten der Funktion π. Da C eine Clubmenge ist, ist H eine Teilmenge von C. Weil H konfinal in C liegt, ist H ebenfalls vom Ordnungstyp $\aleph_1$.
Es muß nur noch gezeigt werden, daß H homogen für F ist.
Dazu werden wir beweisen, daß jedes $p \in [H]^{\aleph_1}$ die Aufzählung einer Menge $\mathrm{Im}(p_{\sigma * z})$ ist, wobei z^+ ein Sharp ist. Damit folgt dann $F(p) = 0$, weil σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist. Also ist $F"[H]^{\aleph_1} = \{0\}$, und wir haben das gewünschte Ergebnis.

Sei also $p \in [H]^{\aleph_1}$. Dann gilt $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(\Lambda_\omega(\pi))$ in der Notation von Abschnitt 3.2.2. Nach Hilfssatz 3.2.9 gibt es eine Funktion $q \in [\aleph_1]^{\aleph_1}$ mit $\Lambda_\omega(q) = p$, d.h. $p(\alpha) = \mathrm{Sup}\{q(\omega \cdot \alpha + n);\ n \in \omega\}$ für alle $\alpha < \aleph_1$.
Wir definieren nun eine Folge $z \in \omega^\omega$ mit $p = p_{\sigma * z}$. Dazu brauchen wir eine reelle Zahl b, so daß in $\mathbf{L}[b]$ die Funktion q durch einen einstelligen Skolemterm beschrieben wird.
Ein solches b gibt es, denn nach Lemma 3.4.1 gibt es eine Formel $\vartheta(v_0, v_1)$ der Sprache $\mathcal{L}_\in(\dot{P})$ und eine reelle Zahl b, so daß gilt:

$$q(\alpha) = \beta \quad \text{genau dann, wenn} \quad \langle \mathbf{L}[b], \in, b \rangle \models \vartheta(\alpha, \beta).$$

Sei nun t_k der zu $\vartheta(v_0, v_1)$ gehörende Skolemterm. Dann gilt für alle $\alpha < \aleph_1$:

$$q(\alpha) = \beta \ \text{ genau dann, wenn } \quad \langle \mathbf{L}[b], \in, b \rangle \models t_k[\alpha] = \beta.$$

Setze nun $z := \langle k \rangle^\frown b^\#$.

4. BEHAUPTUNG: $p = p_{\sigma * z}$, d.h. $p(\xi) = p_{\sigma * z}(\xi)$ für alle $\xi < \aleph_1$.

BEWEIS DER 4. BEHAUPTUNG:
Die reelle Zahl z liegt in allen Mengen A_α, da $z^+ = b^\#$ ein Sharp ist und q eine strikt aufsteigende Funktion ist. Spielt Spieler II die reelle Zahl z, so sind außerdem die von ihm gewählten Modelle $\mathcal{M}(z^+, \alpha + \omega)$ für alle $\alpha < \aleph_1$ fundiert. Nach **Fall A** und **Fall B** liegt auch $(\sigma * z)_{\mathrm{I}}$ in allen A_α, und die von Spieler I gespielten Modelle $\mathcal{M}(((\sigma * z)_{\mathrm{I}})^+, \alpha + \omega)$ sind alle fundiert, da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist. Dies zeigt, daß Spieler I

ein Sharp spielt, wenn er gemäß der Strategie σ spielt, und wenn Spieler II ein Sharp spielt. Also gilt $(\sigma * z)_{\mathrm{I}} = \langle\sigma(\emptyset)\rangle^\frown a^\#$ für ein $a \in \omega^\omega$.

Sei nun $\xi < \aleph_1$ und $i \in \omega$ beliebig.
Da nach der Vorbemerkung $(\sigma * z)_{\mathrm{I}} \in A_{\omega\cdot\xi+i}$ gilt, ist $\mu := t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma*z)_{\mathrm{I}})^+,\omega\cdot\xi+\omega)}[\omega\cdot\xi+i]$ eine echte Ordinalzahl. Wenn $r \in \omega^\omega$ die Wohlordnung μ kodiert, dann gilt $r \in B_{q(\omega\cdot\xi+i)}$ und somit $\mu < w(q(\omega\cdot\xi+i))$ nach Definition der Funktion w.
Andererseits gilt $q(\omega\cdot\xi+i) < p(\xi)$. Da $p(\xi)$ ein Element der Clubmenge C ist, folgt deshalb $w(q(\omega\cdot\xi+i)) < p(\xi)$. Insgesamt gilt daher nach Lemma 3.4.4 für alle $i \in \omega$:

$$\begin{aligned} t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle \mathbf{L}[a],\in,a\rangle}[\omega\cdot\xi+i] &= t_{\sigma(\emptyset)}^{\mathcal{M}(((\sigma*z)_{\mathrm{I}})^+,\omega\cdot\xi+\omega)}[\omega\cdot\xi+i] \\ &\leq w(q(\omega\cdot\xi+i)) \\ &< p(\xi). \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\mathrm{Sup}(\{t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle \mathbf{L}[a],\in,a\rangle}[\omega\cdot\xi+i]; i\in\omega\}) \leq p(\xi),$$

und daher

$$\begin{aligned} p_{\sigma*z}(\xi) &= \mathrm{Sup}(\{t_{\sigma(\emptyset)}^{\langle \mathbf{L}[a],\in,a\rangle}[\omega\cdot\xi+i];\ i\in\omega\}\cup\{t_k^{\langle \mathbf{L}[b],\in,b\rangle}[\omega\cdot\xi+i];\ i\in\omega\}) \\ &= \mathrm{Sup}(\{t_k^{\langle \mathbf{L}[b],\in,b\rangle}[\omega\cdot\xi+i];\ i\in\omega\}) \\ &= p(\xi). \end{aligned}$$

Da $\xi < \aleph_1$ beliebig gewählt war, ist somit die Behauptung bewiesen.

Da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist, folgt nun

$$F(p) = F(p_{\sigma*z}) = 0,$$

da $p = p_{\sigma*z}$ als strikt aufsteigende Funktion die Aufzählung von $\mathrm{Im}(p_{\sigma*z})$ ist. Also ist H eine homogene Menge von F vom Ordnungstyp $\aleph_1$.

2. Fall: Spieler II hat eine Gewinnstrategie τ. Ganz analog zum ersten Fall kann auch hier eine homogene Menge gefunden werden.
Wir suchen eine Teilmenge H von $\aleph_1$, so daß $F``[H]^{\aleph_1} = \{1\}$ gilt. Dazu wird für alle $\eta < \aleph_1$ die folgende Menge betrachtet:

$$\begin{aligned} B_\eta := \{ & r\in\omega^\omega;\ \exists z\in\omega^\omega\ \exists\alpha\leq\eta\ \forall\beta\leq\alpha(S(z^+)\ \wedge\ \beta\in\mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega)) \\ & \wedge\ t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega)}[\beta]\in\mathrm{FK}(\mathcal{M}(z^+,\beta+\omega))\ \wedge\ t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\alpha+\omega)}[\alpha]=\eta) \\ & \wedge\ \forall\beta_1\ \forall\beta_2(\beta_1<\beta_2<\alpha\longrightarrow t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_1+\omega)}[\beta_1]\leq t_{z(0)}^{\mathcal{M}(z^+,\beta_2+\omega)}[\beta_2]\leq\eta) \\ & \wedge\ E_r \text{ hat Ordnungstyp } t_{\tau(z(0))}^{\mathcal{M}(((z*\tau)_{\mathrm{II}})^+,\alpha+\omega)}[\alpha]\}. \end{aligned}$$

Wie im ersten Fall kann gezeigt werden, daß B_η eine $\mathbf{\Sigma}_1^1$–Menge ist für alle $\eta < \aleph_1$.

Daher ist $B_\eta \subseteq \mathrm{WO}$ für jedes $\eta < \aleph_1$. Denn ist $r \in B_\eta$, so gibt es eine reelle Zahl $z \in \omega^\omega$ und ein $\alpha \leq \eta$ mit $z \in A_\beta$ für alle $\beta \leq \alpha$. Da τ eine Gewinnstrategie für Spieler II ist, folgt $(z*\tau)_{\mathrm{II}} \in A_\alpha$ nach **Fall A**, also ist $t_{\tau(z(0))}^{\mathcal{M}(((z*\tau)_{\mathrm{II}})^+,\alpha+\omega)}(\alpha)$ eine Wohlordnung. Somit ist E_r fundiert, d.h. $r \in \mathrm{WO}$.
Nach dem Beschränktheitslemma 3.4.2 folgt nun wieder $B_\eta \subseteq \mathrm{WO}_{\gamma_\eta}$ für eine abzählbare Ordinalzahl γ_η und wir definieren eine Clubmenge $C := \{\alpha < \aleph_1;\ \forall\eta<\alpha\ (\gamma_\eta+1<\alpha)\}$. Die Menge aller ω–Limiten in C liefert nun eine homogene Menge H für F: Ist $\pi : \aleph_1 \to C$ eine Bijektion, dann sei $H := \{\mathrm{Sup}(\{\pi(\omega\cdot\xi+i);\ i\in\omega\});\ \xi<\aleph_1\} \subseteq \aleph_1$. Um zu beweisen,

daß diese Menge homogen ist, konstruiert man analog zum ersten Fall für jede Funktion $p \in [H]^{\aleph_1}$ eine reelle Zahl z, wobei z^+ ein Sharp ist. Dann wird gezeigt, daß $p = p_{z*\tau}$ gilt. Dabei wird verwendet, daß nach **Fall A** und **Fall B** auch $((z*\tau)_{\text{II}})^+$ ein Sharp ist. Damit folgt $F(p) = 1$ für alle $p \in [H]^{\aleph_1}$, was die Homogenität von H beweist.

□

Insbesondere ist hiermit nach Satz 3.1.4 gezeigt, daß $\aleph_1$ eine meßbare Kardinalzahl ist. Satz 3.4.5 gibt uns also einen alternativen Beweis von Satz 3.3.5.

3.5 Die Länge der Ultrapotenz von $\aleph_1$

Wir haben bereits gesehen, daß aus AD die Meßbarkeit von $\aleph_1$ folgt. Nun kann es auf meßbaren Kardinalzahlen unterschiedliche normale Ultrafilter geben, und schon aus theoretischen Gründen ist eine genaue Untersuchung der verschiedenen normalen Ultrafilter auf einer gegebenen meßbaren Kardinalzahl interessant, um ein besseres Verständnis vom kombinatorischen Gehalt des Axioms der Determiniertheit zu erhalten. Dieses Programm ist durchgeführt in [Jackson, 1990], [Kleinberg, 1982], [Henle *et al.*, 1984], [Henle, 1981] und [Mignone, 1983]. Im Fall $\aleph_1$ haben wir nach Satz 3.3.6 und Korollar 2.1.23 nur einen einzigen normalen Ultrafilter, nämlich den Clubfilter. Die Berechnung des Ordnungstyps seiner Ultrapotenz wird wesentlich für Kapitel 4 sein: Wir werden dort wohlgeordnete Strukturen konstruieren, deren Ordnungstyp wir mit Hilfe der Kenntnis dieser Ordinalzahl bestimmen können. Die Berechnung des Ordnungstyps der Ultrapotenz von $\aleph_1$ modulo dem Clubfilter wird das Ziel dieses Abschnitts sein.
Nach Satz 2.1.32 wissen wir, daß die Ultrapotenz einer Kardinalzahl κ modulo einem σ–vollständigen Ultrafilter $\mathcal{C}$ wohlgeordnet ist. Somit macht die Frage nach dem Ordnungstyp von $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ für jede meßbare Kardinalzahl κ modulo einem κ–vollständigen Ultrafilter $\mathcal{C}$ auf κ Sinn.
Der Ordnungstyp einer solchen Ultrapotenz $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ läßt sich allgemein leicht nach unten abschätzen. Beispielsweise kann man dafür das Misch– und Sortierlemma 3.2.15 verwenden. Der Ordnungstyp von $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ ist immer größer als κ selbst. Es kann nämlich eine Teilmenge der Ultrapotenz gefunden werden, die mindestens Ordnungstyp κ^+ besitzt:

Satz 3.5.1 Sei κ eine meßbare Kardinalzahl, $\mathcal{C}$ ein normaler Ultrafilter auf κ.
Dann besitzt $[\kappa]^\kappa/\mathcal{C}$ mindestens Ordnungstyp κ^+.

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15. Denn sei α mit $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ gegeben.
Wähle $f \in [\kappa]^\kappa$ beliebig und sei Sort_α eine Funktion mit den Eigenschaften aus Satz 3.2.15. Wenn $\mathrm{Sort}_\alpha(f) = \langle f_\beta;\ \beta < \alpha\rangle$ gilt, so ist $\langle [f_\beta]_{\mathcal{C}};\ \beta < \alpha\rangle$ eine echt aufsteigende Folge in $[\kappa]^\kappa/\mathcal{C}$ vom Ordnungstyp α.
Dies zeigt, daß $[\kappa]^\kappa/\mathcal{C}$ mindestens Ordnungstyp α besitzt. Da α mit der Eigenschaft $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ beliebig gewählt war, bedeutet das, daß $[\kappa]^\kappa/\mathcal{C}$ mindestens Ordnungstyp κ^+ besitzt.

□

Somit besitzt $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ ebenfalls mindestens Ordnungstyp κ^+ :

Korollar 3.5.2 Sei κ eine meßbare Kardinalzahl, $\mathcal{C}$ ein normaler Ultrafilter auf κ.
Dann besitzt $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ mindestens Ordnungstyp κ^+.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.5.1, da $[\kappa]^\kappa/\mathcal{C} \subseteq \kappa^\kappa/\mathcal{C}$ gilt.

□

Eine Abschätzung des Ordnungstyps einer Ultrapotenz $\kappa^\kappa/\mathcal{C}$ nach oben ist dagegen in dieser Allgemeinheit nicht möglich. Wir betrachten im weiteren daher hier nur den Fall $\kappa = \aleph_1$, für die Betrachtung des Falles $\kappa \neq \aleph_1$ verweisen wir auf den Ausblick (Kapitel 5). Nach Satz 3.3.5 ist $\aleph_1$ unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit eine meßbare Kardinalzahl, wobei der Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ nach Proposition 2.1.20, Proposition 2.1.21 und Satz 3.3.6 ein $\aleph_1$–vollständiger, normaler, freier Ultrafilter auf $\aleph_1$ ist[11].
Nach Satz 2.1.32 ist somit die Ultrapotenz $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ wohlgeordnet, und nach Korollar 3.5.2 beträgt ihr Ordnungstyp mindestens $\aleph_2$.
Wir werden nun die Ultrapotenz auch nach oben abschätzen und zeigen, daß $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}$ Ordnungstyp $\aleph_2$ besitzt.

Satz 3.5.3 (Mit AD)
Sei $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ der Clubfilter auf $\aleph_1$. Dann hat $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ höchstens Ordnungstyp $\aleph_2$.

Beweis:
Wir suchen eine ordnungserhaltende Abbildung von $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ in $\aleph_2$.
Für jede Funktion $f \in \aleph_1^{\aleph_1}$ gibt es nach Lemma 3.4.1 eine Formel $\vartheta(v_0, v_1)$ und ein $t \in \omega^\omega$, so daß für alle $\alpha, \beta \in \aleph_1$ gilt:

$$f(\alpha) = \beta \iff \langle \mathbf{L}[t], \in, t\rangle \models \vartheta[\alpha, \beta].$$

Wir wählen ϑ minimal (in einer beliebigen Wohlordnung der Formeln) mit dieser Eigenschaft. Eine reelle Zahl t mit der oben genannten Eigenschaft nennen wir **Beschreibungszeugen** für die Funktion f. Da f eine Funktion ist, gilt:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}[t], \in, t\rangle \quad \models \quad & \forall\, \alpha < \aleph_1\ \exists\, \beta < \aleph_1\ (\vartheta[\alpha,\beta] \\ & \wedge ((\vartheta[\alpha,\gamma]\ \wedge\ \gamma < \aleph_1) \longrightarrow\ \gamma = \beta)).\end{aligned}$$

Da $\aleph_1$ und $\aleph_2$ nach Satz 2.2.8 Silversche ununterscheidbare Elemente für $\mathbf{L}[t]$ sind, gilt auch

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}[t], \in, t\rangle \quad \models \quad & \forall\, \alpha < \aleph_2\ \exists\, \beta < \aleph_2\ (\vartheta[\alpha,\beta] \\ & \wedge ((\vartheta[\alpha,\gamma]\ \wedge\ \gamma < \aleph_2) \longrightarrow \gamma = \beta)).\end{aligned}$$

$\beta(f, \alpha, t)$ bezeichne in diesem Fall das eindeutig bestimmte $\beta < \aleph_2$ mit $\langle \mathbf{L}[t], \in, t\rangle \models \vartheta[\alpha, \beta]$.

1. BEHAUPTUNG: $\beta(f, \aleph_1, t)$ ist unabhängig vom Beschreibungszeugen t; mit anderen Worten: Sind t und s Beschreibungszeugen für f, so ist $\beta(f, \aleph_1, t) = \beta(f, \aleph_1, s)$.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Sei $f \in \aleph_1^{\aleph_1}$ und seien s und t Beschreibungszeugen für f, d.h. es gilt für alle $\alpha, \beta < \aleph_1$:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \beta \quad &\iff \quad \langle \mathbf{L}[s], \in, s\rangle \models \vartheta[\alpha, \beta] \\ f(\alpha) = \beta \quad &\iff \quad \langle \mathbf{L}[t], \in, t\rangle \models \vartheta[\alpha, \beta].\end{aligned}$$

Angenommen $\beta(f, \aleph_1, s) < \beta(f, \aleph_1, t)$. Da nach Satz 2.1.11 und Satz 2.1.12 $\mathbf{L}[s]^{\mathbf{L}[s\oplus t]} = \mathbf{L}[s]$ und $\mathbf{L}[t]^{\mathbf{L}[s\oplus t]} = \mathbf{L}[t]$ gilt, und außerdem $\beta(f, \aleph_1, x)$ für alle x nur vom Wert von $\beta(f, \aleph_1, x)^{\mathbf{L}[x]}$ abhängt, gilt auch

$$\langle \mathbf{L}[s \oplus t], \in, s \oplus t\rangle \models \beta(f, \aleph_1, s) < \beta(f, \aleph_1, t)$$

und damit für alle Silverschen ununterscheidbaren Elemente $\alpha < \aleph_1$

$$\langle \mathbf{L}[s \oplus t], \in, s \oplus t\rangle \models \beta(f, \alpha, s) < \beta(f, \alpha, t),$$

[11] Nach Korollar 2.1.23 ist $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ sogar der einzige Ultrafilter auf $\aleph_1$ mit diesen Eigenschaften.

weil $\aleph_1$ nach Satz 2.2.8 selbst zu der Klasse $I_{s\oplus t}$ der Silverschen ununterscheidbaren Elemente für $\mathbf{L}[s\oplus t]$ gehört. Man beachte hierzu, daß nach Satz 2.2.8 die Klasse $I_{s\oplus t}\cap\aleph_1$ club in $\aleph_1$ ist, da $\aleph_1$ nach Satz 3.3.5 und Satz 2.1.38 regulär ist. Demnach gibt es also Silversche ununterscheidbare Elemente unterhalb von $\aleph_1$.
Aber für Zahlen $\alpha < \aleph_1$ wissen wir nach Definition, daß $\beta(f,\alpha,s) = \beta(f,\alpha,t)$ ist. Wir haben also einen Widerspruch herbeigeführt, und somit ist die Behauptung bewiesen.

Wir können also $\beta(f,\aleph_1) := \beta(f,\aleph_1,t)$ für alle Beschreibungszeugen t von f setzen.

Sei $F : \aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1} \to \aleph_2$ die Abbildung, die jedem $[f]_{\mathcal{C}_{\aleph_1}} \in \aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ das Element $\beta(f,\aleph_1) \in \aleph_2$ zuordnet. Wir werden zeigen, daß F eine ordnungserhaltende Funktion ist:

2. BEHAUPTUNG: F ist wohldefiniert.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG: Seien $f,g \in \aleph_1^{\aleph_1}$ und $\beta(f,\aleph_1) < \beta(g,\aleph_1)$. Wir wählen beliebige Beschreibungszeugen t_f für f und t_g für g. Wiederum wegen $\mathbf{L}[t_f]^{\mathbf{L}[t_f\oplus t_g]} = \mathbf{L}[t_f]$ und $\mathbf{L}[t_g]^{\mathbf{L}[t_f\oplus t_g]} = \mathbf{L}[t_g]$ gilt $\langle \mathbf{L}[t_f\oplus t_g], \in, t_f\oplus t_g\rangle \models \beta(f,\aleph_1) < \beta(g,\aleph_1)$ und damit $\langle \mathbf{L}[t_f\oplus t_g], \in, t_f\oplus t_g\rangle \models \beta(f,\alpha) < \beta(g,\alpha)$ für alle $\alpha \in I_{t_f\oplus t_g} \cap \aleph_1$. Also gilt $f(\alpha) < g(\alpha)$ für alle $\alpha \in I_{t_f\oplus t_g} \cap \aleph_1$. Da die Menge $I_{t_f\oplus t_g} \cap \aleph_1$ aller abzählbaren Silverschen ununterscheidbaren Elemente club in $\aleph_1$ liegt, gilt also $f < g$ auf einer Menge, die im Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ enthalten ist. Insbesondere heißt das $[f]_{\mathcal{C}_{\aleph_1}} \neq [g]_{\mathcal{C}_{\aleph_1}}$. Somit ist die Wohldefiniertheit von F gezeigt.

3. BEHAUPTUNG: F ist ordnungserhaltend.

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG:
Seien $f,g \in \aleph_1^{\aleph_1}$ gegeben mit $[f]_{\mathcal{C}_{\aleph_1}} <_{\mathcal{C}_{\aleph_1}} [g]_{\mathcal{C}_{\aleph_1}}$, d.h. $f < g$ auf einer Clubmenge von $\aleph_1$. Wir wählen wieder beliebige Beschreibungszeugen t_f für f und t_g für g. Es gibt also Formeln $\vartheta_f(v_0,v_1)$ und $\vartheta_g(v_0,v_1)$, so daß für alle $\alpha,\beta \in \aleph_1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{L}[t_f], \in, t_f\rangle \models \vartheta_f[\alpha,\beta] \\ g(\alpha) = \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{L}[t_g], \in, t_g\rangle \models \vartheta_g[\alpha,\beta]. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{L}[t_f]^{\mathbf{L}[t_f\oplus t_g]} = \mathbf{L}[t_f]$ und $\mathbf{L}[t_g]^{\mathbf{L}[t_f\oplus t_g]} = \mathbf{L}[t_g]$ gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{L}[t_f\oplus t_g], \in, t_f\oplus t_g\rangle \models \vartheta_f[\alpha,\beta] \\ g(\alpha) = \beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{L}[t_f\oplus t_g], \in, t_f\oplus t_g\rangle \models \vartheta_g[\alpha,\beta]. \end{aligned}$$

Die Menge $I_{t_f\oplus t_g}\cap\aleph_1$ der abzählbaren Silverschen ununterscheidbaren Elemente ist club in $\aleph_1$ (siehe Satz 2.2.8). Da $f(\alpha) < g(\alpha)$ für alle Elemente α einer Clubmenge von $\aleph_1$ gilt und der Schnitt zweier Clubmengen ebenfalls club und somit insbesondere nicht leer ist, gibt es ein $\gamma \in I_{t_f\oplus t_g}\cap\aleph_1$ mit $f(\gamma) < g(\gamma)$. Also gilt $\beta(f,\gamma,t_f\oplus t_g) < \beta(g,\gamma,t_f\oplus t_g)$. Wegen der Ununterscheidbarkeit folgt nun $\beta(f,\aleph_1) = \beta(f,\aleph_1,t_f\oplus t_g) < \beta(g,\aleph_1,t_f\oplus t_g) = \beta(g,\aleph_1)$.
Somit ist F ordnungserhaltend.

Es ist hiermit eine ordnungserhaltende Abbildung von $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ in $\aleph_2$ gefunden, d.h. $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}_{\aleph_1}$ hat höchstens Ordnungstyp $\aleph_2$.

□

Zusammenfassend ist nun gezeigt, daß die Ultrapotenz von $\aleph_1$ modulo $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ Ordnungstyp $\aleph_2$ besitzt:

Korollar 3.5.4 (Mit AD)
$\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C}$ besitzt Ordnungstyp $\aleph_2$.

Beweis: Folgt aus Korollar 3.5.2 und Satz 3.5.3.

□

Kapitel 4

Der Satz von Kleinberg

4.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Modellen, in denen das Auswahlaxiom falsch ist. Genauer gesagt handelt es sich um Modelle, in denen es eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft gibt[1]. Es wird sich zeigen, daß es in diesen Modellen unendlich viele Jónsson–Zahlen gibt. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es sogar möglich, daß alle Zahlen $\aleph_n$ Jónsson–Zahlen und darüberhinaus $\aleph_\omega$ eine Rowbottom–Zahl ist. Die Konsistenzstärke der letzten Aussage gehört in der Mengenlehre mit Auswahl immer noch zu den großen offenen Problemen und Herausforderungen, siehe Abschnitt 2.3.

Wir wenden uns also nun dem Beweis des Hauptresultats zu, welches von Eugene M. Kleinberg im Jahre 1977 bewiesen wurde, siehe [KLEINBERG, 1977b] und [KLEINBERG, 1977a]. Wir nehmen ein κ, welches die schwache Partitionseigenschaft besitzt, definieren eine Folge von Kardinalzahlen κ_n für $n \leq \omega$, und zeigen, daß jedes Element dieser Folge eine Jónsson–Zahl ist.

Da wir in Abschnitt 3.4 bereits gezeigt haben, daß $\aleph_1$ unter dem Axiom der Determiniertheit die schwache Partitionseigenschaft besitzt, erhalten wir unmittelbar unter Annahme von AD eine Folge von Jónsson–Zahlen.

Was übrig bleibt, ist die genaue Berechnung dieser Zahlen. Dazu verwenden wir im Falle $\kappa = \aleph_1$ die Analyse der Ultrapotenz aus Abschnitt 3.5. Dies ermöglicht uns, auszurechnen, daß in diesem Fall $\kappa_n = \aleph_n$ ist. Somit erhalten wir ein Modell, in dem die Zahlen $\aleph_n$ Jónsson–Zahlen sind und $\aleph_\omega$ eine Rowbottom–Zahl.

Wir fassen dies hier zusammen:

Satz von Kleinberg 4.1.1 (Mit AD und DC)
Sei κ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft, $\mathcal{C}$ ein normaler, κ–vollständiger, freier Ultrafilter auf κ. Dann gibt es eine von $\mathcal{C}$ abhängige Folge $\langle \kappa_n;\ n \geq 1 \rangle$ von Kardinalzahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\kappa = \kappa_1$ ist meßbar. Insbesondere ist κ regulär.

(2) κ_2 ist schwach kompakt und somit ebenfalls regulär.

(3) Alle κ_n für $n \geq 1$ sind Jónsson–Zahlen.

(4) Alle κ_n für $n \geq 3$ sind singulär mit Konfinalität κ_2.

(5) $\kappa_\omega = \mathrm{Sup}\{\kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\}$ ist eine Rowbottom–Zahl.

[1] In solchen Modellen ist AC nach Satz 2.4.3 falsch.

Gilt zusätzlich noch $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$, so erhalten wir

(6) $\kappa_{n+1} = \kappa_n^+$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Eine konkrete Situation, in denen die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, können wir mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 angeben:

Korollar 4.1.2 Unter Annahme von ZSF +AD sind alle Zahlen $\aleph_n$ Jónsson–Zahlen, und $\aleph_\omega$ ist eine Rowbottom–Zahl.

Beweis: Nach Satz 3.4.5 besitzt $\aleph_1$ die schwache Partitionseigenschaft. Also gibt es nach dem Satz von Kleinberg eine Folge $\langle \kappa_n; n \geq 1 \rangle$ von Jónsson–Zahlen, wobei das Supremum κ_ω dieser Zahlen eine Rowbottom–Zahl ist. Wir müssen nur noch zeigen, daß $\kappa_n = \aleph_n$ und $\kappa_\omega = \aleph_\omega$ gilt. Dies folgt aus Korollar 3.5.4: Es gilt $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C} \cong \aleph_2$ nach Korollar 3.5.4, wobei der Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ nach Satz 3.3.6, ein normaler, $\aleph_1$–vollständiger, freier Ultrafilter auf $\aleph_1$ ist. Daher sind die Zahlen κ_n nach dem Satz von Kleinberg 4.1.1 die ersten ω direkten Nachfolger von $\aleph_1$, also $\kappa_n = \aleph_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und $\kappa_\omega = \aleph_\omega$.

□

Die allgemeine Analyse von Ultrapotenzen und der schwachen Partitionseigenschaft in [JACKSON, noch nicht erschienen,a], [JACKSON, noch nicht erschienen,b] und [JACKSON und KHAFIZOV, noch nicht erschienen] gibt uns zusätzliche Resultate unter AD, die wir in Kapitel 5 zusammenfassen.
Die Ergebnisse aus Kapitel 3 werden in diesem Kapitel eine große Rolle spielen, insbesondere das Misch– und Sortierlemma 3.2.15, welches in Abschnitt 3.2.3 gezeigt wurde. Wir hatten dort für eine meßbare Kardinalzahl κ und einer zu κ gleichmächtigen Ordinalzahl α eine Funktion $\mathrm{Sort}_\alpha^h : [\kappa]^\kappa \to [[\kappa]^\kappa]^\alpha$ konstruiert, die von der Wahl der Bijektion h zwischen κ und α abhing.

Im gesamten Kapitel 4 setzen wir, wie in Kapitel 3, das Axiom der abhängigen Auswahlen (DC) voraus. Außerdem sei κ ebenfalls im gesamten Kapitel 4 eine Kardinalzahl, die die schwache Partitionseigenschaft besitzt. Nach Satz 3.1.4 ist κ meßbar. Wir halten ebenfalls für das gesamte folgende Kapitel einen κ–vollständigen, normalen, freien Ultrafilter $\mathcal{C}$ auf κ fest. Nach Satz 3.1.4 gibt es einen solchen Filter auf κ.
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und m kann eine Bijektion $h_{n,m} : \kappa \to \kappa^{n-2} \cdot m$ explizit konstruiert werden. Dann seien im folgenden $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m} := \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}^{h_{n,m}}$ und $\mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m} := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m}^{h_{n,m}}$ die Funktionen aus dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15.

4.2 Definition der Kardinalzahlen κ_n

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel angedeutet, werden wir unter Verwendung des σ-vollständigen Ultrafilters auf $\aleph_1$ eine Folge von Ordinalzahlen definieren, von denen wir zeigen, daß sie Jónsson–Zahlen sind. Zur exakten Berechnung dieser Kardinalzahlen werden wir in Abschnitt 4.6 kommen.
Hier geht es nun zunächst um die induktive Definition von wohlgeordneten Strukturen, deren Ordnungstypen die genannte Folge von Ordinalzahlen bilden.
Aus technischen Gründen ist es angenehmer, für jedes n zwei Strukturen anzugeben, von denen wir beweisen können, daß sie denselben Ordnungstyp besitzen. In den Beweisen in den späteren Abschnitten können wir dann je nach Eignung die bessere der beiden Strukturen verwenden. Der erste Typ von Strukturen betont den kombinatorischen Gehalt stärker als der zweite Typ, weil die Elemente der Strukturen Folgen von

tatsächlichen Funktionen sind. Dagegen sind die Elemente des zweiten Typs von Strukturen Folgen von Ordinalzahlen.

Wir werden für eine wohlgeordnete Menge M und für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ aufsteigende Folgen in M der Länge κ^{n-2} betrachten[2]. Jede solche Folge kann wegen $\kappa^{n-2} = \kappa^{n-3} \cdot \kappa$ aufgefaßt werden als eine Folge der Länge κ von Elementen aus $[[M]^{\kappa^{n-3}}]^{\kappa}$. Wenn nun $X \in [M]^{\kappa^{n-2}}$ ist, dann bezeichne X_α für alle $\alpha < \kappa$ das α–te Folgenstück von X der Länge κ^{n-3}.
Die Folgen X_α können wiederum in κ Blöcke der Länge κ^{n-4} unterteilt werden. Dieser Prozeß kann $(n-3)$–mal iteriert werden. Wir erhalten dadurch unterschiedliche Unterteilungsstufen der Folge X. Für alle $2 \leq k \leq n$ nennen wir die dadurch erhaltenen Blöcke der Länge κ^{n-k} auch κ^{n-k}–Blöcke (dabei setzen wir $\kappa^0 = 1$).

Man beachte, daß $X_\alpha \neq X(\alpha)$ gilt. Für alle $\alpha < \kappa$ wird das α–te Folgenglied von $X \in [M]^{\kappa^{n-2}}$, aufgefaßt als Folge der Länge κ, mit X_α bezeichnet. Faßt man X dagegen als Folge der Länge κ^{n-2} von Elementen aus M auf, so bezeichnen wir das β–te Folgenglied für alle $\beta < \kappa^{n-2}$ mit $X(\beta)$.

4.2.1 Die Mengen $A_n/\sim_n$

Die Mengen $A_n/\sim_n$, die wir in diesem Abschnitt definieren wollen, können aufgefaßt werden als verallgemeinerte Ultrapotenzen von κ modulo dem normalen Ultrafilter $\mathcal{C}$ auf κ.

Zunächst definieren wir die Mengen A_n. Diese Mengen bestehen aus Folgen in $[\kappa]^\kappa$, die eine bestimmte Länge besitzen:
Es sei $A_2 := [\kappa]^\kappa$ und $A_n := [A_2]^{\kappa^{n-2}}$ für alle $n > 2$.
Aus Notationsgründen setzen wir zusätzlich $A_1 := \kappa$.

Auf den Mengen A_n werden nun induktiv Äquivalenzrelationen definiert, die die Ultrapotenzrelation $\sim_\mathcal{C}$ iterieren. Zwei Elemente aus A_n werden als äquivalent angesehen, wenn ihre κ^{n-3}–Blöcke $\mathcal{C}$–fast alle äquivalent sind:

Definition 4.2.1 Die Äquivalenzrelation $\sim_2$ sei auf A_2 durch

$$f \sim_2 g \quad :\Longleftrightarrow \quad f \sim_\mathcal{C} g$$

definiert.

Die Äquivalenzrelation $\sim_n$ für $n > 2$ sei auf A_n durch

$$X \sim_n Y \quad \Longleftrightarrow \quad \{\alpha < \kappa \,;\, X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C}$$

definiert.

Für eine einfachere Notation wird es an einigen Stellen nützlich sein, wenn auch auf A_1 eine Äquivalenzrelation $\sim_1$ definiert ist. Es sei daher $\beta_1 \sim_1 \beta_2$ genau dann, wenn $\beta_1 = \beta_2$ ist.

Proposition 4.2.2 Für alle $n \geq 2$ ist $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf A_n.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n.
Für $n = 2$ ist die Behauptung wahr, da $\sim_\mathcal{C}$ nach Abschnitt 2.1.4 eine Äquivalenzrelation ist.

Sei also $n > 2$ und schon gezeigt, daß $\sim_{n-1}$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir prüfen nun die drei Eigenschaften von Äquivalenzrelationen nach.

[2]Für M werden wir in den folgenden Abschnitten unter anderem auch die Menge $[\kappa]^\kappa$ wählen. Auf dieser Menge ist nicht in natürlicher Weise eine Wohlordnung definiert. Jedoch können trotzdem aufsteigende Folgen in $[\kappa]^\kappa$ im Sinne von Abschnitt 3.2.3 auf Seite 68 betrachtet werden.

(1) $\sim_n$ ist reflexiv: Da $\sim_{n-1}$ nach Induktionsvoraussetzung reflexiv ist, gilt $X_\alpha \sim_{n-1} X_\alpha$ für alle $X \in A_n$ und alle $\alpha < \kappa$. Insbesondere ist $\{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} X_\alpha\} = \kappa \in \mathcal{C}$. Also gilt auch $X \sim_n X$.

(2) $\sim_n$ ist symmetrisch: Seien $X, Y \in A_n$ mit $X \sim_n Y$ gegeben. Dann folgt $\{\alpha < \kappa \ ; \ Y_\alpha \sim_{n-1} X_\alpha\} = \{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C}$ nach der Definition von $\sim_n$ und der Symmetrie von $\sim_{n-1}$, also gilt $Y \sim_n X$.

(3) $\sim_n$ ist transitiv: Seien $X, Y, Z \in A_n$ mit $X \sim_n Y$ und $Y \sim_n Z$ gegeben. Dann gilt also:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C} \quad \text{und} \\ C_2 &:= \{\alpha < \kappa \ ; \ Y_\alpha \sim_{n-1} Z_\alpha\} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Also gilt wegen der Transitivität von $\sim_{n-1}$

$$\begin{aligned} C_1 \cap C_2 &= \{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha \text{ und } Y_\alpha \sim_{n-1} Z_\alpha\} \\ &\subseteq \{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} Z_\alpha\} \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

also $X \sim_n Z$.

Somit ist bewiesen, daß $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation ist.

□

Wir bezeichnen für alle $X \in A_n$ mit

$$[\![X]\!]_n := \{Y \in A_n \ ; \ X \sim_n Y\}$$

die Äquivalenzklasse von X.

Als nächstes definieren wir rekursiv für alle $n \geq 2$ eine Ordnung $<_n$ auf $A_n/{\sim_n}$, die die Wohlordnung der Ultrapotenz von κ modulo $\mathcal{C}$ verallgemeinert.

Definition 4.2.3 Für $n = 2$ sei $<_2$ auf $A_2/{\sim_2}$ durch

$$[\![f]\!]_2 <_2 [\![g]\!]_2 \iff \{\alpha < \kappa; \ f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{C}$$

definiert.

Für $n > 2$ sei $<_n$ auf A_n definiert durch

$$[\![X]\!]_n <_n [\![Y]\!]_n \iff \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}.$$

Proposition 4.2.4 Für alle $n \geq 2$ ist $<_n$ eine Wohlordnung auf $A_n/{\sim_n}$.

Beweis: Die Behauptung wird wieder durch Induktion nach n bewiesen.
Für $n = 2$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\langle [\kappa]^\kappa/\mathcal{C}, <_\mathcal{C}\rangle = \langle A_2/{\sim_2}, <_2\rangle$ gilt und $<_\mathcal{C}$ nach Satz 2.1.32 eine Wohlordnung ist.
Sei nun also $n > 2$, und es sei schon gezeigt, daß $<_{n-1}$ eine wohldefinierte Wohlordnung ist. Dann gilt:

(1) $<_n$ ist wohldefiniert: Denn seien $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in A_n$ gegeben mit $X_1 \sim_n X_2$ und $Y_1 \sim_n Y_2$. D.h.

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{\alpha < \kappa \ ; \ (X_1)_\alpha \sim_{n-1} (X_2)_\alpha\} \in \mathcal{C} \quad \text{und} \\ C_2 &:= \{\alpha < \kappa \ ; \ (Y_1)_\alpha \sim_{n-1} (Y_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Sei nun

$$C_3 := \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![(X_1)_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![(Y_1)_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}.$$

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \subseteq \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![(X_2)_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![(Y_2)_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}.$$

Dies bedeutet, daß $[\![X_1]\!]_n <_n [\![Y_1]\!]_n$ genau dann gilt, wenn $[\![X_2]\!]_n <_n [\![Y_2]\!]_n$ ist, d.h. $<_n$ ist wohldefiniert.

(2) $<_n$ ist eine lineare Ordnung: $<_n$ ist irreflexiv, d.h. es gibt kein $X \in A_n$, so daß $[\![X]\!]_n <_n [\![X]\!]_n$ gilt. Denn wenn $X \in A_n$ ist, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\emptyset = \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![X_\alpha]\!]_{n-1}\} \notin \mathcal{C},$$

also ist $[\![X]\!]_n \not<_n [\![X]\!]_n$.

$<_n$ ist antisymmetrisch. Denn seien $X, Y \in A_n$ mit $[\![X]\!]_n <_n [\![Y]\!]_n$ und $[\![Y]\!]_n <_n [\![X]\!]_n$. gegeben. Dann gilt also:

$$\begin{array}{lcll} C_1 & := & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C} & \text{und} \\ C_2 & := & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![Y_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![X_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}. & \end{array}$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$C_1 \cap C_2 = \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} = [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\} = \{\alpha < \kappa \ ; \ X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C},$$

also $[\![X]\!]_n = [\![Y]\!]_n$.

$<_n$ ist transitiv. Denn seien $X, Y, Z \in A_n$ mit $[\![X]\!]_n <_n [\![Y]\!]_n$ und $[\![Y]\!]_n <_n [\![Z]\!]_n$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{array}{lcll} C_1 & := & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C} & \text{und} \\ C_2 & := & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![Y_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Z_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}. & \end{array}$$

Also ergibt sich nach der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{array}{rcl} C_1 \cap C_2 & = & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Y_\alpha]\!]_{n-1} \ \& \ [\![Y_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Z_\alpha]\!]_{n-1}\} \\ & \subseteq & \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Z_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Somit gilt $[\![X]\!]_n <_n [\![Z]\!]_n$.

$<_n$ ist linear. Denn seien $X, Y \in A_n$ mit $[\![X]\!]_n \neq [\![Y]\!]_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung sind alle Elemente aus $A_{n-1}/\sim_{n-1}$ vergleichbar, d.h. κ zerfällt disjunkt in die Mengen $\{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\}, \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![Y_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![X_\alpha]\!]_{n-1}\}$ und $\{\alpha < \kappa \ ; \ [\![X_\alpha]\!]_{n-1} = [\![Y_\alpha]\!]_{n-1}\}$. Da $\mathcal{C}$ ein Ultrafilter ist, liegt eine der drei Mengen in $\mathcal{C}$. Nach Voraussetzung kann dies nur für eine der beiden ersten Mengen der Fall sein. Dies bedeutet aber gerade $[\![X]\!]_n <_n [\![Y]\!]_n$ oder $[\![Y]\!]_n <_n [\![X]\!]_n$.

(3) $<_n$ ist eine Wohlordnung: Es gibt keine absteigenden Ketten in $A_n/\sim_n$. Denn angenommen, es gibt für jede natürliche Zahl i ein $X_i \in A_n$ mit $[\![X_{i+1}]\!]_n <_n [\![X_i]\!]_n$ für alle $i \in \omega$. Dann gilt für alle $i \in \omega$

$$C_i := \{\alpha < \kappa \ ; \ [\![(X_{i+1})_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![(X_i)_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}.$$

Da $\mathcal{C}$ κ–vollständig ist, gilt $C := \bigcap_{i\in\omega} C_i \in \mathcal{C}$. Insbesondere enthält C ein Element α. Dann gilt jedoch $[\![(X_{i+1})_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![(X_i)_\alpha]\!]_{n-1}$ für alle $i \in \omega$, d.h. es gibt eine absteigende Folge in $A_{n-1}/\sim_{n-1}$, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung!

Also ist $<_n$ eine Wohlordnung.

□

Für natürliche Zahlen m nennen wir Folgen $\langle [\![X_1]\!]_n, ..., [\![X_m]\!]_n \rangle \in [A_n/\sim_n]^m$ auch geordnete Tupel. Wir verallgemeinern diese Sprechweise, indem wir ein m–Tupel $\langle X_1, ..., X_m \rangle$ aus A_n geordnet nennen, wenn $[\![X_1]\!]_n <_n ... <_n [\![X_m]\!]_n$ gilt.

Wir können nun für alle natürlichen Zahlen n eine Ordinalzahl κ_n definieren: Definiere $\kappa_1 := \kappa$. Für $n > 1$ sei κ_n der Ordnungstyp von $\langle A_n/\sim_n, <_n \rangle$.
Im folgenden bezeichne $\pi_n : A_n/\sim_n \to \kappa_n$ immer die ordnungserhaltende Bijektion zwischen $A_n/\sim_n$ und κ_n.

Eine wichtige Bedeutung werden in den kommenden Abschnitten bestimmte Teilmengen von $A_n/\sim_n$ haben. Diese Mengen enthalten nur Folgen von solchen Funktionen, deren Funktionswerte in einer gewissen Teilmenge von κ liegen. Wir wollen für Mengen dieser Art eine Bezeichnung einführen: Ist H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ, dann sei $A_n^H := [[H]^\kappa]^{\kappa^{n-2}}$.

Das Misch– und Sortierlemma ermöglicht es, jeder Funktion $f \in [\kappa]^\kappa$ in eindeutiger Weise ein Element aus A_n zuzuordnen. Diese Zuordnung ist durch $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}$ gegeben. Allerdings ist die Funktion $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}$ nicht im eigentlichen Sinne umkehrbar, da sie nicht surjektiv ist. Das folgende Lemma zeigt jedoch, daß jedes Element aus A_n immerhin äquivalent zu einem Element aus $\mathrm{Im}(\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}})$ ist.

Lemma 4.2.5 Sei H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ. Dann gibt es für alle $X \in A_n^H$ ein $Y \in A_n^H$ mit $Y \sim_n X$ und ein $f \in [H]^\kappa$ mit $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f) = Y$.

Beweis:
Sei $X \in A_n^H$ beliebig . Da H Ordnungstyp κ besitzt, kann das Misch– und Sortierlemma 3.2.15 angewendet werden. Es gilt $f := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}}(X) \in [H]^\kappa$ nach Eigenschaft (3) im Misch– und Sortierlemma.
Setze nun $Y := \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f) \in [[H]^\kappa]^{\kappa^{n-2}}$. Dann gilt nach dem Misch– und Sortierlemma $X(\beta) = Y(\beta)$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\beta < \kappa^{n-2}$. Mit einer leichten Induktion nach n folgt nun $Y \sim_n X$.
f und Y erfüllen somit die gewünschte Eigenschaft.

□

Hiermit ist ein Zusammenhang hergestellt zwischen $[\kappa]^\kappa$ und der Menge $A_n/\sim_n$. Denn nach Lemma 4.2.5 gibt es für jedes $[\![X]\!]_n \in A_n/\sim_n$ ein $f \in [\kappa]^\kappa$, so daß $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f) = [\![X]\!]_n$ ist, d.h. wir haben eine Surjektion von $[\kappa]^\kappa$ auf $A_n/\sim_n$ konstruiert.
Als nächstes wollen wir zeigen, daß $A_n^H/\sim_n$ Ordnungstyp κ_n besitzt, falls H eine κ-mächtige Teilmenge von κ ist. Dies ist plausibel, da A_n^H aus A_n entsteht, indem man κ durch die ordnungsisomorphe Teilmenge H ersetzt. Deshalb liegt es nahe, daß die Mengen $A_n^H/\sim_n$ und $A_n/\sim_n$ ebenfalls denselben Ordnungstyp besitzen.

Lemma 4.2.6 Sei H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ.
Dann hat $A_n^H/\sim_n$ Ordnungstyp κ_n.

Beweis: Sei $w : \kappa \to H$ eine ordnungserhaltende Bijektion. Wir definieren dann eine Abbildung $W : A_n/{\sim_n} \to A_n^H/{\sim_n}$ durch

$$W([\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f)]\!]_n) = [\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ f)]\!]_n$$

für alle $f \in [\kappa]^\kappa$. Nun werden wir zeigen, daß diese Abbildung eine ordnungserhaltende Einbettung von $A_n/{\sim_n}$ in $A_n^H/{\sim_n}$ ist. Als erstes muß überprüft werden, ob W überhaupt wohldefiniert ist.

1. BEHAUPTUNG: W ist wohldefiniert.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Zunächst beweisen wir die folgende Aussage: Ist $\langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle \sim_n \langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle$, dann gilt auch $\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle \sim_n \langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle$.

Dies folgt durch Induktion nach n:
Für $n = 2$ gilt: Ist $f = g$ $\mathcal{C}$–fast überall, so ist auch $w \circ f = w \circ g$ $\mathcal{C}$–fast überall. Also stimmt die Behauptung in diesem Fall.

Sei nun $n > 2$ und die Behauptung für $n-1$ schon gezeigt. Sei außerdem $\langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle \sim_n \langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle$. Dann gilt $\{\alpha < \kappa\ ;\ \langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha \sim_{n-1} \langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha\} \in \mathcal{C}$, also nach Induktionsvoraussetzung auch

$$\{\alpha < \kappa\ ;\ \langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha \sim_{n-1} \langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha\} \in \mathcal{C},$$

und somit $\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle \sim_n \langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle$.

Nach Bemerkung 3.2.16 gilt jedoch: Wenn $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f) = \langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle$ ist, dann ist $\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle \sim_n \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ f)$. Insgesamt haben wir nun somit gezeigt, daß $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ f) \sim_n \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ g)$ gilt, wenn $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f) \sim_n \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(g)$ ist. Somit ist W wohldefiniert.

2. BEHAUPTUNG: W ist auf ganz $A_n/{\sim_n}$ definiert.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Dies folgt aus Lemma 4.2.5.

3. BEHAUPTUNG: W ist ordnungserhaltend.

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG:
Zunächst beweisen wir analog zum Beweis der 1. Behauptung die folgende Aussage: Ist $[\![\langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n <_n [\![\langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n$, dann gilt auch $[\![\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n <_n [\![\langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n$.

Auch dies folgt durch Induktion nach n:
Für $n = 2$ gilt: Ist $f < g$ $\mathcal{C}$–fast überall, so gilt auch $w \circ f < w \circ g$ $\mathcal{C}$–fast überall. Also stimmt die Behauptung in diesem Fall.

Sei nun $n > 2$ und die Behauptung für $n-1$ schon gezeigt. Sei außerdem $[\![\langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n <_n [\![\langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n$. Dann gilt $\{\alpha < \kappa\ ;\ [\![\langle f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![\langle g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}$, also nach Induktionsvoraussetzung auch

$$\{\alpha < \kappa\ ;\ [\![\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![\langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C},$$

und somit $[\![\langle w \circ f_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]_n <_n [\![\langle w \circ g_\eta\ ;\ \eta < \kappa^{n-2}\rangle]\!]$.

Nun folgt wieder mit Bemerkung 3.2.16: Ist $[\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f)]\!]_n <_n [\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(g)]\!]_n$, dann gilt nach oben Bewiesenem auch $[\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ f)]\!]_n <_n [\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(w \circ g)]\!]_n$.

Somit besitzt $A_n^H/{\sim_n}$ eine Teilmenge vom Ordnungstyp κ_n, hat selbst also mindestens Ordnungstyp κ_n. Als Teilmenge von $A_n/{\sim_n}$ hat $A_n^H/{\sim_n}$ höchstens Ordnungstyp κ_n.

Denn angenommen, der Ordnungstyp γ von $A_n^H/{\sim_n}$ ist größer als κ_n. Dann gäbe es eine ordnungserhaltende Bijektion von $\kappa_n + 1$ in $A_n^H/{\sim_n}$ und somit auch in $A_n/{\sim_n}$. Damit wäre dann $\kappa_n + 1$ ordnungsisomorph in κ_n einbettbar, was nicht möglich ist.
Also folgt insgesamt, daß $A_n^H/{\sim_n}$ Ordnungstyp κ_n besitzt.

□

κ_2 nimmt unter den Zahlen κ_n eine Sonderstellung ein. Es wird sich zeigen, daß alle Zahlen κ_n für natürliche Zahlen $n > 2$ singulär sind mit Konfinalität κ_2. Demnach ist die Zahl κ_2 selbst dagegen regulär. Unter Verwendung des vorhergehenden Lemmas kann sogar gezeigt werden, daß κ_2 eine schwach kompakte Kardinalzahl ist.

Hilfssatz 4.2.7 κ_2 ist schwach kompakt.

Beweis: Nach Definition 2.4.8 ist κ_2 schwach kompakt, wenn $\kappa_2 \to (\kappa_2)_2^2$ erfüllt ist. Diese Partitionseigenschaft müssen wir also zeigen.
Für ein $f \in [\kappa]^\kappa$ definieren wir Funktionen $v_f, w_f \in [\kappa]^\kappa$ durch $v_f(\lambda + n) := f(\lambda + 2 \cdot n)$ und $w_f(\lambda + n) := f(\lambda + 2 \cdot n + 1)$ für alle Limeszahlen λ und alle natürlichen Zahlen n.

Wir zeigen, daß es für jede Partition $F : [A_2/{\sim_2}]^2 \to 2$ eine homogene Menge vom Ordnungstyp κ_2 gibt. Dies genügt, da $A_2/{\sim_2}$ isomorph zu κ_2 ist.
Sei also $F : [A_2/{\sim_2}]^2 \to 2$ gegeben. Wir verwenden die Voraussetzung, indem wir eine Partition $G : [\kappa]^\kappa \to 2$ durch

$$G(f) := F([\![v_f]\!]_2, [\![w_f]\!]_2)$$

definieren.
Nach Voraussetzung besitzt G eine homogene Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ.
Sei $X := A_2^H/{\sim_2}$. Nach Lemma 4.2.6 hat X Ordnungstyp κ_2. Wir können nun beweisen, daß X homogen für F ist.

Bevor wir dies zeigen, machen wir zunächst folgende Vorüberlegung:
Seien $f_1, f_2 \in [\kappa]^\kappa$ mit $\langle [\![f_1]\!]_2, [\![f_2]\!]_2 \rangle \in [X]^2$ gegeben. Es gilt $f_1 < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Nach Hilfssatz 3.2.3 gibt es mit $M = \kappa$ und $m = 2$ Funktionen $g_1, g_2 \in [H]^\kappa$ mit $f_1 = g_1$ $\mathcal{C}$–fast überall, $f_2 = g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall und der folgenden Eigenschaft: Wenn $g \in [H]^\kappa$ die Aufzählung von $\mathrm{Im}(g_1) \cup \mathrm{Im}(g_2)$ ist, dann ist $v_g = g_1$ und $w_g = g_2$.

Damit kann nun leicht gezeigt werden, daß X homogen für F ist:
Denn seien $\langle [\![f_1]\!]_2, [\![f_2]\!]_2 \rangle, \langle [\![f_3]\!]_2, [\![f_4]\!]_2 \rangle \in [X]^2$. Dann gibt es nach der eben erwähnten Anwendung von Hilfssatz 3.2.3 Funktionen $f, g \in [H]^\kappa$, so daß $f_1 \sim_2 v_f$, $f_2 \sim_2 w_f$, $f_3 \sim_2 v_g$ und $f_4 \sim_2 w_g$ gilt.
Also ist wegen der Homogenität von H

$$\begin{aligned} F([\![f_1]\!]_2, [\![f_2]\!]_2) &= F([\![v_f]\!]_2, [\![w_f]\!]_2) \\ &= G(f) = G(g) \\ &= F([\![v_g]\!]_2, [\![w_g]\!]_2) = F([\![f_3]\!]_2, [\![f_4]\!]_2). \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß X homogen für F ist; also gilt $\kappa_2 \to (\kappa_2)_2^2$.

□

Somit wissen wir schon jetzt, daß κ_2 zu den großen Kardinalzahlen gehört.
Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 folgt nun, daß κ_2 eine reguläre Kardinalzahl ist:

Korollar 4.2.8 κ_2 ist eine reguläre Kardinalzahl.

Beweis: Dies folgt aus Hilfssatz 4.2.7 und Lemma 2.4.7.

□

Korollar 4.2.9 Sei α eine Ordinalzahl der Mächtigkeit κ. Dann gibt es keine konfinalen Folgen der Länge α in κ_2.

Beweis: Nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15 gibt es für alle $\gamma < \kappa^+$ eine strikt aufsteigende Folge der Länge γ in κ_2. Also gilt $\kappa_2 \geq \kappa^+$. Die Behauptung folgt nun aus der Regularität von κ_2.

□

4.2.2 Die Mengen $B_n/{\approx_n}$

Wir kommen nun zur Definition der anderen in der Einleitung zu Abschnitt 4.2 erwähnten (zu $A_n/{\sim_n}$ isomorphen) Strukturen. Während die Mengen A_n Folgen von Funktionen enthalten, sind die Elemente der Mengen B_n Folgen von Restklassen von Funktionen bzgl. der Relation $\sim_{\mathcal{C}}$: Es sei $B_2 := A_2/{\sim_2}$. Für $n > 2$ sei $B_n := [B_2]^{\kappa^{n-2}}$.

Der Vorteil der Mengen B_n gegenüber den Mengen A_n besteht darin, daß ihre Elemente Folgen in $A_2/{\sim_2}$ sind, nach Proposition 4.2.4 eine wohlgeordnete Menge. Daher können die Elemente von B_n als Folgen von Ordinalzahlen der Länge κ^{n-2} aufgefaßt werden.
Andererseits kann man die Elemente von B_n auch als aufsteigende Folgen der Länge κ von Elementen aus B_{n-1} interpretieren. Diese Auffassung liegt, analog wie bei den Mengen A_n, der folgenden Definition der Äquivalenzrelationen $\approx_n$ auf B_n zugrunde. Für jedes $x \in B_n$ und $\alpha < \kappa$ bezeichne x_α das α–te Folgenglied von x.

Definition 4.2.10 Wir definieren auf den Mengen B_n Äquivalenzrelationen $\approx_n$ wie folgt rekursiv:
Für $n = 2$ sei für alle $x, y \in B_2$

$$x \approx_2 y \iff x = y.$$

Für $n > 2$ sei $\approx_n$ durch

$$x \approx_n y \iff \{\alpha < \kappa;\ x_\alpha \approx_{n-1} y_\alpha\} \in \mathcal{C}$$

definiert.

Für alle $n \geq 2$ ist $\approx_n$ eine Äquivalenzrelation. Dies folgt analog zu Proposition 4.2.2. Die Äquivalenzklassen werden mit $[\![x]\!]_n := \{y \in B_n;\ y \approx_n x\}$ bezeichnet.
Entsprechend zu den Ordnungen $<_n$ können auch auf den Mengen $B_n/{\approx_n}$ Wohlordnungen definiert werden.

Definition 4.2.11 Wir definieren auf den Mengen $B_n/{\approx_n}$ Wohlordnungen $\prec_n$ rekursiv:
Für $n = 2$ sei

$$[\![x]\!]_2 \prec_2 [\![y]\!]_2 \iff x <_2 y.$$

Für $n > 2$ sei

$$[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n \iff \{\alpha < \kappa;\ [\![x_\alpha]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![y_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}.$$

Proposition 4.2.12 Für alle $n \geq 2$ ist $B_n/{\approx_n}$ durch $\prec_n$ wohlgeordnet.

Beweis: Wie in Proposition 4.2.4.

□

Auch hier verallgemeinern wir den Begriff des geordneten Tupels, indem wir ein m–Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ aus B_n geordnet nennen, wenn $[\![x_1]\!]_n \prec_n ... \prec_n [\![x_m]\!]_n$ gilt. Wir schreiben dann auch $\langle x_1, ..., x_m \rangle \in [B_n]^m$.

Wir werden häufig endliche Folgen in B_n betrachten. Dabei werden solche Folgen eine besondere Rolle spielen, deren Glieder, als Folgen in B_2 betrachtet, echt übereinanderliegen:

Definition 4.2.13 Eine endliche Folge $\langle x_1, ..., x_m \rangle \in (B_n)^m$ heißt **isoliert**, wenn $\mathrm{Sup}\{x_k(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} \leq_{\mathcal{C}} x_{k+1}(\gamma)$ gilt für alle $\gamma < \kappa^{n-2}$ und $1 \leq k < m$.

Die folgenden Propositionen sollen zu einem tieferen Verständnis der Ordnung $\prec_n$ verhelfen.

Proposition 4.2.14 Sei $\langle x, y \rangle$ ein isoliertes Paar aus B_n.
Dann gilt $[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar durch Induktion nach n.

□

Die folgende Proposition verallgemeinert dieses Ergebnis:

Proposition 4.2.15 Sei $\langle x, y \rangle$ ein Paar aus B_n mit $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$. Dann gilt $[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n$.

Beweis: Für $n = 2$ folgt die Behauptung trivialerweise aus der Definition von $\prec_2$. Sei also nun $n > 2$. Nach Voraussetzung gibt es ein $f \in [\kappa]^\kappa$ mit $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(y)$ und $[g]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [f]_{\mathcal{C}}$ für alle $[g]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(x)$. Es gibt ein $\alpha < \kappa$ mit $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(y_\alpha)$. Also sind insbesondere alle Paare $\langle x_\beta, y_\beta \rangle$ für $\beta > \alpha$ isoliert. Nach Proposition 4.2.14 ist also $[\![x_\beta]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![y_\beta]\!]_{n-1}$ für alle $\beta \in C := \kappa - (\alpha + 1)$. Die Menge C ist jedoch Element von $\mathcal{C}$, da $\mathcal{C}$ ein κ–vollständiger Ultrafilter ist, der somit nach Proposition 2.1.18 alle Endsegmente von κ enthält. Daher folgt nun $\{\beta < \kappa;\ [\![x_\beta]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![y_\beta]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}$, also $[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n$.

□

Hat also $x \in B_n$, aufgefaßt als Folge der Länge κ^{n-2} in B_2, bezüglich $<_{\mathcal{C}}$ ein kleineres Supremum als $y \in B_n$, so ist die Äquivalenzklasse von x bezüglich der Ordnung $\prec_n$ auch kleiner als die Äquivalenzklasse von y.
Natürlich ist die Aussage dieses Satzes nicht umkehrbar. Definiert man beispielsweise für ein beliebiges $x \in B_n$ zwei weitere Elemente y und z aus B_n durch $y_{\lambda+k} := x_{\lambda+2k}$ und $z_{\lambda+k} := x_{\lambda+2k+1}$ für alle Limeszahlen $\lambda < \kappa$ und natürliche Zahlen k, so gilt nach Proposition 4.2.14 $y_\alpha \prec_{n-1} z_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Also gilt $y \prec_n z$. Jedoch sind die Suprema der beiden Folgen gleich, d.h. $\mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} = \mathrm{Sup}\{z(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$.
Aus Proposition 4.2.15 folgt jedoch sofort eine abgeschwächte Form der Umkehrung:

Korollar 4.2.16 Sei $\langle x, y \rangle$ ein Paar aus B_n mit $[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n$.
Dann gilt $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} \leq_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$.

Beweis: Angenommen, $\mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$. Dann gilt nach Proposition 4.2.15 auch $\llbracket y \rrbracket_n \prec_n \llbracket x \rrbracket_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Ein weiteres Kriterium, um Aussagen über die Ordnung zweier Elemente bezüglich $\prec_n$ zu machen, gibt die folgende Proposition an:

Proposition 4.2.17 . Seien $x, y \in B_n$ mit $x(\beta) <_{\mathcal{C}} y(\beta)$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$. Dann gilt $\llbracket x \rrbracket_n \prec_n \llbracket y \rrbracket_n$.

Beweis: Die Behauptung folgt sehr einfach durch Induktion nach n.

□

Wir wollen nun zeigen, daß $A_n/{\sim_n}$ für alle $n \in \omega$ isomorph zu $B_n/{\approx_n}$ ist. Für ein gegebenes $x \in B_n$ müssen wir dazu für alle $\beta < \kappa^{n-2}$ aus $x(\beta)$ einen Repräsentanten herausnehmen. Da das Auswahlaxiom nicht verwendet werden darf, müssen diese Repräsentanten explizit konstruiert werden. Wir werden für diese Konstruktion Satz 3.2.19 verwenden. Somit kann jedem $x \in B_n$ in eindeutiger Weise ein $X \in A_n$ zugeordnet werden.
Umgekehrt kann jedem Element aus A_n auf kanonische Weise ein Element aus B_n zugeordnet werden. Wir wollen diese Zuordnung etwas allgemeiner definieren, indem wir für jede Folge in $[\kappa]^\kappa$ eine zugehörige Folge in B_2 konstruieren: Sei M eine beliebige Menge von Ordinalzahlen, $X \in [[\kappa]^\kappa]^M$. Dann sei $X^{\maltese} \in [B_2]^M$ definiert durch

$$X^{\maltese}(\beta) := \llbracket X(\beta) \rrbracket_2 \quad \text{für alle } \beta \in M.$$

Im Spezialfall $M := \kappa^{n-2}$ ist also für jedes $X \in A_n$ ein Element $X^{\maltese} \in B_n$ definiert durch

$$X^{\maltese}(\beta) := \llbracket X(\beta) \rrbracket_2 \quad \text{für alle } \beta < \kappa^{n-2}.$$

Nahezu offensichtlich ist die folgende Proposition:

Proposition 4.2.18 Sei α eine Ordinalzahl, $M \subseteq \alpha$ und $X \in [[\kappa]^\kappa]^\alpha$. Sei außerdem $x := X^{\maltese}$. Dann gilt $\langle X(\beta);\ \beta \in M \rangle^{\maltese} = \langle x(\beta); \beta \in M \rangle$.

Beweis: Sei $\nu \in M$.
Dann ist $\langle X(\beta);\ \beta \in M \rangle^{\maltese}(\nu) = X^{\maltese}(\nu) = x(\nu) = \langle x(\beta);\ \beta \in M \rangle(\nu)$.

□

Ist also ein $X \in A_n$ gegeben und betrachtet man die mit den κ^{n-3}–Blöcken von X korrespondierenden Folgen $(X_\alpha)^{\maltese}$, so sind diese Folgen gerade die κ^{n-3}–Blöcke der mit X korrespondierenden Folge $X^{\maltese} \in B_n$. Es gilt daher $(X_\alpha)^{\maltese} = (X^{\maltese})_\alpha =: X^{\maltese}_\alpha$.

Es wird im folgenden Satz und auch an einigen anderen Stellen wichtig sein, daß man jedem Element x aus B_n in eindeutiger Weise ein Element X aus A_n zuordnen kann, so daß $X^{\maltese} = x$ ist. Ist eine κ–mächtige Teilmenge H von κ ausgezeichnet, so wollen wir sogar eine Abbildung Υ_H, die jedem $x \in B_n^H$ ein $X \in A_n^H$ zuordnet mit $X^{\maltese} = x$. Die Abbildungen Υ_H werden wir nun mit Hilfe von Satz 3.2.19 konstruieren. Sei also H eine κ–mächtige Teilmenge von κ und $x \in B_n^H$. Wir setzen $\gamma := \mathrm{Sup}\{\pi_2(x(\beta));\ \beta < \kappa^{n-2}\}$.
Nach Satz 3.2.19 gibt es eine Funktion $K : [H]^\kappa \times \gamma \to [H]^\kappa$, so daß für alle $f \in [\kappa]^\kappa$ und $\nu < \gamma$ gilt: $\llbracket K(f, \nu) \rrbracket_2$ ist das ν–te Element aus $A_2^H/{\sim_2}$, das größer ist als $\llbracket f \rrbracket_2$.
Nun ist aber die eindeutig bestimmte aufsteigende Aufzählung von H, die im folgenden mit f_H bezeichnet werden soll, ein Repräsentant des minimalen Elements von $A_2^H/{\sim_2}$.

Denn für alle anderen Funktionen $f \in A_2^H$ gilt $f_H(\alpha) \leq f(\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$. Entweder sind also f und f_H auf einer Filtermenge identisch, also äquivalent bezüglich $\sim_{\mathcal{C}}$, oder es gilt $\{\alpha < \kappa;\ f_H(\alpha) < f(\alpha)\} \in \mathcal{C}$, also $[\![f_H]\!]_2 <_2 [\![f]\!]_2$. Somit ist $\{[\![K(f_H,\nu)]\!]_2;\ \nu < \gamma\}$ die Menge der ersten γ Elemente von $A_2^H/{\sim_2}$. Wir haben γ so gewählt, daß es für jedes $\beta < \kappa^{n-2}$ ein $\nu < \gamma$ gibt, so daß $[\![K(f_H,\nu)]\!]_2 = x(\beta)$ ist. D.h. mit Hilfe von K erhält man aus jedem $x(\beta)$ mindestens einen Repräsentanten, der gleichzeitig Element von $[H]^\kappa$ ist: $|\{K(f_H,\nu);\ \nu < \gamma\} \cap x(\beta)| \geq 1$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$. Da $\langle [\![K(f_H,\nu)]\!]_2;\ \nu < \gamma \rangle$ eine strikt aufsteigende Folge ist, gilt sogar $|\{K(f_H,\nu);\ \nu < \gamma\} \cap x(\beta)| = 1$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$. Sei $f_\beta^x \in [H]^\kappa$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$ das eindeutig bestimmte Element aus $\{K(f_H,\nu);\ \nu < \gamma\} \cap x(\beta)$.
Wir definieren dann die Funktion $\Upsilon_H : B_n^H \to A_n^H$ durch

$$\Upsilon_H(x) := \langle f_\beta^x;\ \beta < \kappa^{n-2} \rangle \in A_n^H.$$

Die Abbildung Υ_H ordnet, wie gewünscht, jedem Element x aus B_n^H ein Element $X \in A_n^H$ zu mit der Eigenschaft $X^{\maltese} = x$.
Im Fall $H = \kappa$ setzen wir $\Upsilon_H =: \Upsilon$.

Wir werden nun die Isomorphie der Strukturen $\langle A_n/{\sim_n}, <_n \rangle$ und $\langle B_n/{\approx_n}, \prec_n \rangle$ in einer etwas allgemeineren Form beweisen.

Ist H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ, dann sei wieder $A_n^H = [[H]^\kappa]^{\kappa^{n-2}}$. Außerdem sei $B_2^H := A_2^H/{\sim_2}$ und $B_n^H := [B_2^H]^{\kappa^{n-2}}$ für alle $n > 2$.

Satz 4.2.19 Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und κ–mächtige Teilmengen $H \subseteq \kappa$ ist $\langle A_n^H/{\sim_n}, <_n \rangle$ isomorph zu $\langle B_n^H/{\approx_n}, \prec_n \rangle$.
Insbesondere ist $\langle A_n/{\sim_n}, <_n \rangle$ isomorph zu $\langle B_n/{\approx_n}, \prec_n \rangle$.

Beweis: Sei $n \geq 2$ beliebig.
Es kann leicht gezeigt werden, daß die Abbildung $\tau : A_n^H/{\sim_n} \to B_n^H/{\approx_n}$ mit $\tau([\![X]\!]_n) := [\![X^{\maltese}]\!]_n$ ein Isomorphismus ist.

(1) τ ist wohldefiniert, d.h. wenn $X \sim_n Y$ ist, dann gilt $X^{\maltese} \approx_n Y^{\maltese}$:

Dies folgt durch Induktion nach n : Sei $n = 2$. Wenn $f \sim_2 g$ ist, dann gilt $f^{\maltese} = [\![f]\!]_2 = [\![g]\!]_2 = g^{\maltese}$, also $f^{\maltese} \approx_2 g^{\maltese}$.

Sei nun $n > 2$ und die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen. Wenn $X \sim_n Y$ ist, dann gilt $\{\alpha < \kappa;\ X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\{\alpha < \kappa;\ X_\alpha^{\maltese} \approx_{n-1} Y_\alpha^{\maltese}\} \in \mathcal{C}$. Wegen $X_\alpha^{\maltese} = (X^{\maltese})_\alpha$ für alle $X \in A_n^H$ folgt nun $X^{\maltese} \approx_n Y^{\maltese}$.

(2) Der Bildbereich von τ ist $B_n^H/{\approx_n}$: Sei $X \in A_n^H$. Dann ist $X^{\maltese} \in B_n^H$. Dies zeigt: Wenn $[\![X]\!]_n \in A_n^H/{\sim_n}$ ist, dann gilt $[\![X^{\maltese}]\!]_n \in B_n^H/{\approx_n}$.

(3) τ ist injektiv:

Dies folgt wieder durch Induktion nach n : Für $n = 2$ gilt: Wenn $[\![f]\!]_2 \approx_2 [\![g]\!]_2$ ist, dann gilt $[\![f]\!]_2 = [\![g]\!]_2$, also $f \sim_2 g$, d.h. in diesem Fall ist τ injektiv.

Sei nun $n > 2$ und für den Fall $n-1$ schon gezeigt, daß τ injektiv ist. Seien $X, Y \in A_n^H$. Wenn $X^{\maltese} \approx_n Y^{\maltese}$ gilt, so ist $\{\alpha < \kappa;\ (X^{\maltese})_\alpha \approx_{n-1} (Y^{\maltese})_\alpha\} = \{\alpha < \kappa;\ X_\alpha^{\maltese} \approx_{n-1} Y_\alpha^{\maltese}\} \in \mathcal{C}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $\{\alpha < \kappa; X_\alpha \sim_{n-1} Y_\alpha\} \in \mathcal{C}$, also $X \sim_n Y$. Dies zeigt die Injektivität von τ.

(4) τ ist surjektiv: Betrachte zunächst die Abbildung $w : A_n^H \to B_n^H,\ w(X) := X^{\maltese}$. Diese Funktion ist surjektiv auf B_n^H, denn für alle $x \in B_n^H$ ist durch $\Upsilon_H(x)$ ein Urbild von x bezüglich w gegeben.

Daraus folgt, daß τ surjektiv ist. Denn für alle $x \in B_n^H$ gibt es ein $X \in A_n^H$ mit $X^{\maltese} = x$. Also gilt $\tau([\![X]\!]_n) = [\![x]\!]_n$.

(5) τ ist ordnungserhaltend:

Auch dies folgt durch Induktion nach n : Sei $n = 2$: Wenn $\{\alpha < \kappa;\ f(\alpha) < g(\alpha)\} \in \mathcal{C}$ ist, dann gilt $\llbracket f^{\maltese} \rrbracket_2 \prec_2 \llbracket g^{\maltese} \rrbracket_2$ nach Definition von $\prec_2$.

Sei nun $n > 2$ und die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen. Seien $X, Y \in A_n^H$ mit $\llbracket X \rrbracket_n <_n \llbracket Y \rrbracket_n$ gegeben. Dann ist $\{\alpha < \kappa;\ \llbracket X_\alpha \rrbracket_{n-1} <_{n-1} \llbracket Y_\alpha \rrbracket_{n-1}\} \in \mathcal{C}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\{\alpha < \kappa; \llbracket X_\alpha^{\maltese} \rrbracket_{n-1} \prec_{n-1} \llbracket Y_\alpha^{\maltese} \rrbracket\} = \{\alpha < \kappa;\ \llbracket (X^{\maltese})_\alpha \rrbracket_{n-1} \prec_{n-1} \llbracket (Y^{\maltese})_\alpha \rrbracket_{n-1}\} \in \mathcal{C}$. Daraus folgt $\llbracket X^{\maltese} \rrbracket_n \prec_n \llbracket Y^{\maltese} \rrbracket_n$. Also ist τ ordnungserhaltend.

Somit ist gezeigt, daß $\langle A_n^H/\sim_n, <_n \rangle$ und $\langle B_n^H/\approx_n, \prec_n \rangle$ isomorph sind.

□

Aus Lemma 4.2.6 und Satz 4.2.19 erhalten wir sofort das folgende Korollar:

Korollar 4.2.20 Sei H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ.
Dann hat $B_n^H/\approx_n$ Ordnungstyp κ_n.
Insbesondere besitzt also $B_n/\approx_n$ Ordnungstyp κ_n.

Beweis: Dies folgt aus Lemma 4.2.6 und aus Satz 4.2.19.

□

Im folgenden bezeichne $\sigma_n : B_n/\approx_n \to \kappa_n$ den Isomorphismus zwischen $\langle B_n/\approx_n, \prec_n \rangle$ und $\langle \kappa_n, < \rangle$.

4.3 Verwobenheit

Endliche Tupel $\langle \llbracket x_1 \rrbracket, ..., \llbracket x_m \rrbracket \rangle$ aus $B_n/\approx_n$ können durch den Grad, in dem die Folgen x_k ineinander verwoben sind, klassifiziert werden. So kann jedem endlichen Tupel aus $B_n/\approx_n$ eine endliche Folge natürlicher Zahlen zugeordnet werden, die den Verwobenheitsgrad des Tupels angibt. Zwei Tupeln wird dieselbe Folge natürlicher Zahlen zugeordnet, wenn sie in ähnlicher Weise verwoben sind.
Diese Klassifikation ist sehr wichtig zum Nachweis der Jónsson–Eigenschaft von κ_n. Ist eine Partition F der Menge der endlichen Tupel aus $B_n/\approx_n$ gegeben, so stellt sich heraus, daß auf einer großen Menge je zwei Tupel, die denselben Verwobenheitsgrad besitzen, durch F auf denselben Wert abgebildet werden. Da es nur abzählbar viele endliche Folgen natürlicher Zahlen gibt, können also nur abzählbar viele Farben angenommen werden. Dies gibt einem die Jónsson–Eigenschaft für $B_n/\approx_n$.
Zunächst werden die Tupel aus B_n nach ihrer Verwobenheit klassifiziert. Diese Klassifikation kann später auf kanonische Weise auf die Restklassen übertragen werden.
Als erstes definieren wir den Verwobenheitsgrad für Paare aus B_n rekursiv. Der Definition liegt, wie auch schon bei der Definition der Äquivalenzrelation $\approx_n$, die Zerlegung von Elementen aus B_n in κ Blöcke zugrunde. Der Verwobenheitsgrad eines Tupels entscheidet sich dadurch, wie stark das Tupel schon in den unterschiedlichen Unterteilungsstufen verwoben ist.

Definition 4.3.1 Sei $\langle x, y \rangle$ ein Paar aus B_n mit $\llbracket x \rrbracket_n \prec_n \llbracket y \rrbracket_n$. Ist $n = 2$, so heißt $\langle x, y \rangle$ 0–verwoben.
Ist $n > 2$, so gibt es nach Proposition 4.2.15 zwei Fälle:

1. Fall: $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$.
Dann heißt $\langle x, y \rangle$ 0–verwoben.

2. Fall: $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} = \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$.
Dann heißt $\langle x, y \rangle$ $(i+1)$–verwoben, wenn $\{\alpha < \kappa\ ;\ \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle$ ist i–verwoben$\} \in \mathcal{C}$ gilt.

Ein Paar $\langle x, y\rangle$ aus B_n mit $[\![x]\!]_n \prec_n [\![y]\!]_n$ kann maximal $(n-2)$–verwoben sein.
$\langle x, y\rangle$ besitzt den niedrigsten Grad an Verwobenheit, wenn die Suprema von x und y, interpretiert als Folgen in B_2, unterschiedlich sind. Dies bedeutet, daß sich die Folgen x und y höchstens auf einem Anfangssegment von y überschneiden. Dies wollen wir mit der folgenden Proposition verdeutlichen:

Proposition 4.3.2 Sei $\langle x, y\rangle$ ein 0–verwobenes Paar aus B_n. Dann gibt es ein $\gamma < \kappa$, so daß $[f]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g]_{\mathcal{C}}$ ist für alle $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(x)$ und $[g]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(y_\beta)$ für $\beta > \gamma$.

Beweis: Es gilt $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y(\beta); \beta < \kappa^{n-2}\}$. Wähle ein beliebiges $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(y)$ mit $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} [f]_{\mathcal{C}}$. Dann gibt es ein $\gamma < \kappa$ mit $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(y_\gamma)$. γ besitzt die geforderte Eigenschaft.

□

Es ist somit gezeigt, daß die Zahl der κ^{n-3}–Blöcke, auf denen sich zwei 0–verwobene Folgen x und y höchstens überschneiden, eine Nullmenge ist. Anschaulich gesprochen sind dann die beiden Folgen fast gar nicht ineinander verwoben. Sind die Suprema der Folgen gleich, so betrachtet man die Suprema der κ^{n-3}–Blöcke der Folgen x und y. Man untersucht also, wie stark diese Blöcke ineinander verwoben sind. Diesen Prozeß iteriert man so lange, bis man auf einer Unterteilungsstufe k angelangt ist, auf der die Suprema der κ^{n-2-k}–Blöcke $\mathcal{C}$–fast überall unterschiedlich sind. Die Anzahl der Stufen, die man bis zu diesem Punkt zurückverfolgen mußte, gibt dann den Grad der Verwobenheit an. Der Verwobenheitsgrad gibt also die gröbste Unterteilungsstufe an, in der die Folgen nicht mehr stark ineinandergreifen.

Wir werden den Begriff der Verwobenheit nun auch für Paare aus $B_n/{\approx_n}$ einführen.

Definition 4.3.3 Sei i eine natürliche Zahl. Ein Paar $\langle [\![x]\!]_n, [\![y]\!]_n\rangle$ aus $B_n/{\approx_n}$ heißt i–verwoben, wenn $\langle x, y\rangle$ i–verwoben ist.

Es ist nicht selbstverständlich, daß die so definierte Eigenschaft der Verwobenheit wohldefiniert ist. Dies soll nun gezeigt werden:

Proposition 4.3.4 Sei i eine natürliche Zahl. Sind $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B_n$ und $x_1 \approx_n y_1, x_2 \approx_n y_2$, und ist das Paar $\langle x_1, x_2\rangle$ i–verwoben, so ist $\langle y_1, y_2\rangle$ ebenfalls i–verwoben.

Beweis: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B_n$ und $x_1 \approx_n y_1, x_2 \approx_n y_2$.
Die Wohldefiniertheit folgt durch Induktion nach i. Nach Proposition 4.2.15 haben zwei äquivalente Folgen x und y dasselbe Supremum. Diese Tatsache gibt uns sofort den Induktionsanfang, da $\mathrm{Sup}\{x_1(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{x_2(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{Sup}\{y_1(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y_2(\beta);\ \beta < \kappa^{n-2}\}$ ist.
Sei nun $i > 0$.
Setze

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{\alpha < \kappa\ ;\ (x_1)_\alpha \approx_{n-1} (y_1)_\alpha\} \cap \{\alpha < \kappa\ ;\ (x_2)_\alpha \approx_{n-1} (y_2)_\alpha\} \\ &= \{\alpha < \kappa\ ;\ (x_1)_\alpha \approx_{n-1} (y_1)_\alpha\ \&\ (x_2)_\alpha \approx_{n-1} (y_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ist $\langle x_1, x_2\rangle$ i–verwoben, so ist

$$C_2 := \{\alpha < \kappa;\ \langle (x_1)_\alpha, (x_2)_\alpha\rangle \text{ ist } (i-1)\text{–verwoben }\}$$

ein Element von $\mathcal{C}$.

Somit ist nach Induktionsvoraussetzung

$$C_1 \cap C_2 \subseteq \{\alpha < \kappa;\ \langle (y_1)_\alpha, (y_2)_\alpha \rangle \text{ ist } (i-1)\text{–verwoben } \} \in \mathcal{C}.$$

Also ist auch $\langle y_1, y_2 \rangle$ i–verwoben.

□

Korollar 4.3.5 Die Eigenschaft der Verwobenheit für Paare aus $B_n/{\approx_n}$ ist wohldefiniert.

Beweis: Folgt direkt aus Proposition 4.3.4.

□

Die folgenden Verallgemeinerungen von Verwobenheit auf endliche Tupel aus B_n und auf endliche Tupel aus $B_n/{\approx_n}$ ist natürlich:

Definition 4.3.6 Seien $m \geq 2$ und $\langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen.

(1) Ein geordnetes m–Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ aus B_n heißt $\langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$–verwoben, wenn für alle k mit $1 \leq k < m$ gilt: $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ ist i_k–verwoben.

(2) Ein geordnetes Tupel $\langle [\![x_1]\!]_n, ..., [\![x_m]\!]_n \rangle \in [B_n/{\approx_n}]^m$ heißt $\langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$–verwoben, wenn $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ $\langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$–verwoben ist.

Konstruktion der kanonisch I–verwobenen Tupel:

Im Beweis, daß die Zahlen κ_n Jónsson–Zahlen sind, wollen wir eine Verbindung von $[\kappa]^\kappa$ und den I–verwobenen Tupeln von B_n herstellen. Aus diesem Grund brauchen wir eine Funktion, die uns zu einem Element aus $[\kappa]^\kappa$ ein besonders typisches I–verwobenes Tupel konstruiert. Dieses typische I–verwobene Tupel wollen wir das kanonisch I–verwobene Tupel nennen.
Wir werden nun für alle endlichen Folgen $I = \langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ natürlicher Zahlen diese kanonisch I–verwobenen Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle \in [B_n]^m$ konstruieren.
Zunächst tun wir das für den Spezialfall $i_1 = ... = i_{m-1} > 0$.
Im allgemeinen liegen bei einem $\langle i, ..., i \rangle$–verwobenen Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ die Stücke der Folgen x_1 bis x_m nicht immer abwechselnd in der Ordnung $\prec_n$, sondern nur $\mathcal{C}$–fast überall, d.h. auf einer Filtermenge. Die kanonischen Tupel sollen sich dagegen dadurch auszeichnen, daß diese Reihenfolge immer eingehalten wird. Dieser Unterschied wird in Abbildung 4.1 verdeutlicht, in der das rechte Paar $\langle y_1, y_2 \rangle$ ein kanonisch 1–verwobenes Paar darstellt. Das linke Paar $\langle x_1, x_2 \rangle$ dagegen ist zwar auch 1–verwoben, jedoch folgen die κ^{n-3}–Blöcke nicht strikt abwechselnd, d.h. das Paar ist nicht kanonisch.

Sei eine natürliche Zahl $m \geq 2$ gegeben.
Für alle natürlichen Zahlen $n > 2$, $x \in B_n$ und $i \in \omega$ mit $1 \leq i \leq n-2$ werden wir das zu x gehörende kanonisch $\langle i, ..., i \rangle$–verwobene m–Tupel mit $\langle x^{m,i,1}, ..., x^{m,i,m} \rangle$ bezeichnen.
Wir konstruieren dieses Tupel rekursiv:
Die Folgen $x^{m,1,k}$ seien für $1 \leq k \leq m$ durch

$$(x^{m,1,k})_{\lambda+\ell} := x_{\lambda+\ell\cdot m+k-1} \text{ für alle Limeszahlen } \lambda \text{ und } \ell \in \omega$$

definiert.

Sei jetzt $i > 1$. Wenn für alle natürlichen Zahlen n^* und $y \in B_{n^*}$ das kanonische m–Tupel $\langle y^{m,i-1,1}, ..., y^{m,i-1,m} \rangle$ schon konstruiert ist, dann definiere $\langle x^{m,i,1}, ..., x^{m,i,m} \rangle$ durch

$$(x^{m,i,k})_\alpha := (x_\alpha)^{m,i-1,k} \text{ für alle } k \text{ mit } 1 \leq k \leq m.$$

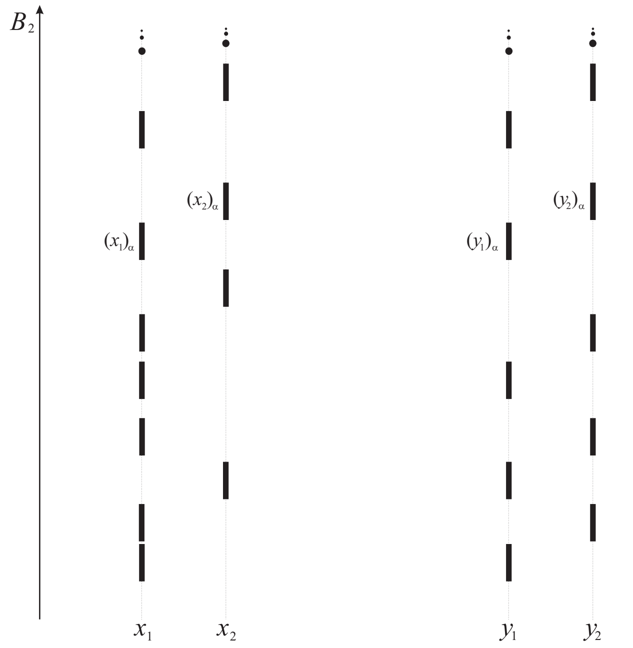

ABBILDUNG 4.1: Ein nichtkanonisches und ein kanonisch 1–verwobenes Paar.

Proposition 4.3.7 Seien $n > 2$, $m \geq 2$ natürliche Zahlen und $x \in B_n$. Dann gilt für alle i mit $1 \leq i \leq n-2$:

$$\langle x^{m,i,1}, ..., x^{m,i,m} \rangle \text{ ist } \langle i, ..., i \rangle\text{–verwoben.}$$

Beweis: Die Behauptung wird durch Induktion nach i gezeigt.
Sei zunächst $i = 1$, und sei ein $x \in B_n$ gegeben. Nach Definition ist für alle $\beta < \alpha < \kappa$ das Paar $\langle x_\beta, x_\alpha \rangle$ isoliert, also 0–verwoben. Dies zeigt, daß $\langle (x^{m,1,k})_\alpha, (x^{m,1,k+1})_\alpha \rangle$ für alle $\alpha < \kappa$ und alle k mit $1 \leq k < m$ 0–verwoben ist. Somit ist

$$\{\alpha < \kappa;\ \langle (x^{m,1,k})_\alpha, (x^{m,1,k+1})_\alpha \rangle \text{ ist 0–verwoben}\} = \kappa \in \mathcal{C},$$

d.h. $\langle x^{m,1,k}, x^{m,1,k+1} \rangle$ ist 1–verwoben für alle k mit $1 \leq k < m$ und die Behauptung ist für diesen Fall gezeigt.
Sei nun $i > 0$ und für alle natürlichen Zahlen n^* und $y \in B_{n^*}$ schon gezeigt, daß $\langle y^{m,i-1,1}, ..., y^{m,i-1,m} \rangle$ $\langle i-1, ..., i-1 \rangle$–verwoben ist. Dann gilt also für alle $\alpha < \kappa$ und $1 \leq k < m$:

$$\langle (x_\alpha)^{m,i-1,k}, (x_\alpha)^{m,i-1,k+1} \rangle \text{ ist } (i-1)\text{–verwoben.}$$

D.h. nach Definition, daß $\langle (x^{m,i,k})_\alpha, (x^{m,i,k+1})_\alpha \rangle$ $(i-1)$–verwoben ist für alle $\alpha < \kappa$.
Also ist $\langle x^{m,i,k}, x^{m,i,k+1} \rangle$ i–verwoben für alle k mit $1 \leq k < m$, und somit ist $\langle x^{m,i,1}, ..., x^{m,i,m} \rangle$ $\langle i, ..., i \rangle$–verwoben.

□

Definition 4.3.8 Seien $n \geq 3$ und $m \geq 2$ zwei natürliche Zahlen und $1 \leq i \leq n-2$. Dann ist für alle $x \in B_n$ das Tupel $\langle x^{m,i,1}, ..., x^{m,i,m} \rangle$ das **kanonisch** $\langle i, ..., i \rangle$**–verwobene** m**–Tupel für** x.
Ein Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ heißt **kanonisch** $\langle i, ..., i \rangle$**–verwoben**, wenn es ein $x \in B_n$ gibt, so daß $x^{m,i,k} = x_k$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$ gilt.

In diesem Abschnitt wird es sich an mehreren Stellen als wichtig erweisen, daß wir für unsere Konstruktionen einen normalen Filter $\mathcal{C}$ auf κ gewählt haben. Dies zeigt sich erstmals im folgenden Lemma, für dessen Beweis die Normalität von $\mathcal{C}$ unerläßlich ist.

Lemma 4.3.9 Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gilt $x \approx_n x^{m,i,1}$ für alle $x \in B_n$, natürliche Zahlen m und i mit $1 \leq i \leq n-2$.

Beweis:
Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach i:
Sei $i = 1$ und definiere eine Funktion $p : \kappa \to \kappa$ durch

$$p(\alpha) = \beta \iff \exists k((x^{m,1,k})_\beta = x_\alpha).$$

Nach Definition der Folgen $x^{m,1,k}$ gibt es für alle $\alpha < \kappa$ ein solches β und p ist somit auf ganz κ definiert. Ebenfalls nach Konstruktion der Folgen $x^{m,1,k}$ ist $p(\alpha) \leq \alpha$ für alle $\alpha < \kappa$.
Angenommen, es gilt $p(\alpha) < \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$. Da $\mathcal{C}$ normal ist, gibt es dann ein β_0 mit $p(\alpha) = \beta_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$. D.h. für $\mathcal{C}$–fast alle α gibt es ein k mit $1 \leq k \leq m$, so daß $x_\alpha = (x^{m,1,k})_{\beta_0}$ ist, Dies ist jedoch unmöglich, da die Menge $\{x^{m,1,k};\ 1 \leq k \leq m\}$ endlich ist.
Also gilt $p(\alpha) = \alpha$ für alle α aus einer Menge $C \in \mathcal{C}$, d.h. für alle $\alpha \in C$ gibt es ein k mit $(x^{m,1,k})_\alpha = x_\alpha$. Für $k > 1$ gilt jedoch $\ell \cdot m + k - 1 \neq \ell$ für alle $\ell \in \omega$, also gilt $(x^{m,1,k})_\alpha \neq x_\alpha$ für alle $k > 1$ und $\alpha < \kappa$. Somit ist $(x^{m,1,1})_\alpha = x_\alpha$ für alle $\alpha \in C$. Dies heißt aber insbesondere $\{\alpha < \kappa\ ;\ (x^{m,1,1})_\alpha \approx_{n-1} x_\alpha\} \in \mathcal{C}$, also $x \approx_n x^{m,1,1}$.

Sei nun $i > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x_\alpha \approx_{n-1} (x_\alpha)^{m,i-1,1}$ für alle $\alpha < \kappa$. Wegen $(x_\alpha)^{m,i-1,1} = (x^{m,i,1})_\alpha$ bedeutet das $\{\alpha < \kappa\ ;\ (x^{m,i,1})_\alpha \approx_{n-1} x_\alpha\} = \kappa \in \mathcal{C}$, also $x^{m,i,1} \approx_n x$.

□

Wir werden nun einige Bezeichnungen einführen, die uns die Definition der kanonisch I–verwobenen Tupel für beliebige endliche Folgen I natürlicher Zahlen erleichtern.

Bezeichnungen:

Sei $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen.
Sei $N_\nu^I := \{j\ ;\ i_j = \nu\}$ für alle natürlichen Zahlen ν die Menge aller Stellen, an denen die Folge I den Wert ν annimmt.
Dann bezeichne $a_\nu^I := |N_\nu^I| + 1$ die Anzahl der Segmente, in die die Folge I durch ihre ν–Stellen aufgeteilt wird.

Es soll nun eine Funktion τ_ν^I definiert werden, die jedem k mit $1 \leq k \leq a_\nu^I =: a$ das k–te Folgenstück von I zuordnet, welches von zwei ν–Stellen von I begrenzt wird:
Sei dazu $\{\nu_1, ..., \nu_{a-1}\}$ eine aufsteigende Aufzählung von N_ν^I.
Dann definiere τ_ν^I durch

$$\tau_\nu^I(1) := \begin{cases} \langle i_1, ..., i_{\nu_1 - 1}\rangle & \text{falls } \nu_1 > 1 \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{für alle } k \text{ mit } 1 < k < a \quad \tau_\nu^I(k) := \begin{cases} \langle i_{\nu_{k-1}+1}, ..., i_{\nu_k - 1}\rangle & \text{falls } \nu_k > \nu_{k-1} + 1 \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{und} \quad \tau_\nu^I(a) := \begin{cases} \langle i_{\nu_{a-1}+1}, ..., i_{m-1}\rangle & \text{falls } \nu_{a-1} < m - 1 \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $N_\nu^I = \emptyset$, so definieren wir τ_ν^I durch $\tau_\nu^I(1) = I$.

Wenn $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ ist, dann sei $I^- := \langle i_1 - 1, ..., i_{m-1} - 1\rangle$.

Ist $y = \langle y_1, ..., y_m\rangle$ ein I–verwobenes Tupel in B_n, dann wird die Abbildung Block_y die Folge y in $a_0^I =: a$ Folgen aufteilen:
Wenn $\{\nu_1, ..., \nu_{a-1}\}$ eine aufsteigende Aufzählung von N_0^I ist, dann definiere die Funktion Block_y durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Block}_y(1) &:= \langle y_1, ..., y_{\nu_1}\rangle,\\ \mathrm{Block}_y(k) &:= \langle y_{\nu_{k-1}+1}, ..., y_{\nu_k}\rangle \text{ für alle } k \text{ mit } 2 \le k < a \text{ und}\\ \mathrm{Block}_y(a) &:= \langle y_{\nu_{a-1}+1}, ..., y_m\rangle.\end{aligned}$$

Ausgehend von der Definition der kanonisch $\langle i, ..., i\rangle$–verwobenen Tupel in B_n werden wir nun die kanonisch I–verwobenen Tupel für beliebige Folgen I natürlicher Zahlen konstruieren. Auch hier wird es wie im oben betrachteten Spezialfall so sein, daß die Stücke eines kanonisch I–verwobenen Tupels in einer sehr regelmäßigen Weise angeordnet sind. Für alle Folgen $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ der Länge $m-1$ mit $i_j \le n-2$ für alle j werden wir jedem isolierten Tupel $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ in B_n ein kanonisch I–verwobenes m–Tupel zuordnen. Man beachte hierbei die Einschränkung $i_j \le n-2$ für alle j, die daher kommt, daß kanonisch I–verwobene Tupel in B_n nur dann definiert werden können, wenn es überhaupt I–verwobene Tupel in B_n gibt; der höchste Verwobenheitsgrad, der in B_n jedoch vorkommen kann, ist $n-2$.
Wir werden also für alle $(m-1)$–langen Folgen I natürlicher Zahlen eine Funktion T_I definieren, die jedem isolierten m–Tupel ein I–verwobenes m–Tupel zuordnet.

Für den Fall $n = 2$ sei $T_I(x_1, ..., x_m) := \langle x_1, ..., x_m\rangle$ für alle $m \ge 1$ und $\langle x_1, ..., x_m\rangle \in [B_2]^m$, wobei I in diesem Fall die Folge der Länge $m-1$ ist, deren Glieder alle 0 sind.
Wir betrachten nun den Fall $n > 2$: Wir konstruieren zunächst für alle Folgen $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ natürlicher Zahlen mit $0 \lneqq i_j$ für alle j durch Rekursion nach $\vartheta_I := \mathrm{Max}\{i_j;\ 1 \le j < m\}$ eine Funktion S_I, die jedem Element x aus einem B_n mit $\vartheta_I \le n-2$ ein I–verwobenes m–Tupel zuordnet.

Wenn $I = \emptyset$ ist, dann sei $S_I(x) := \langle x\rangle$ für alle $x \in B_n$ mit $n-2 \ge \vartheta_I$.
Für $\vartheta_I := 1$, d.h. $i_1 = ... = i_{m-1} = 1$ setzen wir $S_I(x) := \langle x^{m,1,1}, ..., x^{m,1,m}\rangle$ für $x \in B_n$.

Sei nun eine Folge $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ mit $1 \le i_j$ und $\mathrm{Max}\{i_j;\ 1 \le j < m\} = \vartheta_I > 1$ gegeben und für alle Folgen natürlicher Zahlen I^*, deren Maximum kleiner als ϑ_I ist, sei S_{I^*} schon definiert.
Wir setzen $a := a_1^I = |N_1^I| + 1 = |N_0^{I^-}| + 1 = a_0^{I^-}$. Dies ist also die Anzahl der Folgenglieder von I, die beim Übergang auf I^- zu Null werden, und deshalb die neuen Grenzen der Konstruktion bilden.
Sei $x \in B_n$ für ein n mit $\vartheta_I \le n-2$. Die Funktionswerte $S_{\tau_0^{I^-}(k)}((x^{a,1,k})_\alpha)$ von $S_{\tau_0^{I^-}(k)}$ sind für $1 \le k \le a$ nach Rekursionsannahme schon definiert. Aus diesen Folgenstücken setzen wir nun $S_I(x)$ zusammen:
Es sei für alle $\alpha < \kappa$

$$S_I^\alpha(x) := S_{\tau_0^{I^-}(1)}((x^{a,1,1})_\alpha)^\frown ...^\frown S_{\tau_0^{I^-}(a)}((x^{a,1,a})_\alpha).$$

Dann definieren wir $S_I(x) \in [B_n]^m$ durch

$$S_I(x) := \langle y_1, ..., y_m\rangle \iff S_I^\alpha(x) = \langle (y_1)_\alpha, ..., (y_m)_\alpha\rangle \quad \text{für alle } \alpha < \kappa.$$

Nach Konstruktion ist $S_I(x)$ I–verwoben. Man vergleiche dazu Abbildung 4.2. Dargestellt sind für $I = \langle 2, 2, 1, ..., 1, 2\rangle$ die α–ten und die β–ten Blöcke der ersten drei und der letzten beiden Folgenglieder von $S_I(x)$. Abkürzend ist $a := a_0^{I^-}$ gesetzt.

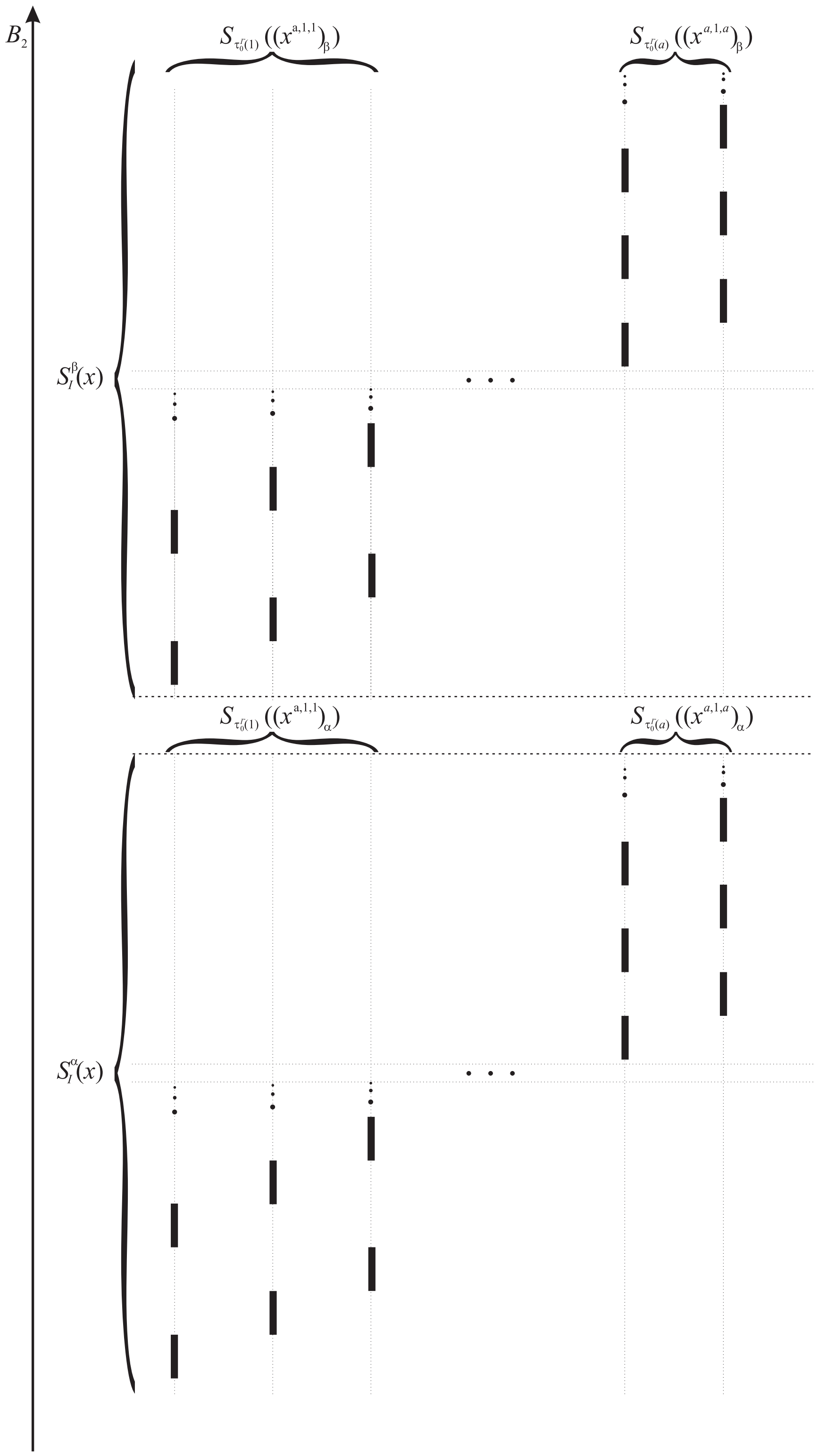

Abbildung 4.2: Die α–ten und β–ten Blöcke von $S_I(x)$ für $I = \langle 2, 2, 1, ..., 1, 2\rangle$.

Wir definieren jetzt für jede endliche Folge $I = \langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ natürlicher Zahlen und jede isolierte Folge $\langle x_1, ..., x_m \rangle \in [B_n]^m$ für ein n mit $\vartheta_I \leq n-2$ das I–verwobene m-Tupel $T_I(x_1, ..., x_m)$ durch

$$T_I(x_1, ..., x_m) := S_{\tau_0^I(1)}(x_1)^\frown ... ^\frown S_{\tau_0^I(a_0^I)}(x_{a_0^I}).$$

Ist $y = \langle y_1, ..., y_m \rangle := T_I(x_1, ..., x_m)$ das so konstruierte Tupel, so ist also $\mathrm{Block}_y(k) = S_{\tau_0^I(k)}(x_k)$ für alle k mit $1 \leq k \leq a_0^I$. Der k–te Block von $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ entsteht also durch Aufteilen der Folge x_k.

Wir haben also für alle $I \in \omega^{m-1}$ eine Funktion T_I definiert, die einem isolierten m–Tupel ein I–verwobenes m–Tupel zuordnet. Damit sind wir nun in der Lage, bestimmte I–verwobene Tupel auszuzeichnen:

Definition 4.3.10 Sei n eine natürliche Zahl ≥ 2 und $I = \langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen der Länge $m-1$ mit $\mathrm{Max}\{i_j;\ 1 \leq j < m\} \leq n-2$.
Wenn $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ eine endliche, isolierte Folge in B_n ist, dann heißt $T_I(x_1, ..., x_m)$ **das kanonisch I–verwobene m–Tupel für $\langle x_1, ..., x_m \rangle$.**
Ein I–verwobenes m–Tupel $\langle y_1, ..., y_m \rangle \in [B_n]^m$ heißt **kanonisch I–verwoben**, wenn es ein isoliertes Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle \in [B_n]^m$ gibt mit $\langle y_1, ..., y_m \rangle = T_I(x_1, ..., x_m)$.

Die kanonisch $\langle 0, ..., 0 \rangle$–verwobenen Tupel sind genau die isolierten Tupel. Denn ist $I = \langle 0, ..., 0 \rangle$ die Folge der Länge $m-1$, die konstant den Wert 0 annimmt, und ist eine isolierte Folge $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ aus B_n gegeben, dann ist $T_I(x_1, ..., x_m) = \langle x_1, ..., x_m \rangle$, d.h. $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ ist kanonisch I–verwoben. Umgekehrt ist ein kanonisch $\langle 0, ..., 0 \rangle$–verwobenes Tupel definitionsgemäß isoliert.

Wir wollen nun anhand eines Beispiels die Konstruktion der kanonischen Tupel veranschaulichen.
Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl, $I = \langle 1, 0, 1, 2 \rangle$ und $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$ ein isoliertes Tupel in B_n. Wir wollen die Konstruktion des kanonisch I–verwobenen Tupels

$$T_I(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =: \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \rangle$$

beschreiben. Man vergleiche dazu auch Abbildung 4.3, in der dieses kanonische Tupel dargestellt ist.
Für $I = \langle 1, 0, 1, 2 \rangle$ ist $|N_0^I| = 1$, also $a_0^I = 2$. Die Teilfolgen von I, die durch die 0 begrenzt werden, sind $\tau_0^I(1) = \langle 1 \rangle$ und $\tau_0^I(2) = \langle 1, 2 \rangle$. Also gilt

$$T_I(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = S_{\langle 1 \rangle}(x_1)^\frown S_{\langle 1,2 \rangle}(x_2).$$

Das Tupel $\langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \rangle$ entsteht somit aus den ersten beiden Folgen x_1 und x_2 des gegebenen isolierten Tupels. Das Tupel $S_{\langle 1 \rangle}(x_1)$ entsteht durch Aufteilung der Folge x_1. Nach Konstruktion ist $S_{\langle 1 \rangle}(x_1)$ das kanonisch 1–verwobene Paar $\langle (x_1)^{2,1,1}, (x_1)^{2,1,2} \rangle$. Damit sind $y_1 = (x_1)^{2,1,1}$ und $y_2 = (x_1)^{2,1,2}$ schon konstruiert. Es bleibt noch die Folge $S_{\langle 1,2 \rangle}(x_2)$ zu betrachten. Sie entsteht durch Aufteilen der Folge x_2 und wird blockweise definiert. Sei $\alpha < \kappa$ beliebig. Dann bildet

$$\begin{aligned} S^\alpha_{\langle 1,2 \rangle}(x_2) &= S_\emptyset(((x_2)^{2,1,1})_\alpha)^\frown S_{\langle 1 \rangle}(((x_2)^{2,1,2})_\alpha) \\ &= \langle ((x_2)^{2,1,1})_\alpha \rangle^\frown \langle (((x_2)^{2,1,2})_\alpha)^{2,1,1}, (((x_2)^{2,1,2})_\alpha)^{2,1,2} \rangle \\ &= \langle ((x_2)^{2,1,1})_\alpha, (((x_2)^{2,1,2})^{2,2,1})_\alpha, (((x_2)^{2,1,2})^{2,2,2})_\alpha \rangle \end{aligned}$$

das Tupel der α–ten Blöcke von $S_{\langle 1,2 \rangle}(x_2)$. Also ist $y_3 = (x_2)^{2,1,1}, y_4 = ((x_2)^{2,1,2})^{2,2,1}$ und $y_5 = ((x_2)^{2,1,2})^{2,2,2}$. Insgesamt haben wir nun also das Tupel $T_I(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ konstruiert. Es gilt

$$T_I(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \langle (x_1)^{2,1,1}, (x_1)^{2,1,2}, (x_2)^{2,1,1}, ((x_2)^{2,1,2})^{2,2,1}, ((x_2)^{2,1,2})^{2,2,2} \rangle.$$

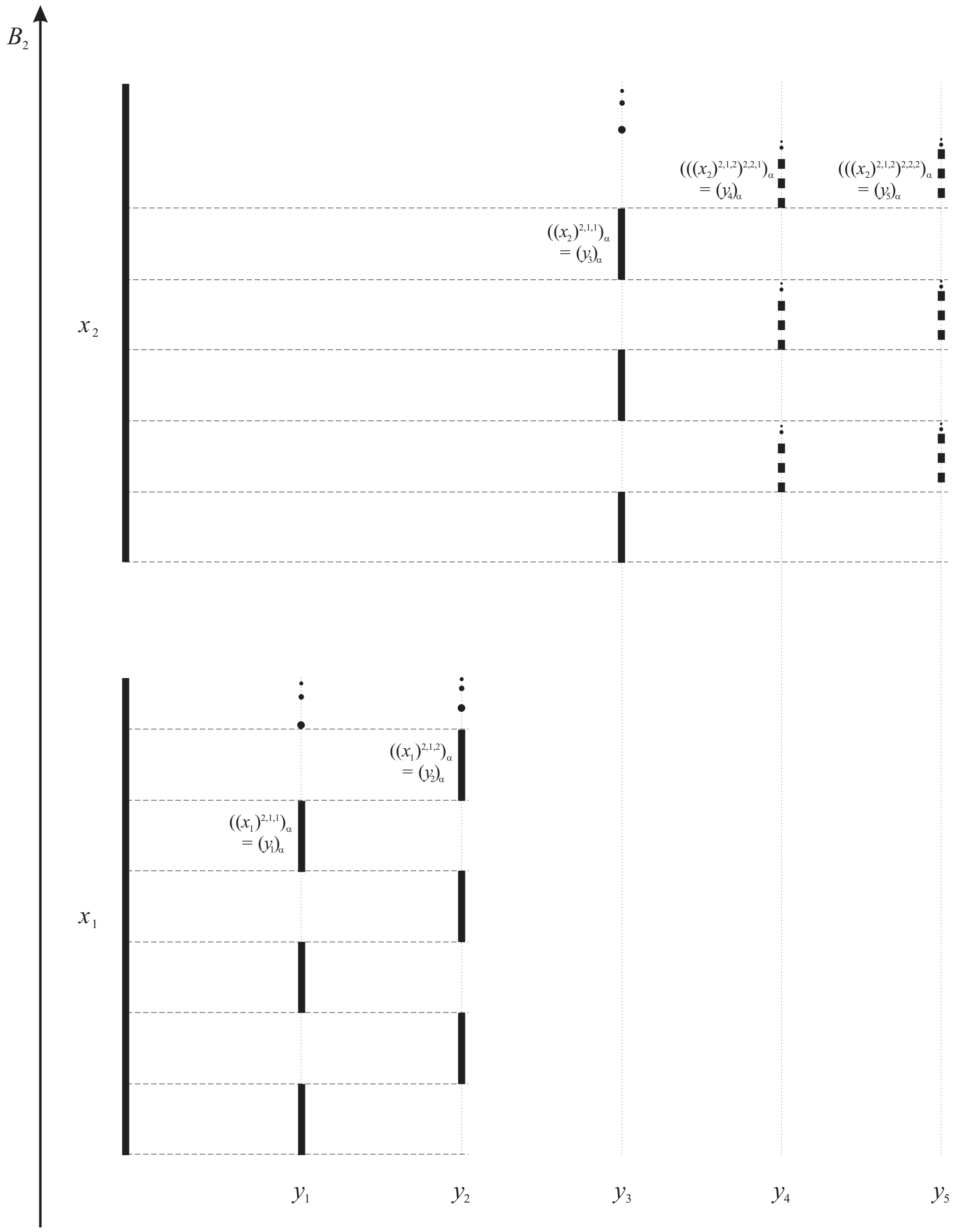

Abbildung 4.3: Kanonisch $\langle 1, 0, 1, 2\rangle$–verwobenes Tupel.

Oftmals werden wir aus mehreren Folgen eine einzige Folge zusammensetzen. Sind Folgen $y_1, ..., y_m \in B_n$ gegeben, so bezeichne wie in Abschnitt 2 $y_1 \sqcup ... \sqcup y_m$ die eindeutig bestimmte, strikt aufsteigende Aufzählung von $\mathrm{Im}(y_1) \cup ... \cup \mathrm{Im}(y_m)$. Mit $y := \langle y_1, ..., y_m\rangle$ schreiben wir auch

$$\bigsqcup y := y_1 \sqcup ... \sqcup y_m.$$

Die folgende Eigenschaft der kanonischen Tupel folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Sie besagt, daß das kanonisch I–verwobene Tupel $T_I(x_1, ..., x_m)$ durch Aufteilung der ersten a_0^I Folgen $x_1, ..., x_{a_0^I}$ entsteht.

Proposition 4.3.11 Sei $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen, $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ eine isolierte Folge in B_n für ein n mit $\mathrm{Max}\{i_j;\ 1 \leq j < m\} \leq n-2$ und $\langle y_1, ..., y_m\rangle = T_I(x_1, ..., x_m)$. Dann gilt

$$y_1 \sqcup ... \sqcup y_m = x_1 \sqcup ... \sqcup x_{a_0^I}.$$

Ist $i_j > 0$ für alle j, so gilt insbesondere $\bigsqcup S_I(x) = x$ für alle $x \in B_n$.

Beweis: Nach Konstruktion auf Seite 114 ist diese Eigenschaft offensichtlich, denn mit $y := \langle y_1, ..., y_m\rangle$ entsteht $\mathrm{Block}_y(k)$ durch Aufteilen der Folge x_k für alle k mit $1 \leq k \leq a_0^I$. Insgesamt entsteht daher $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ durch Aufteilen der Folgen $x_1, ..., x_{a_0^I}$.

□

Wir können nun jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ in eindeutiger Weise ein kanonisch I–verwobenes Tupel zuordnen. Dazu verwenden wir das Misch– und Sortierlemma 3.2.15. Für jedes $m \in \omega$ ordnet die Funktion $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}$ Elementen aus $[\kappa]^\kappa$ Folgen von Funktionen aus $[\kappa]^\kappa$ zu, wobei diese Folgen Länge $\kappa^{n-2} \cdot m$ besitzen. Den k–ten Block von $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}(f)$ der Länge κ^{n-2} nennen wir $X_{k,f}$. Dadurch erhalten wir eine Folge $\langle X_{1,f}, ..., X_{m,f}\rangle$ in A_n . Wir setzen nun $x_{k,f} := X_{k,f}^{\maltese}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$. Somit haben wir jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ eindeutig eine isolierte Folge $\langle x_{1,f}, ..., x_{m,f}\rangle$ in B_n zugeordnet[3]. Für eine Folge I natürlicher Zahlen der Länge $m-1$ definieren wir nun die Funktion t_I durch

$$t_I(f) := T_I(x_{1,f}, ..., x_{m,f}).$$

t_I ordnet also jeder Funktion $f \in [\kappa]^\kappa$ ein kanonisch I–verwobenes m–Tupel zu.

Wenn nun H eine Teilmenge von κ vom Ordnungstyp κ ist und $f \in [H]^\kappa$, so ist $\langle x_{1,f}, ..., x_{m,f}\rangle \in [B_n^H]^m$ und daher auch $t_I(f) \in [B_n^H]^m$: Denn ist $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}(f) = \langle f_\eta;\ \eta < \kappa^{n-2} \cdot m\rangle$, so gilt nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15 $f_\eta(\beta) \in H$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$ und alle $\eta < \kappa^{n-2} \cdot m$. Ist $g_\eta \in [H]^\kappa$ für alle $\eta < \kappa^{n-2} \cdot m$ die strikt aufsteigende Aufzählung von $\mathrm{Im}(f_\eta) \cap H$, so gilt $f_\eta \sim_{\mathcal{C}} g_\eta$ nach Hilfssatz 3.2.1. Also gilt $\langle [f_\eta]_{\mathcal{C}};\ \eta < \kappa^{n-2} \cdot m\rangle \in [[H]^\kappa/\mathcal{C}]^{\kappa^{n-2}\cdot m}$ und somit $\langle x_{1,f}, ..., x_{m,f}\rangle \in [B_n^H]^m$.

Umgekehrt gibt es für alle kanonisch I-verwobenen m–Tupel $\langle y_1, ..., y_m\rangle \in [B_n^H]^m$ eine Funktion $f \in [H]^\kappa$ mit $t_I(f) = \langle y_1, ..., y_m\rangle$. Denn ist $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ kanonisch I–verwoben, dann gibt es nach Definition eine isolierte Folge $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ mit $T_I(x_1, ..., x_m)$ $= \langle y_1, ..., y_m\rangle$.
Dann erfüllt $f := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m}(\Upsilon_H(x_1)^\frown ... ^\frown \Upsilon_H(x_m))$ die gewünschte Eigenschaft: Nach Konstruktion der Funktionen $\mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m}$ und Υ_H besitzt f nur Funktionswerte in H, d.h. $f \in [H]^\kappa$. Weiter gibt die Eigenschaft (2) der Funktionen $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}$ und $\mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m}$ aus Satz 3.2.15, daß $\langle x_{1,f}, ..., x_{m,f}\rangle = \langle x_1, ..., x_m\rangle$ ist. Insgesamt folgt also

$$t_I(f) = T_I(x_{1,f}, ..., x_{m,f}) = T_I(x_1, ..., x_m) = \langle y_1, ..., y_m\rangle.$$

Der Fall $I = \langle 0, ..., 0\rangle$ zeigt, daß es für jedes isolierte Tupel $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ in B_n^H ein $f \in [H]^\kappa$ gibt mit $x_k = x_{k,f}$ für alle k.
Diese Überlegungen zeigen insbesondere, daß die Funktion $t_I : [\kappa]^\kappa \to (B_n)^m$ surjektiv auf den kanonisch I–verwobenen m–Tupeln aus B_n ist. t_I stellt den Zusammenhang zwischen der Struktur $[\kappa]^\kappa$ und den endlichen Tupeln von B_n her. Beim Nachweis der Jónsson–Eigenschaft der Zahlen κ_n wird diese Funktion eine bedeutende Rolle spielen, da man durch sie die schwache Partitionseigenschaft von κ einsetzen kann, um Aussagen über Partitionen der Menge der endlichen Tupel aus $B_n/\approx_n$ zu machen.

[3]Eigentlich hängen die Folgen $X_{k,f}$ von m ab. Dagegen sind die Folgen $x_{k,f}$ nach Lemma 3.2.18 unabhängig von m. Daher wird m in der Notation nicht berücksichtigt. An den wenigen Stellen, an denen die Folgen $X_{k,f}$ verwendet werden, geht aus dem Zusammenhang eindeutig hervor, welches m bei der Konstruktion verwendet wurde.

Definition 4.3.12 (1) Zwei Tupel $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ und $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ aus B_n heißen **äquivalent**, wenn $x_k \approx_n y_k$ gilt für alle k mit $1 \leq k \leq m$.

(2) Ist $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ ein Tupel aus B_n, so heißt $\langle [\![x_1]\!]_n, ..., [\![x_m]\!]_n\rangle$ das **Äquivalenzklassentupel** von $\langle x_1, ..., x_m\rangle$.

Für alle Funktionen $f \in [\kappa]^\kappa$ bezeichne $[\![t_I(f)]\!]$ das Äquivalenzklassentupel von $t_I(f)$.

Das nächste Ziel ist es, zu zeigen, daß jedes I–verwobene Tupel $\langle x_1, ..., x_m\rangle \in [B_n]^m$ äquivalent ist zu einem Tupel, das kanonisch I–verwoben ist. Dann ist die Funktion $f \longmapsto [\![t_I(f)]\!]$ surjektiv auf den I–verwobenen Tupeln von $B_n/\approx_n$.

Im folgenden soll $(-k)$–verwoben für alle $k \in \omega$ dasselbe wie 0–verwoben sein.

Ein Tupel ist I–verwoben, wenn für $\mathcal{C}$–fast alle α die α–ten κ^{n-3}–Blöcke untereinander (I^-)–verwoben sind. Der folgende Hilfssatz zeigt, daß es für jedes I–verwobene Tupel aus B_n ein dazu äquivalentes Tupel gibt, für welches nicht nur für $\mathcal{C}$–fast alle, sondern wirklich für alle $\alpha < \kappa$ die α–ten κ^{n-3}–Blöcke untereinander (I^-)–verwoben sind. Interessiert man sich nur für das Äquivalenzklassentupel eines Tupels $\langle x_1, ..., x_m\rangle$, so kann man also o.B.d.A. annehmen, daß die κ^{n-3}–Blöcke der Folgen $x_1, ..., x_m$ alle (I^-)–verwoben sind.

Hilfssatz 4.3.13 Sei $n > 2$ eine natürliche Zahl, $\langle x_1, ..., x_m\rangle \in [B_n]^m$ sei I–verwoben für ein $I \in (n-1)^{m-1}$.
Dann gibt es eine Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ mit $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ und $y_k \approx_n x_k$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$, die die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\{\alpha < \kappa \ ; \ \langle (y_1)_\alpha, ..., (y_m)_\alpha\rangle \text{ ist } (I^-)\text{–verwoben}\} = \kappa.$$

Beweis: Sei $I = \langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$. Nach der Definition i–verwobener Paare gilt

$$C_k := \{\alpha < \kappa \ ; \ \langle (x_k)_\alpha, (x_{k+1})_\alpha\rangle \text{ ist } (i_k - 1)\text{–verwoben}\} \in \mathcal{C}$$

für alle k, also auch $\bigcap_{1 \leq k < m} C_k \in \mathcal{C}$.
Somit gilt $C := \{\alpha < \kappa \ ; \ \langle (x_1)_\alpha, ..., (x_m)_\alpha\rangle \text{ ist } \langle i_1 - 1, ..., i_{m-1} - 1\rangle\text{–verwoben}\} \in \mathcal{C}$.
Demnach hat C nach Proposition 2.1.18 Ordnungstyp κ. Sei nun $w : \kappa \to C$ die ordnungserhaltende Bijektion. Nun definiert man die Folgen y_k durch

$$(y_k)_\alpha := (x_k)_{w(\alpha)} \quad \text{für alle} \quad \alpha < \kappa.$$

Aus Hilfssatz 3.2.1 folgt nun, daß $w(\alpha) = \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$ gilt. Also ist $y_k \approx_n x_k$ für alle k. Außerdem ist

$$\{\alpha < \kappa \ ; \ \langle (y_1)_\alpha, ..., (y_m)_\alpha\rangle \text{ ist } \langle i_1 - 1, ..., i_{m-1} - 1\rangle\text{–verwoben}\} = \kappa.$$

Also hat man eine Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

□

Ist ein Paar $\langle x_1, x_2\rangle$ 0–verwoben, so bedeutet dies, daß höchstens ein Anfangssegment von x_2 unterhalb des Supremums der Folge x_1 liegt. Schneidet man dieses Anfangssegment ab und betrachtet die Folge y_2 der restlichen Folgenglieder von x_2, so folgt aus der Normalität von $\mathcal{C}$, daß x_2 und y_2 äquivalent sind:

Hilfssatz 4.3.14 Sei wieder eine natürliche Zahl $n > 2$ gegeben und $\langle x_1, x_2\rangle$ ein 0–verwobenes Paar aus B_n.
Dann gibt es ein $y_2 \in B_n$ mit $y_2 \approx_n x_2$ und $\mathrm{Im}(y_2) \subseteq \mathrm{Im}(x_2)$, so daß $\langle x_1, y_2\rangle$ isoliert ist.

Beweis:
Nach Proposition 4.3.2 gibt es ein $\gamma < \kappa$, so daß $[f]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g]_{\mathcal{C}}$ ist für alle $[f]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(x_1)$ und $[g]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}((x_2)_\beta)$ und für alle $\beta \geq \gamma$. Ist $w : \kappa \to \kappa - \gamma$ eine ordnungserhaltende Bijektion, so definieren wir y_2 durch

$$(y_2)_\alpha := (x_2)_{w(\alpha)}.$$

Nach Hilfssatz 3.2.1 mit $f := \mathrm{id}$ und $g := w$ gilt $(y_2)_\alpha = (x_2)_\alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$, also $x_2 \approx_n y_2$. Somit erfüllt y_2 die gewünschte Eigenschaft.

□

Diesen Satz kann man leicht verallgemeinern für beliebige endliche Tupel:

Hilfssatz 4.3.15 Sei $n > 2$ eine natürliche Zahl, $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ sei ein $\langle 0, ..., 0\rangle$–verwobenes m–Tupel in B_n. Dann gibt es ein m–Tupel $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ mit $y_k \approx_n x_k$ und $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für $1 \leq k \leq m$, so daß die Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ isoliert ist.

Beweis: Dies folgt durch Induktion nach m: Für $m = 2$ ist die Behauptung nach Hilfssatz 4.3.14 wahr. Ist nun $m > 2$ und eine $\langle 0, ..., 0\rangle$–verwobene Folge $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ gegeben, so können wir die Folgen $x_1, ..., x_{m-1}$ nach Induktionsvoraussetzung durch äquivalente Folgen $y_1, ..., y_{m-1}$ mit $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für alle k ersetzen, so daß $\langle y_1, ..., y_{m-1}\rangle$ isoliert ist. Nach Proposition 4.3.4 ist $\langle y_{m-1}, x_m\rangle$ ebenfalls 0–verwoben. Daher kann man auf dieses Paar Hilfssatz 4.3.14 anwenden und x_m durch eine äquivalente Folge y_m mit $\mathrm{Im}(y_m) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ ersetzen, so daß $\langle y_{m-1}, y_m\rangle$ isoliert ist. Insgesamt erhält man so eine isolierte Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ mit $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für alle k, die äquivalent zu $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ ist.

□

Aus den vorangehenden beiden Hilfssätzen folgt, daß man bei einem $\langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$–verwobenen Tupel $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ im Fall $i_j = 0$ unter der Voraussetzung, daß man sich nur für das Äquivalenzklassentupel $\langle [\![x_1]\!]_n, ..., [\![x_m]\!]_n\rangle$ interessiert, o.B.d.A. davon ausgehen kann, daß das Paar $\langle x_j, x_{j+1}\rangle$ schon kanonische Form hat. Der folgende Hilfssatz zeigt, daß man auch für die restlichen Folgen bis zu einem gewissen Grad Kanonizität voraussetzen darf.

Hilfssatz 4.3.16 Sei $n > 2$ eine natürliche Zahl, $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ ein $\langle i_1, ..., i_{m-1}\rangle$–verwobenes m–Tupel aus B_n, wobei $i_j \neq 0$ ist für alle j.
Dann gibt es eine Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ mit $y_k \approx_n x_k$ und $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$, so daß gilt:

(1) $[\![(y_1)_\alpha]\!]_{n-1} \prec_{n-1} ... \prec_{n-1} [\![(y_m)_\alpha]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![(y_1)_\gamma]\!]_{n-1}$ für alle $\alpha < \gamma < \kappa$.

(2) Für alle $\alpha < \gamma < \kappa$ ist das Paar $\langle (y_m)_\alpha, (y_1)_\gamma\rangle$ isoliert.

Beweis: Wir wenden Hilfssatz 3.2.3 an, um eine Folge $\langle z_1, ..., z_m\rangle$ zu konstruieren, die Eigenschaft (1) erfüllt. Dazu definieren wir für alle k mit $1 \leq k \leq m$ eine Funktion $f_k \in [B_{n-1}/{\approx_{n-1}}]^\kappa$ durch $f_k(\alpha) := [\![(x_k)_\alpha]\!]_{n-1}$. Da $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ ein geordnetes Tupel ist, erfüllen die Funktionen f_k die Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2.3, und es gibt Funktionen g_k mit den dort angegebenen Eigenschaften. Da $\mathrm{Im}(g_k) \subseteq \mathrm{Im}(f_k)$ gilt für alle k mit $1 \leq k \leq m$, gibt es für jedes k eine Funktion $w_k : \kappa \to \kappa$ mit $g_k(\alpha) = [\![(x_k)_{w_k(\alpha)}]\!]_{n-1}$. Definiert man nun die Folgen z_k durch

$$(z_k)_\alpha := (x_k)_{w_k(\alpha)} \quad \text{für alle } \alpha < \kappa,$$

so ist eine Folge $\langle z_1, ..., z_m\rangle$ gefunden, die Eigenschaft (1) erfüllt.

Aus $\langle z_1, ..., z_m \rangle$ erhält man eine Folge $\langle y_1, ..., y_m \rangle$, die zusätzlich noch Eigenschaft (2) besitzt, indem man jeden ungeraden κ^{n-3}–Block der Mengen z_k ausläßt:
Definiere y_k für alle k durch

$$(y_k)_{\lambda+\ell} := (z_k)_{\lambda+2\cdot\ell} \text{ für alle Limeszahlen } \lambda \text{ und } \ell \in \omega.$$

Dann erfüllt $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ alle gewünschten Eigenschaften. Denn sei $\alpha < \gamma < \kappa$. Dann gibt es Limeszahlen λ_1 und λ_2 und natürliche Zahlen ℓ_1 und ℓ_2 mit $\alpha = \lambda_1 + \ell_1$ und $\gamma = \lambda_2 + \ell_2$. Es gilt dann $(y_k)_\alpha = (y_k)_{\lambda_1+\ell_1} = (z_k)_{\lambda_1+2\cdot\ell_1}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$ und $(y_1)_\gamma = (y_1)_{\lambda_2+\cdot\ell_2} = (z_1)_{\lambda_2+2\cdot\ell_2}$. Also folgt wegen $\lambda_1 + 2 \cdot \ell_1 < \lambda_2 + 2 \cdot \ell_2$ und weil das Tupel $\langle z_1, ..., z_m \rangle$ Eigenschaft (1) erfüllt:

$$[\![(y_1)_\alpha]\!]_{n-1} \prec_{n-1} ... \prec_{n-1} [\![(y_m)_\alpha]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![(y_1)_\gamma]\!]_{n-1}.$$

Somit erfüllt auch $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ Eigenschaft (1).
Zusätzlich erfüllt $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ Eigenschaft (2). Denn sei $\alpha < \gamma < \kappa$. Dann gibt es Limeszahlen λ_1 und λ_2 und natürliche Zahlen ℓ_1 und ℓ_2 mit $\alpha = \lambda_1 + \ell_1$ und $\gamma = \lambda_2 + \ell_2$. Nun gilt nach Eigenschaft (1) des Tupels $\langle z_1, ..., z_m \rangle$

$$[\![(z_m)_{\lambda_1+2\cdot\ell_1}]\!]_{n-1} \prec_{n-1} [\![(z_1)_{\lambda_1+2\cdot\ell_1+1}]\!]_{n-1}.$$

Da $\lambda_1 + 2 \cdot \ell_1 + 1 < \lambda_2 + 2 \cdot \ell_2$ ist, ist das Paar $\langle (z_1)_{\lambda_1+2\cdot\ell_1+1}, (z_1)_{\lambda_2+2\cdot\ell_2} \rangle$ isoliert. Nach Korollar 4.2.16 ist daher auch $\langle (z_m)_{\lambda_1+2\cdot\ell_1}, (z_1)_{\lambda_2+2\cdot\ell_2} \rangle = \langle (y_m)_\alpha, (y_1)_\gamma \rangle$ isoliert.

□

Unser Ziel, zu zeigen, daß jedes I–verwobene Tupel $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ aus B_n äquivalent zu einem kanonisch I–verwobenen Tupel ist, ist nun bald erreicht. Wir werden dies induktiv beweisen, indem wir zunächst die κ^{n-3}–Blöcke der Folgen $x_1, ..., x_m$ kanonisieren. Um den Induktionsschritt machen zu können, soll im folgenden Hilfssatz geklärt werden, wie man aus einem Tupel von Folgen, deren κ^{n-3}–Blöcke schon kanonische Form besitzen, ein dazu äquivalentes, kanonisches Tupel erhält.

Hilfssatz 4.3.17 Seien $n > 2$ und $m \geq 2$ natürliche Zahlen, $I = \langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ ein Tupel natürlicher Zahlen, wobei $i_j \neq 0$ sei für alle j mit $1 \leq j < m$. Außerdem seien für alle $\alpha < \kappa$ Folgen $y^\alpha = \langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle$ in B_{n-1} gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle$ ist kanonisch (I^-)–verwoben.

(2) Für alle $\alpha < \beta < \kappa$ ist das Paar $\langle \bigsqcup y^\alpha, \bigsqcup y^\beta \rangle$ isoliert.

Wenn nun für alle k mit $1 \leq k \leq m$ Folgen $y_k \in B_n$ durch $(y_k)_\alpha = y_k^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ definiert werden, so ist $y := \langle y_1, ..., y_m \rangle$ kanonisch I–verwoben für $\bigsqcup y$, d.h. es gilt $S_I(\bigsqcup y) = \langle y_1, ..., y_m \rangle$.

Abbildung 4.4 zeigt eine solche Situation, in der die Voraussetzungen für diesen Satz erfüllt sind: Die Folgen $y^\alpha = \langle y_1^\alpha, y_2^\alpha, y_3^\alpha \rangle$ und $y^\beta = \langle y_1^\beta, y_2^\beta, y_3^\beta \rangle$ sind kanonisch $\langle 1, 2 \rangle$–verwoben. Außerdem sind $\bigsqcup y^\alpha$ und $\bigsqcup y^\beta$ isoliert. Hat man κ solche Folgen, die auf diese Weise angeordnet sind, so kann man sie nach Hilfssatz 4.3.17 zu einem kanonisch $\langle 2, 3 \rangle$–verwobenen Tupel zusammensetzen.
Dagegen bietet Abbildung 4.5 ein Beispiel dafür, daß $\langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle$ und $\langle y_1^\beta, ..., y_m^\beta \rangle$ zwar kanonisch (I^-)–verwoben sind (hierbei ist $I = \langle 2, 3 \rangle$), jedoch überschneiden sich die Folgen, so daß Eigenschaft (2) aus Hilfssatz 4.3.17 nicht erfüllt ist. In diesem Fall können die beiden Tupel nicht die κ^{n-3}–Blöcke eines kanonisch I–verwobenen Tupels bilden.

Beweis:
Nach Eigenschaft (1) gibt es für alle $\alpha < \kappa$ und k mit $1 \leq k \leq m$ Mengen $x_k^\alpha \in B_{n-1}$, so daß

$$\langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle = T_{I^-}(x_1^\alpha, ..., x_m^\alpha)$$

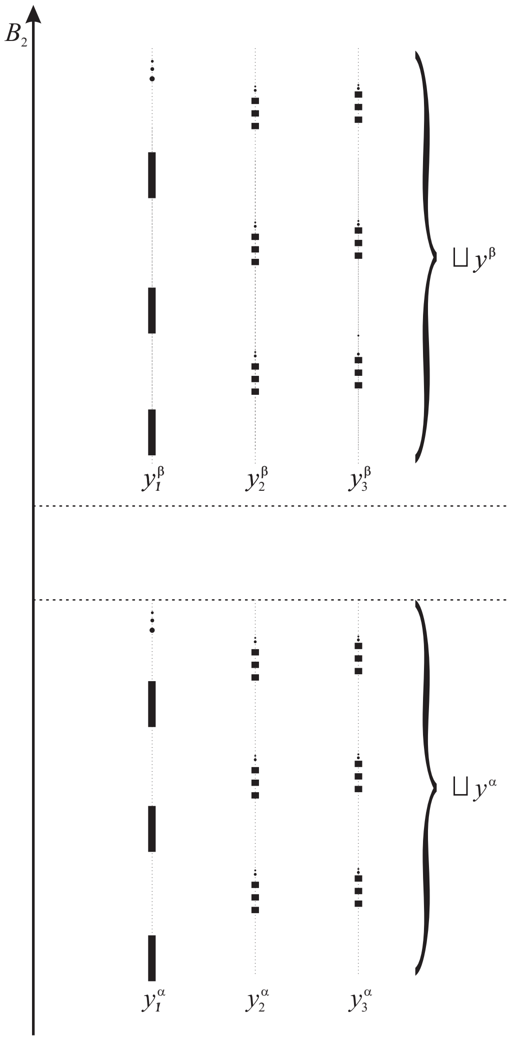

ABBILDUNG 4.4: Veranschaulichung von Hilfssatz 4.3.17

ist.
Nach Definition der kanonisch verwobenen Tupel gilt dann

$$\begin{aligned}\langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle &= S_{\tau_0^{I-}(1)}(x_1^\alpha)^\frown ... ^\frown S_{\tau_0^{I-}(a_0^{I-})}(x^\alpha_{a_0^{I-}}) \\ &= S_{\tau_1^I(1)}(x_1^\alpha)^\frown ... ^\frown S_{\tau_1^I(a_1^I)}(x^\alpha_{a_1^I}).\end{aligned}$$

Nach Proposition 4.3.11 ist $x_k^\alpha = \bigsqcup S_{\tau_0^{I-}(k)}(x_k^\alpha) = \bigsqcup \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k)$ für alle $\alpha < \kappa$ und alle k mit $1 \leq k \leq a_0^{I^-}$.

Wegen Eigenschaft (2) können wir deshalb für alle k mit $1 \leq k \leq a_0^{I^-}$ Folgen x_k durch $(x_k)_\alpha := x_k^\alpha$ definieren. Wegen $x_k^\alpha = \bigsqcup \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k)$ für alle k gilt $x_1^\alpha \sqcup ... \sqcup x^\alpha_{a_1^I} = y_1^\alpha \sqcup ... \sqcup y_m^\alpha$. Daher gilt $x_1 \sqcup ... \sqcup x_{a_1^I} = \bigsqcup y$. Nach Eigenschaft (1) ist für alle $\alpha < \kappa$ und alle k mit $1 \leq k < m$ das Paar $\langle \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k), \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k+1)\rangle$ isoliert. Wegen Eigenschaft (2) und $x_k^\alpha = \bigsqcup \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k)$ ist daher $x_k = (\bigsqcup y)^{a_1^I,1,k}$ für alle k mit $1 \leq k \leq a_1^I$.

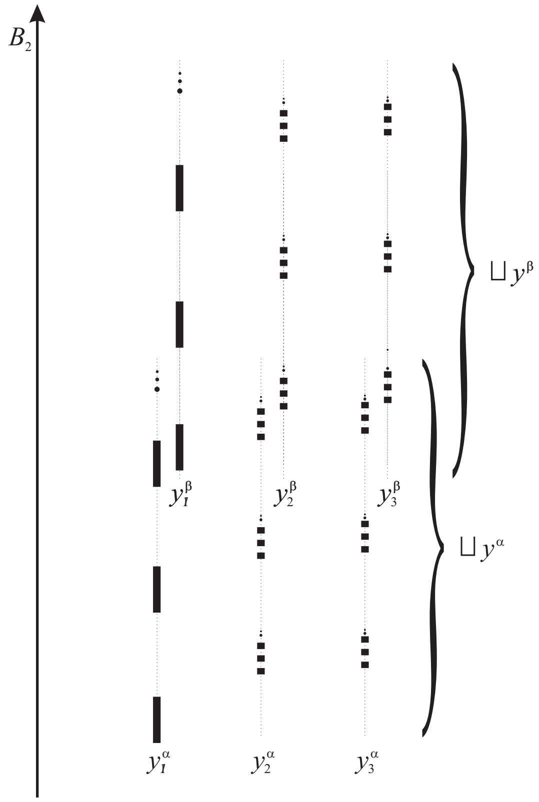

ABBILDUNG 4.5: Tupel ohne die Eigenschaft (2) aus Hilfssatz 4.3.17

Somit folgt nun für alle $\alpha < \kappa$

$$\begin{aligned}
\langle (y_1)_\alpha, ..., (y_m)_\alpha \rangle &= \langle y_1^\alpha, ..., y_m^\alpha \rangle \\
&= S_{\tau_1^I(1)}(((\bigsqcup y)^{a_1^I,1,1})_\alpha)^\frown ...^\frown S_{\tau_1^I(a_1^I)}(((\bigsqcup y)^{a_1^I,1,a_1^I})_\alpha) \\
&= S_I^\alpha(\bigsqcup y).
\end{aligned}$$

Also gilt $S_I(\bigsqcup y) = \langle y_1, ..., y_m \rangle$, was die Behauptung beweist.

□

Das Hauptresultat folgt nun mit Hilfe der vorangegangenen Hilfssätze recht schnell:

Satz 4.3.18 Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $I = \langle i_1, ..., i_m \rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen und $\langle x_1, ..., x_m \rangle$ ein I–verwobenes Tupel aus B_n.
Dann gibt es ein kanonisch I–verwobenes m–Tupel $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ mit $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$, so daß $y_k \approx_n x_k$ gilt für alle k mit $1 \leq k \leq m$.

Beweis:
Sei also $x = \langle x_1, ..., x_m \rangle$ ein I–verwobenes m–Tupel aus B_n, wobei $I = \langle i_1, ..., i_{m-1} \rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen sei.
Für $n = 2$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Wir betrachten nun den Fall $n > 2$. Die Behauptung wird durch Induktion nach $\mathrm{Max}\{i_j \ ; \ 1 \leq j \leq m-1\}$ bewiesen:
Sei zunächst $\mathrm{Max}\{i_j \ ; \ 1 \leq j \leq m-1\} = 0$. Wähle dann $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ wie in Hilfssatz 4.3.15. Offensichtlich ist $\langle y_1, ..., y_m \rangle$ kanonisch $\langle 0, ..., 0 \rangle$–verwoben.

Sei nun $\mathrm{Max}\{i_j\ ;\ 1 \leq j \leq m-1\} = \vartheta > 0$.

Nach den Hilfssätzen 4.3.13 und 4.3.15 kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) $\{\alpha < \kappa\ ; \langle (x_1)_\alpha, ..., (x_m)_\alpha\rangle$ ist (I^-)–verwoben$\} = \kappa$.

(2) Wenn $i_\nu = 0$ ist, dann ist das Paar $\langle x_\nu, x_{\nu+1}\rangle$ isoliert.

Die Idee besteht nun darin, zunächst die κ^{n-3}–Blöcke der Folgen $x_1, ..., x_m$ zu kanonisieren. Da diese (I^-)–verwoben sind, kann man auf diese Blöcke die Induktionsvoraussetzung anwenden. Man erhält dann eine Folge $\langle z_1, ..., z_m\rangle$, die äquivalent zu der ursprünglichen Folge $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ ist und deren κ^{n-3}–Blöcke kanonisch verwoben sind. Daraufhin dünnen wir die Folgen $z_1, ..., z_m$ mit Hilfe von Hilfssatz 4.3.16 so aus, daß Hilfssatz 4.3.17 anwendbar ist.

Sei wieder $\{\nu_1, ..., \nu_{a-1}\}$ eine aufsteigende Aufzählung von N_0^I.
Zunächst wird eine Folge $\langle z_1, ..., z_m\rangle$ von Mengen konstruiert, deren κ^{n-3}–Blöcke kanonisch sind:
Wenn $\mathrm{Block}_x(k) = \langle x_{\nu_k}\rangle$ ist, dann sei $z_{\nu_k} := x_{\nu_k}$.
Wenn $\mathrm{Block}_x(k) = \langle x_{j_1}, ..., x_{j_\ell}\rangle$ ist, dann wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $\langle (x_{j_1})_\alpha, ..., (x_{j_\ell})_\alpha\rangle$ für alle $\alpha < \kappa$ an. Dies ist nach Eigenschaft (1) möglich, da $\langle (x_{j_1})_\alpha, ..., (x_{j_\ell})_\alpha\rangle$ $\langle i_{j_1}-1, ..., i_{j_{\ell-1}}-1\rangle$–verwoben ist für alle $\alpha < \kappa$.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also für alle $\alpha < \kappa$ ein ℓ–Tupel $\langle (z_{j_1})^\alpha, ..., (z_{j_\ell})^\alpha\rangle$ mit $(z_{j_r})^\alpha \approx_{n-1} (x_{j_r})_\alpha$ und $\mathrm{Im}((z_{j_r})^\alpha) \subseteq \mathrm{Im}((x_{j_r})_\alpha)$ für alle r mit $1 \leq r \leq \ell$, so daß $\langle (z_{j_1})^\alpha, ..., (z_{j_\ell})^\alpha\rangle$ kanonisch $\langle i_{j_1}-1, ..., i_{j_{\ell-1}}-1\rangle$–verwoben ist. D.h. wenn wir für alle $\alpha < \kappa$ Folgen z^α durch $z^\alpha := \langle z_1^\alpha, ..., z_m^\alpha\rangle$ definieren, dann ist $\mathrm{Block}_{z^\alpha}(k)$ kanonisch $(\tau_0^I(k)^-)$–verwoben für alle k mit $1 \leq k \leq a_0^{I^-}$.

Wir definieren nun für alle k mit $1 \leq k \leq m$ Folgen z_k durch $(z_k)_\alpha := (z_k)^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Da die κ^{n-3}–Blöcke äquivalent sind, sind auch die Folgen z_k und x_k äquivalent, d.h. $z_k \approx_n x_k$ für alle k. Ebenso folgt $\mathrm{Im}(z_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für alle k. Die Folgen z_k sind jedoch nicht unbedingt kanonisch. Nach Hilfssatz 4.3.17 wollen wir eine Folge $\langle y_1, ..., y_m\rangle$, deren κ^{n-3}–Blöcke kanonisch sind und bei denen sich die Vereinigung der α–ten Blöcke aller y_k nicht mit der Vereinigung der $(\alpha+1)$–ten Blöcke überschneidet.
Dies erreichen wir, indem wir Hilfssatz 4.3.16 auf die Folge $\langle z_1, ..., z_m\rangle$ anwenden. Dadurch erhält man eine Folge $y := \langle y_1, ..., y_m\rangle$, die kanonisch I–verwoben ist: Wie für die Folgen z^α ist $\mathrm{Block}_{y^\alpha}(k)$ kanonisch $(\tau_0^I(k)^-)$–verwoben für alle k mit $1 \leq k \leq a_0^{I^-}$, wobei $y^\alpha = \langle (y_1)_\alpha, ..., (y_m)_\alpha\rangle$ ist.
Nach Konstruktion der Folgen y_k sind außerdem die Paare $\langle \bigsqcup \mathrm{Block}_{y^\alpha}(k), \bigsqcup \mathrm{Block}_{y^\beta}(k)\rangle$ für $\alpha < \beta$ isoliert.
Also ist nach Hilfssatz 4.3.17 für alle k die Folge $\mathrm{Block}_y(k)$ kanonisch $\tau_0^I(k)$–verwoben für $\bigsqcup \mathrm{Block}_y(k) =: v_k$, d.h. $S_{\tau_0^I(k)}(v_k) = \mathrm{Block}_y(k)$.
Nach Eigenschaft (2) und $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$ ist $\langle v_1, ..., v_{a_0^I}\rangle$ isoliert. Ist $a_0^I = m$, so besitzt dieses Tupel also die Länge m. Ist $a_0^I < m$, so können wir das Tupel $\langle v_1, ..., v_{a_0^I}\rangle$ zu einem isolierten m–Tupel ergänzen. Denn B_2 besitzt Ordnungstyp κ_2; nach Korollar 4.2.9 ist daher $v_1{}^\frown ...{}^\frown v_{a_0^I}$ nicht konfinal in B_2, und es können Mengen $v_{a_0^I+1}, ..., v_m \in B_n$ so gewählt werden, daß $\langle v_1, ..., v_m\rangle$ isoliert ist. In beiden Fällen $a_0^I < m$ und $a_0^I = m$ erhalten wir also ein isoliertes m–Tupel $\langle v_1, ..., v_m\rangle$. Wegen $\langle y_1, ..., y_m\rangle = S_{\tau_0^I(1)}(v_1){}^\frown ...{}^\frown S_{\tau_0^I(a_0^I)}(v_{a_0^I})$ ist $\langle y_1, ..., y_m\rangle = T_I(v_1, ..., v_m)$, d.h. $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ ist kanonisch I–verwoben. Nach Hilfssatz 4.3.16 ist außerdem $\mathrm{Im}(y_k) \subseteq \mathrm{Im}(z_k) \subseteq \mathrm{Im}(x_k)$ und $y_k \approx_n z_k \approx_n x_k$, also erfüllt $\langle y_1, ..., y_m\rangle$ alle geforderten Eigenschaften.

$\square$

Satz 4.3.18 zeigt, daß für alle endlichen Folgen I natürlicher Zahlen die auf $[\kappa]^\kappa$ definierte Funktion $f \longmapsto [\![t_I(f)]\!]$ surjektiv auf den I–verwobenen Tupeln von $B_n/\approx_n$ ist. Denn t_I ist surjektiv auf den kanonisch I–verwobenen Tupeln von B_n und nach Hilfssatz 4.3.18 ist jedes I–verwobene Tupel aus B_n äquivalent zu einem kanonisch I–verwobenen Tupel. Es gilt sogar noch mehr: Ist H eine κ–mächtige Teilmenge von κ, dann ist die Einschränkung dieser Funktion auf $[H]^\kappa$ surjektiv auf den I–verwobenen Tupeln von $B_n^H/\approx_n$:

Korollar 4.3.19 Sei H eine κ–mächtige Teilmenge von κ, $I \in \omega^{<\omega}$ eine endliche Folge natürlicher Zahlen und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann ist die Funktion, die jedem $f \in [H]^\kappa$ die Folge $[\![t_I(f)]\!]$ zuordnet, surjektiv auf den I–verwobenen Tupeln von $B_n^H/\approx_n$.

Beweis: Klar nach Definition der Funktion t_I und Hilfssatz 4.3.18.

$\square$

Wir wollen in diesem Zusammenhang noch zwei weitere Funktionen definieren, die Elementen aus $[\kappa]^\kappa$ endliche Tupel aus $B_n/\approx_n$ zuordnen. Sei I eine beliebige Folge natürlicher Zahlen der Länge $m-1$, wobei m eine natürliche Zahl sei. Für ein $f \in [\kappa]^\kappa$ betrachten wir die Folge $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2m}(f)$. Diese Folge besteht aus $2m$ isolierten Blöcken der Länge κ^{n-2}. Bezeichnet $X_{k,f}$ wieder den k–ten Block von $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2m}(f)$ und ist $x_{k,f} := (X_{k,f})^{\maltese}$ für alle k, so definieren wir

$$\begin{aligned} s_I(f) &:= T_I(x_{1,f}, ..., x_{m,f}) \quad \text{und} \\ s_I^*(f) &:= T_I(x_{m+1,f}, ..., x_{2m,f}). \end{aligned}$$

Analog wie bei der Funktion t_I bezeichnen $[\![s_I(f)]\!]$ bzw. $[\![s_I^*(f)]\!]$ die Tupel in $B_n/\approx_n$, die aus $s_I(f)$ bzw. $s_I^*(f)$ durch punktweise Restklassenbildung entstehen.
Ist H wieder eine κ–mächtige Teilmenge von κ und $f \in [H]^\kappa$, dann sind $[\![s_I(f)]\!]$ und $[\![s_I^*(f)]\!]$ ebenso wie $[\![t_I(f)]\!]$ Tupel aus $B_n^H/\approx_n$.

Proposition 4.3.20 Seien $n, m \geq 2$ beliebige natürliche Zahlen, $n, m \geq 2$. Sei außerdem $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ. Ist $\langle x_1, ..., x_{2m}\rangle$ eine isolierte Folge in B_n^H, dann gibt es ein $f \in [H]^\kappa$ mit $s_I(f) = T_I(x_1, ..., x_m)$ und $s_I^*(f) = T_I(x_{m+1}, ..., x_{2m})$ für alle Folgen $I \in (n-1)^{m-1}$.

Beweis: Setze $f := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot 2m}(\Upsilon_H(x_1)^\frown ...^\frown \Upsilon_H(x_{2m})) \in [H]^\kappa$. Nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15, Eigenschaft (3), ist $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2m}(f)^{\maltese} = x_1{}^\frown ...^\frown x_{2m}$. Da die Folge $\langle x_1, ..., x_{2m}\rangle$ nach Voraussetzung isoliert ist, gilt $x_k = x_{k,f}$ für alle k mit $1 \leq k \leq 2m$. Also gilt nach Definition der Funktionen s_I und s_I^*

$$\begin{aligned} s_I(f) &= T_I(x_{1,f}, ..., x_{m,f}) = T_I(x_1, ..., x_m) \quad \text{und} \\ s_I^*(f) &= T_I(x_{m+1,f}, ..., x_{2m,f}) = T_I(x_{m+1}, ..., x_{2m}). \end{aligned}$$

$\square$

Zusammenfassend wollen wir nun einen Überblick über die in diesem Abschnitt eingeführten Funktionen und ihre Eigenschaften geben. Ist $I \in (n-1)^{m-1}$ gegeben, so gibt es die folgenden, von I abhängigen Funktionen:

<table>
<tr><th></th><th>Urbildbereich</th><th>Bildbereich</th><th>Beschreibung</th></tr>
<tr><td>t_I</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n]^m$</td><td>ordnet jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ das kanonisch I–verwobene Tupel einer isolierten Folge der Länge m in B_n zu; ist surjektiv auf den kanonisch I–verwobenen Tupeln aus B_n</td></tr>
<tr><td>s_I</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n]^m$</td><td rowspan="2">ordnen jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ zwei kanonisch I–verwobene Tupel für eine isolierte Folge der Länge $2m$ in B_n zu; dabei gibt es für jede isolierte Folge $\langle y_1, ..., y_{2m}\rangle$ der Länge $2m$ in B_n ein $f \in [\kappa]^\kappa$, so daß s_I und s_I^* diesem f die beiden kanonisch I–verwobenen Tupel für $\langle y_1, ..., y_{2m}\rangle$ zuordnen</td></tr>
<tr><td>s_I^*</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n]^m$</td></tr>
<tr><td>$[\![t_I(.)]\!]$</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n/{\approx_n}]^m$</td><td>ordnet jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ das Restklassentupel von $t_I(f)$ zu; ist surjektiv auf den I–verwobenen Tupeln aus $B_n/{\approx_n}$</td></tr>
<tr><td>$[\![s_I(.)]\!]$</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n/{\approx_n}]^m$</td><td>ordnet jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ das Restklassentupel von $s_I(f)$ zu</td></tr>
<tr><td>$[\![s_I^*(.)]\!]$</td><td>$[\kappa]^\kappa$</td><td>$[B_n/{\approx_n}]^m$</td><td>ordnet jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ das Restklassentupel von $s_I^*(f)$ zu</td></tr>
</table>

4.4 Eigenschaften der Zahlen κ_n

4.4.1 κ_n ist eine Kardinalzahl

Schon in Abschnitt 4.2 haben wir gezeigt, daß die Zahl κ_2 eine Kardinalzahl ist. In diesem Abschnitt werden wir nun zeigen, daß alle Zahlen κ_n Kardinalzahlen sind.
Um zu beweisen, daß κ_2 eine Kardinalzahl ist, hatten wir zunächst mit Hilfe der schwachen Partitionseigenschaft von κ gezeigt, daß κ_2 schwach kompakt ist. Daraus folgte dann, daß es keine Surjektion von einer kleineren Ordinalzahl auf κ_2 gibt. Hier im allgemeinen Fall wird ebenfalls die schwache Partitionseigenschaft ein sehr wichtiges Hilfsmittel sein. Allerdings kann man nicht erwarten, daß alle κ_n schwach kompakt sind[4]. Deshalb werden wir in diesem Fall direkt zeigen, daß κ_n für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ eine Kardinalzahl ist, indem wir eine Teilmenge von $|\kappa_n|$ vom Ordnungstyp κ_n angeben. Haben wir eine solche Teilmenge gefunden, so ist nach der folgenden Proposition gezeigt, daß κ_n eine Kardinalzahl ist:

Proposition 4.4.1 Sei α eine Ordinalzahl.
Wenn $|\alpha|$ eine Teilmenge vom Ordnungstyp α besitzt, so ist α eine Kardinalzahl.

Beweis: Jede Teilmenge von $|\alpha|$ besitzt höchstens Ordnungstyp $|\alpha|$. Also gilt

$$\alpha \leq |\alpha| \leq \alpha,$$

d.h. $\alpha = |\alpha|$. Da $|\alpha|$ eine Kardinalzahl ist, folgt nun die Behauptung.

□

[4] Wir werden später in Satz 4.4.20 sogar zeigen, daß die Zahlen κ_n für $n \geq 3$ nicht einmal regulär sind.

Wie schon im vorherigen Abschnitt bezeichne für alle $f \in [\kappa]^\kappa$ die Folge $X_{1,f}$ den ersten Block von $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(f)$ der Länge κ^{n-2} und $X_{2,f}$ den zweiten Block der Länge κ^{n-2}. Dann sei wieder $x_{1,f} := X_{1,f}^{\maltese}$ und $x_{2,f} := X_{2,f}^{\maltese}$. Ist $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ und $f \in [H]^\kappa$, so gilt $x_{1,f}, x_{2,f} \in B_n^H/{\approx_n}$, wie schon auf Seite 116 in Abschnitt 4.3 begründet wurde.

Satz 4.4.2 κ_n ist eine Kardinalzahl für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

Beweis: Schon in Korollar 4.2.8 wurde gezeigt, daß κ_2 eine Kardinalzahl ist. Daher müssen wir nur noch den Fall $n \geq 3$ betrachten.
Sei $n \geq 3$ beliebig. Ziel ist es, zu zeigen, daß $|\kappa_n|$ eine Teilmenge vom Ordnungstyp κ_n enthält. Dazu betrachten wir eine bijektive Abbildung $b: B_n/{\approx_n} \to |B_n/{\approx_n}|$. Wir werden zeigen, daß b auf einer Teilmenge von $B_n/{\approx_n}$ vom Ordnungstyp κ_n ordnungserhaltend ist. Dies bedeutet, daß $|B_n/{\approx_n}| = |\kappa_n|$ eine Teilmenge vom Ordnungstyp κ_n enthält, und daher folgt mit Proposition 4.4.1, daß κ_n eine Kardinalzahl ist.

Wir definieren zunächst eine Partition $F: [\kappa]^\kappa \to 2^{n-1}$ durch

$$(F(f))(0) = 0 \iff b([\![x_{1,f}]\!]_n) < b([\![x_{2,f}]\!]_n)$$

und

$$(F(f))(i) = 0 \iff b([\![(x_{1,f})^{2,i,1}]\!]_n) < b([\![(x_{1,f})^{2,i,2}]\!]_n) \quad \text{für} \quad 1 \leq i < n-1.$$

Da κ die schwache Partitionseigenschaft hat, besitzt F nach Korollar 3.2.13 eine homogene Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ. Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß b auf der Menge $B_n^H/{\approx_n}$ ordnungserhaltend ist. Da $B_n^H/{\approx_n}$ nach Korollar 4.2.20 Ordnungstyp κ_n besitzt, sind wir dann fertig. Dazu zeigen wir zunächst, auf welchen Wert die Elemente aus H durch F abgebildet werden:

1. BEHAUPTUNG: Jedes $f \in [H]^\kappa$ wird durch F auf die Folge, die konstant Null ist, abgebildet.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein $i \in n-1$, so daß $(F(f))(i) = 1$ ist für alle $f \in [H]^\kappa$.

1. Fall: $(F(f))(0) = 1$ für alle $f \in [H]^\kappa$.
Wir führen dies zu einem Widerspruch, indem wir eine unendliche, absteigende Kette in $|\kappa_n|$ konstruieren.
Wähle dazu ein beliebiges $f \in [H]^\kappa$. Ausgehend von dieser Funktion f konstruieren wir nun abzählbar viele Elemente von $[H]^\kappa$ wie folgt rekursiv:

$$f_0 := f \quad \text{ und } \quad f_{k+1} := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}}(\Upsilon_H(x_{2,f_k})) \;\; \text{für } k \geq 0.$$

Nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15 ist $f_k \in [H]^\kappa$ für alle $k \in \omega$.
Nach Korollar 3.2.18 gilt für alle $\eta < \kappa^{n-2}$ und $g \in [\kappa]^\kappa$

$$(\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(g))(\eta) = (\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(g))(\eta) \ \mathcal{C}\text{–fast überall.}$$

Also folgt aus dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15

$$\begin{aligned}[\![x_{2,f_k}]\!]_n &= [\![\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f_{k+1})^{\maltese}]\!]_n \\ &= [\![\langle(\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(f_{k+1}))(\nu);\ \nu < \kappa^{n-2}\rangle^{\maltese}]\!]_n = [\![x_{1,f_{k+1}}]\!]_n \quad \text{für alle } k \in \omega.\end{aligned}$$

Wegen $F(f_k)(0) = 1$ für alle $k \in \omega$ gilt außerdem

$$b([\![x_{1,f_k}]\!]_n) > b([\![x_{2,f_k}]\!]_n) \qquad \text{für alle } k \in \omega.$$

Daher folgt insgesamt

$$\begin{aligned} b(\llbracket x_{1,f_k}\rrbracket_n) &> b(\llbracket x_{2,f_k}\rrbracket_n) \\ &= b(\llbracket x_{1,f_{k+1}}\rrbracket_n) \quad \text{für alle } k \in \omega. \end{aligned}$$

Also ist $\langle b(\llbracket x_{1,f_k}\rrbracket_n) \ ; \ k \in \omega\rangle$ eine absteigende Folge in $|\kappa_n|$, im Widerspruch dazu, daß $|\kappa_n|$ eine Ordinalzahl ist.

2. Fall: $(F(f))(i) = 1$ für ein $i > 1$ und für alle $f \in [H]^\kappa$.
Wieder wird eine unendliche, absteigende Kette in $|\kappa_n|$ konstruiert:
Wähle wieder ein beliebiges $f \in [H]^\kappa$. Definiere abzählbar viele Funktionen $f_k \in [H]^\kappa$ folgendermaßen:

$$f_0 := f \qquad \text{und} \qquad f_{k+1} := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n-2}}(\Upsilon_H((x_{1,f_k})^{2,i,2})) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15 ist $f_k \in [H]^\kappa$ für alle $k \in \omega$.
Außerdem gilt nach Korollar 3.2.18 und nach dem Misch– und Sortierlemma

$$\begin{aligned} \llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,2}\rrbracket_n &= \llbracket \mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}}(f_{k+1})^{\maltese}\rrbracket_n = \llbracket \langle (\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(f_{k+1}))(\nu);\ \nu < \kappa^{n-2}\rangle^{\maltese}\rrbracket_n \\ &= \llbracket x_{1,f_{k+1}}\rrbracket_n \quad \text{für alle } k \in \omega. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.9 ist $\llbracket x_{1,f_{k+1}}\rrbracket_n = \llbracket (x_{1,f_{k+1}})^{2,i,1}\rrbracket_n$, also für alle $k \in \omega$:

$$\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,2}\rrbracket_n = \llbracket (x_{1,f_{k+1}})^{2,i,1}\rrbracket_n.$$

Wegen $F(f_k)(i) = 1$ für alle $k \in \omega$ gilt außerdem

$$b(\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,1}\rrbracket_n) > b(\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,2}\rrbracket_n) \quad \text{für alle } k \in \omega.$$

Daher folgt insgesamt

$$\begin{aligned} b(\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,1}\rrbracket_n) &> b(\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,2}\rrbracket_n) \\ &= b(\llbracket (x_{1,f_{k+1}})^{2,i,1}\rrbracket_n) \quad \text{für alle } k \in \omega. \end{aligned}$$

Also ist $\langle b(\llbracket (x_{1,f_k})^{2,i,1}\rrbracket_n) \ ; \ k \in \omega\rangle$ eine absteigende Folge in $|\kappa_n|$, was unmöglich ist.

Somit ist die 1. Behauptung bewiesen.

Jetzt folgt leicht, daß b auf $B_n^H/{\approx_n}$ ordnungserhaltend ist:

2. BEHAUPTUNG: b ist auf $B_n^H/{\approx_n}$ ordnungserhaltend.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Seien $y, z \in B_n^H$ mit $\llbracket y\rrbracket_n \prec_n \llbracket z\rrbracket_n$ gegeben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\langle y, z\rangle$ ist 0–verwoben.
Nach Korollar 4.3.19 gibt es dann ein $f \in [H]^\kappa$, so daß $y \approx_n x_{1,f}$ und $z \approx_n x_{2,f}$ gilt.
Nach der 1. Behauptung gilt dann

$$\begin{aligned} b(\llbracket y\rrbracket_n) &= b(\llbracket x_{1,f}\rrbracket_n) \\ &< b(\llbracket x_{2,f}\rrbracket_n) = b(\llbracket z\rrbracket_n). \end{aligned}$$

2. Fall: $\langle y, z\rangle$ ist i–verwoben für ein $i > 0$.
Nach Korollar 4.3.19 gibt es ein $f \in [H]^\kappa$, so daß $(x_{1,f})^{2,i,1} \approx_n y$ und $(x_{1,f})^{2,i,2} \approx_n z$ ist.
Nach der 1. Behauptung gilt dann

$$\begin{aligned} b(\llbracket y\rrbracket_n) &= b(\llbracket (x_{1,f})^{2,i,1}\rrbracket_n) \\ &< b(\llbracket (x_{1,f})^{2,i,2}\rrbracket_n) = b(\llbracket z\rrbracket_n). \end{aligned}$$

Aus den beiden Fällen folgt, daß b auf $B_n^H/{\approx_n}$ die Ordnung erhält. Nach Korollar 4.2.20 hat $B_n^H/{\approx_n}$ Ordnungstyp κ_n.
Das bedeutet, daß $|\kappa_n|$ eine Teilmenge vom Ordnungstyp κ_n besitzt. Nach Proposition 4.4.1 ist κ_n somit eine Kardinalzahl.

$\square$

4.4.2 Striktes Aufsteigen der Zahlen κ_n

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $\langle \kappa_n;\ n \geq 1\rangle$ eine strikt aufsteigende Folge von Ordinalzahlen ist. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ muß dafür eine Einbettung von κ_n in ein echtes Anfangssegment von κ_{n+1} gefunden werden. Wir werden das dazu äquivalente Problem lösen, die Struktur $A_n/{\sim_n}$ in ein echtes Anfangssegment von $A_{n+1}/{\sim_{n+1}}$ einzubetten. Hierfür definieren wir eine zweistellige Funktion $\boxplus_n$, die Elemente aus $A_n/{\sim_n}$ und $A_{n+1}/{\sim_{n+1}}$ miteinander verknüpft. Sie entsteht durch kanonische Übertragung einer auf $A_n \times A_{n+1}$ definierten Funktion $+_n$ auf die Restklassen. Zunächst definieren wir daher die Funktionen $+_n$. Diese können als iterierte Ordinalzahladditionen aufgefaßt werden. Wir beginnen mit $+_1$:

Definition 4.4.3 Wir definieren eine Addition $+_1 : A_2 \times \kappa \to A_2$ durch

$$f +_1 \alpha = g \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} g \in [\kappa]^\kappa \text{ ist die Aufzählung der Menge} \\ M_{f,\alpha} := \{f(\beta) + \alpha;\ \beta < \kappa\}. \end{array}$$

Es ist nicht von vornherein klar, daß es eine solche Funktion g immer gibt, denn die Menge $M_{f,\alpha}$ könnte theoretisch kleinere Mächtigkeit als κ besitzen. Die folgende Proposition zeigt, daß dies nie der Fall ist.

Proposition 4.4.4 Die Funktion $+_1$ ist definiert.

Beweis:
Wir müssen zeigen, daß es für alle $f \in [\kappa]^\kappa, \alpha < \kappa$ eine Funktion $g \in [\kappa]^\kappa$ gibt, die die Menge $M_{f,\alpha}$ aufzählt.
Dazu zeigen wir, daß die durch $h(\beta) := f(\beta) + \alpha$ definierte Funktion h nicht $\mathcal{C}$–fast überall konstant ist.
Angenommen, es gäbe ein γ mit $h(\beta) = \gamma$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Da jedoch f streng aufsteigend ist, ist $f(\beta) > \gamma$ $\mathcal{C}$–fast überall und somit auch $h(\beta) = f(\beta) + \alpha > \gamma$ $\mathcal{C}$–fast überall, im Widerspruch zur Definition von γ.
Aus Hilfssatz 3.2.4 folgt, daß $|M_{f,\alpha}| = |\mathrm{Im}(h)| = \kappa$ ist. Also gibt es eine Funktion $g \in [\kappa]^\kappa$, die $M_{f,\alpha}$ aufzählt, und somit ist $+_1$ definiert.

$\square$

Die folgende Proposition ist eine Konsequenz aus der Normalität von $\mathcal{C}$.

Proposition 4.4.5 Sei $f \in [\kappa]^\kappa, \alpha < \kappa$ und $g := f +_1 \alpha$. Dann ist $\{\beta < \kappa;\ g(\beta) = f(\beta) + \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Beweis:
Wir definieren eine Funktion $w : \kappa \to \kappa$ durch

$$w(\beta) = \gamma \iff g(\gamma) = f(\beta) + \alpha.$$

Nach Definition von g ist $w(\beta) \leq \beta$. Angenommen $w(\beta) < \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Da $\mathcal{C}$ normal ist, gibt es dann nach Hilfssatz 2.1.24 ein γ_0 mit $w(\beta) = \gamma_0$ für $\mathcal{C}$–fast alle β. Also gilt $g(\gamma_0) = f(\beta) + \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle β.

Dies ist jedoch unmöglich, da f strikt aufsteigend ist. Also ist $w(\beta) = \beta$ für $\mathcal{C}$–fast alle β, d.h. $g(\beta) = f(\beta) + \alpha$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$.

□

Daraus ergeben sich zwei weitere Eigenschaften der Funktion $+_1$:

Proposition 4.4.6 Seien $f_1, f_2 \in [\kappa]^\kappa$ und $\alpha_1 < \alpha_2$ gegeben.

(1) Ist $f_1 < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall, so ist auch $f_1 +_1 \alpha_1 < f_2 +_1 \alpha_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.

(2) Ist $f_1 = f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall, so ist $f_1 +_1 \alpha_1 \leq f_2 +_1 \alpha_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.

Beweis: Wir setzen $g_1 := f_1 +_1 \alpha_1$ und $g_2 := f_2 +_1 \alpha_2$.

(1) Für alle $\beta < \kappa$ mit $f_1(\beta) < f_2(\beta)$ gilt: $f_1(\beta) + \alpha_1 < f_2(\beta) + \alpha_2$. Sei $C_1 := \{\beta < \kappa;\ f_1(\beta) < f_2(\beta)\} \in \mathcal{C}$, $C_2 := \{\beta < \kappa;\ g_1(\beta) = f_1(\beta) + \alpha_1\}$ und $C_3 := \{\beta < \kappa;\ g_2(\beta) = f_2(\beta) + \alpha_2\}$. Nach Proposition 4.4.5 gilt $C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. Also gilt $g_1(\beta) = f_1(\beta) + \alpha_1 < f_2(\beta) + \alpha_2 = g_2(\beta)$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \in \mathcal{C}$, und somit $g_1 < g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.

(2) Dies folgt ganz analog wie Eigenschaft (1): Für alle $\beta < \kappa$ mit $f_1(\beta) = f_2(\beta)$ gilt: $f_1(\beta) + \alpha_1 \leq f_2(\beta) + \alpha_2$. Sei $C_1 := \{\beta < \kappa;\ f_1(\beta) = f_2(\beta)\} \in \mathcal{C}$, $C_2 := \{\beta < \kappa;\ g_1(\beta) = f_1(\beta) + \alpha_1\}$ und $C_3 := \{\beta < \kappa;\ g_2(\beta) = f_2(\beta) + \alpha_2\}$. Nach Proposition 4.4.5 gilt $C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. Also gilt $g_1(\beta) = f_1(\beta) + \alpha_1 \leq f_2(\beta) + \alpha_2 = g_2(\beta)$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \in \mathcal{C}$, und somit $g_1 \leq g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.

□

Um im folgenden nicht zwischen den Fällen $n = 1$ und $n > 1$ unterscheiden zu müssen, führen wir eine Bezeichnung ein, die die Notation erheblich vereinfacht: Für $u \in [\kappa]^\kappa$ sei $u_\alpha := u(\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$.

Definition 4.4.7 Wir definieren für alle $n \geq 1$ rekursiv eine Addition

$$+_{n+1} : A_{n+2} \times A_{n+1} \to A_{n+2}$$

folgendermaßen:
Für $X \in A_{n+2}$ und $U \in A_{n+1}$ sei $X +_{n+1} U = Y$ genau dann, wenn $X_\alpha +_n U_\alpha = Y_\alpha$ gilt für alle $\alpha < \kappa$.

Um zu zeigen, daß die Funktionen $+_n$ definiert sind, wird folgender Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz 4.4.8 Seien $f_1, f_2 \in [\kappa]^\kappa$, so daß eine Menge $M \subseteq [\kappa]^\kappa$ mit $|M| \geq \kappa$ existiert, wobei M keine zwei Elemente enthält, die $\mathcal{C}$–fast überall gleich sind. Außerdem gelte $f_1 < g < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $g \in M$.
Dann gilt $f_1 +_1 \eta < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\eta < \kappa$.

Beweis:
Angenommen, es gäbe ein $\eta < \kappa$, so daß $f_1 +_1 \eta \geq f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall ist.
Sei $g \in M$ beliebig. Nun definieren wir eine Funktion $w : \kappa \to \kappa$ durch

$$w(\beta) = \gamma \iff f_1(\beta) + \gamma = g(\beta).$$

Dann gilt $w(\beta) < \eta$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta \in \kappa$: Sonst ist $f_2(\beta) \leq f_1(\beta) + \eta \leq g(\beta)$ für $\mathcal{C}$–fast alle β, was nach Voraussetzung nicht möglich ist.

Nach Hilfssatz 3.2.4 gibt es dann ein $\gamma < \eta$, so daß $w(\beta) = \gamma$ ist für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$. Also ist $g = f_1 +_1 \gamma$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Somit ist gezeigt, daß es für jedes $g \in M$ ein $\gamma < \eta$ gibt mit $g = f_1 +_1 \gamma$ $\mathcal{C}$–fast überall. Da M jedoch keine zwei Elemente enthält, die $\mathcal{C}$–fast überall gleich sind, kann M höchstens Ordnungstyp η besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also gilt doch $f_1 +_1 \eta < f_2$ für alle $\eta < \kappa$.

□

Korollar 4.4.9 Seien $f_1, f_2 \in [\kappa]^\kappa$, so daß eine Menge $M \subseteq [\kappa]^\kappa$ mit $|M| \geq \kappa$ existiert, wobei M keine zwei Elemente enthalte, die $\mathcal{C}$–fast überall gleich sind. Außerdem gelte $f_1 < g < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $g \in M$.
Dann gilt $f_1 +_1 \eta < f_2 +_1 \delta$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $\eta, \delta < \kappa$.

Beweis: Für alle $\delta < \kappa$ gilt nach Hilfssatz 4.4.8 $f_1 +_1 \eta < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall, d.h. $C_1 := \{\beta < \kappa;\ (f_1 +_1 \eta)(\beta) < f_2(\beta)\} \in \mathcal{C}$. Nach Proposition 4.4.6 ist außerdem $C_2 := \{\beta < \kappa;\ f_2(\beta) \leq (f_2 +_1 \delta)(\beta)\} \in \mathcal{C}$. Also ist $C_1 \cap C_2 \subseteq \{\beta < \kappa;\ (f_1 +_1 \eta)(\beta) < (f_2 +_1 \delta)(\beta)\} \in \mathcal{C}$. Somit gilt $f_1 +_1 \eta < f_2 +_1 \delta$ $\mathcal{C}$–fast überall.

□

Nun können wir die Definiertheit von $+_n$ zeigen:

Lemma 4.4.10 Für alle $n \geq 1$ ist $+_n$ eine definierte Funktion.

Beweis:
Wir zeigen durch Induktion nach n die folgenden Eigenschaften:

(1) $+_n$ ist definiert.

(2) Für alle $X \in A_{n+1}, U \in A_n$ und $g \in \mathrm{Im}(X +_n U)$ gibt es ein $f \in \mathrm{Im}(X)$ und ein $\eta < \kappa$, so daß $g = f +_1 \eta$ ist.

(3) Für $X_1, X_2 \in A_{n+1}, U_1, U_2 \in A_n$ und $f_1 < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $f_1 \in \mathrm{Im}(X_1), f_2 \in \mathrm{Im}(X_2)$ gilt $g_1 < g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $g_1 \in \mathrm{Im}(X_1 +_n U_1)$ und $g_2 \in \mathrm{Im}(X_2 +_n U_2)$.

Eigenschaft (3) wird benötigt, um in der nächsten Stufe zu zeigen, daß $+_{n+1}$ definiert ist, mit Eigenschaft (2) wird Eigenschaft (3) bewiesen.

Für $n = 1$ wurden alle drei Eigenschaften in Proposition 4.4.4 und Proposition 4.4.6 gezeigt.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung für alle $k < n$ gezeigt. Seien außerdem $X \in A_{n+1}$ und $U \in A_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung ist $X_\alpha +_{n-1} U_\alpha =: Y^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ definiert. $X +_n U$ ist definiert, wenn es ein $Y \in A_{n+1}$ gibt, so daß für alle $\alpha < \kappa$ die Folge Y^α gerade der α–te Block Y_α der Länge κ^{n-2} ist. Nach Eigenschaft (3) der Induktionsvoraussetzung erfüllt die Folge $Y := Y^0 {}^\frown Y^1 {}^\frown ... {}^\frown Y^\alpha {}^\frown ...$ diese Eigenschaft. Also gilt Eigenschaft (1).

Nun zu Eigenschaft (2): Sei $X \in A_{n+1},\ U \in A_n,\ Y := X +_n U$ und $g \in \mathrm{Im}(Y)$. Dann gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $g \in \mathrm{Im}(Y_\alpha)$. Nach Definition von $+_n$ gilt $Y_\alpha = X_\alpha +_{n-1} U_\alpha$. Es gibt also nach Induktionsvoraussetzung ein $f \in \mathrm{Im}(X_\alpha)$ und ein $\eta < \kappa$ mit $g = f +_1 \eta$. Da $\mathrm{Im}(X_\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(X)$ gilt, folgt die Behauptung.

Wir zeigen nun noch Eigenschaft (3): Seien $X_1, X_2 \in A_{n+1}, U_1, U_2 \in A_n$ und $f_1 < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $f_1 \in \mathrm{Im}(X_1)$ und $f_2 \in \mathrm{Im}(X_2)$. Seien $g_1 \in \mathrm{Im}(Y_1)$ und $g_2 \in \mathrm{Im}(Y_2)$. Nach Eigenschaft (2) gibt es ein $f_1 \in \mathrm{Im}(X_1)$ und ein $\eta_1 < \kappa$ mit $g_1 = f_1 +_1 \eta_1$. Ebenso gibt es ein $f_2 \in \mathrm{Im}(X_2)$ und ein $\eta_2 < \kappa$ mit $g_2 = f_2 +_1 \eta_2$. Sei nun $M := \{g \in \mathrm{Im}(Y_1); g >$

f_1 $\mathcal{C}$–fast überall$\}$. M hat Ordnungstyp κ und enthält keine zwei Elemente, die $\mathcal{C}$–fast überall gleich sind. Außerdem gilt $f_1 < g < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall für alle $g \in M$. Nach Korollar 4.4.9 ist somit $g_1 = f_1 +_1 \eta_1 < f_2 +_1 \eta_2 = g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall, was zu zeigen war.

$\square$

In natürlicher Weise übertragen wir jetzt die Addition $+_n$ auf die Restklassen. Man beachte dabei, daß $A_1 = \kappa$ ist, und daß die Äquivalenzrelation $\sim_1$ auf A_1 durch

$$\beta_1 \sim_1 \beta_2 \iff \beta_1 = \beta_2$$

definiert ist.

Definition 4.4.11 Für alle $n \geq 1$ sei $\boxplus_n : A_{n+1}/\!\sim_{n+1} \times A_n/\!\sim_n \to A_{n+1}/\!\sim_{n+1}$ definiert durch

$$[\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U]\!]_n := [\![X +_n U]\!]_{n+1} \quad \text{für alle } X \in A_{n+1} \text{ und } U \in A_n.$$

Lemma 4.4.12 Für alle $n \geq 1$ ist $\boxplus_n$ wohldefiniert.

Beweis: Die Behauptung wird durch Induktion nach n gezeigt:
Sei zunächst $n = 1$. Seien $f_1, f_2 \in [\kappa]^\kappa$, $f_1 \sim_2 f_2$ und $\eta \in \kappa$. Setze $g_1 := f_1 +_1 \eta$ und $g_2 := f_2 +_1 \eta$. Es gibt ein $C_1 \in \mathcal{C}$ mit $f_1(\beta) = f_2(\beta)$ für alle $\beta \in C$. Also gilt auch $f_1(\beta) + \eta = f_2(\beta) + \eta$ für alle $\beta \in C$. Seien $C_2 := \{\beta < \kappa;\ g_1(\beta) = f_1(\beta) + \eta\}$ und $C_3 := \{\beta < \kappa;\ g_2(\beta) = f_2(\beta) + \eta\}$. Nach Proposition 4.4.5 gilt $C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. Also ist $g_1(\beta) = f_1(\beta) + \eta = f_2(\beta) + \eta = g_2(\beta)$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \in \mathcal{C}$, und somit $g_1 \sim_2 g_2$. Also ist $\boxplus_1$ wohldefiniert.

Wir betrachten jetzt den Fall $n > 1$. Sei für $k < n$ schon gezeigt, daß $\boxplus_k$ wohldefiniert ist.
Seien $X_1, X_2 \in A_{n+1}$ mit $X_1 \sim_{n+1} X_2$ und $U_1, U_2 \in A_n$ mit $U_1 \sim_n U_2$ gegeben. Sei $C_1 := \{\alpha < \kappa;\ (X_1)_\alpha \sim_n (X_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}$ und $C_2 := \{\alpha < \kappa;\ (U_1)_\alpha \sim_{n-1} (U_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}$.
Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung für alle $\alpha \in C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$:

$$(X_1)_\alpha +_{n-1} (U_1)_\alpha \sim_n (X_2)_\alpha +_{n-1} (U_2)_\alpha.$$

Also $X_1 +_n U_1 \sim_{n+1} X_2 +_n U_2$. Somit ist auch $\boxplus_n$ wohldefiniert.

$\square$

Mit Hilfe der Funktion $\boxplus_n$ kann eine Einbettung von $A_n/\!\sim_n$ in $A_{n+1}/\!\sim_{n+1}$ definiert werden. Wählen wir ein beliebiges $X \in A_{n+1}$, so wird sich zeigen, daß die Abbildung $[\![U]\!]_n \longmapsto [\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U]\!]_n$ eine solche ordnungserhaltende, beschränkte Einbettung ist. Um die Beschränktheit zu zeigen, führen wir eine weitere Funktion duplex_n auf A_n ein.

Definition 4.4.13 Wir definieren für alle $n \geq 1$ Funktionen duplex_n rekursiv:
Für $n = 1$ sei $\mathrm{duplex}_1 : \kappa \to \kappa$ definiert durch

$$\mathrm{duplex}_1(\alpha) := \alpha \cdot 2.$$

Für $n > 1$ sei $\mathrm{duplex}_n : A_n \to A_n$ definiert durch

$$\mathrm{duplex}_n(X) = Y \iff \mathrm{duplex}_{n-1}(X_\alpha) = Y_\alpha \quad \text{für alle } \alpha < \kappa \text{ und } X \in A_n.$$

Es ist nicht offensichtlich, daß die Funktionen duplex_n definiert sind, d.h. daß es für jedes $X \in A_n$ ein $Y \in A_n$ gibt, so daß für alle $\alpha < \kappa$ der α–te κ^{n-3}–Block von X gerade auf den α–ten κ^{n-3}–Block von Y abgebildet wird. Es muß also gezeigt werden. daß die Bilder zweier isolierter Elemente bezüglich duplex_n wieder isoliert sind.

Lemma 4.4.14 Für alle $n \geq 1$ ist duplex_n eine definierte Funktion.

Beweis:
Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
Wir beweisen nun durch Induktion nach n für alle $n \geq 2$:

(1) duplex_n ist definiert.

(2) Wenn $X \in A_n$ und $g \in \text{Im}(\text{duplex}_n(X))$ gilt, dann gibt es ein $f \in \text{Im}(X)$ mit $g = \text{duplex}_2(f)$.

Sei $n = 2$ und $f \in A_2$. Dann ist $\text{duplex}_2(f) = g \iff g(\beta) = f(\beta) \cdot 2$ für alle $\beta < \kappa$. Die so definierte Funktion ist streng monoton, da für $\eta_1 < \eta_2$ auch $\eta_1 \cdot 2 < \eta_2 \cdot 2$ gilt. Also ist auch $g \in A_2$, und somit ist duplex_2 definiert. Eigenschaft (2) gilt trivialerweise.

Sei jetzt $n > 2$ und schon gezeigt, daß die Behauptung für $k < n$ wahr ist.
Sei $X \in A_n$ und setze $\text{duplex}_{n-1}(X_\alpha) := Y^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Es muß gezeigt werden, daß es ein $Y \in A_n$ gibt, so daß Y^α für alle $\alpha < \kappa$ der α–te Block von Y der Länge κ^{n-3} ist, also $Y_\alpha = Y^\alpha$. Dazu zeigen wir, daß für alle $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ gilt: Wenn $g_1 \in \text{Im}(Y^{\alpha_1})$ und $g_2 \in \text{Im}(Y^{\alpha_2})$ ist, dann gilt $g_1 < g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Sei also $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ und $g_1 \in \text{Im}(Y^{\alpha_1}), g_2 \in \text{Im}(Y^{\alpha_2})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $f_1 \in X_{\alpha_1}$ mit $g_1 = \text{duplex}_2(f_1)$ und ein $f_2 \in X_{\alpha_2}$ mit $g_2 = \text{duplex}_2(f_2)$. D.h. es gilt $g_1(\beta) = f_1(\beta) \cdot 2$ für alle $\beta < \kappa$ und $g_2(\beta) = f_2(\beta) \cdot 2$ für alle $\beta < \kappa$. Da jedoch $f_1 \in \text{Im}(X_{\alpha_1})$ und $f_2 \in \text{Im}(X_{\alpha_2})$ ist, gilt $f_1 < f_2$ $\mathcal{C}$–fast überall, also auch $g_1(\beta) = f_1(\beta) \cdot 2 < f_2(\beta) \cdot 2 = g_2(\beta)$ für $\mathcal{C}$–fast alle $\beta < \kappa$, und somit $g_1 < g_2$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Also ist gezeigt, daß für die Folge $Y := Y^0 {}^\frown Y^1 {}^\frown ... {}^\frown Y^\alpha {}^\frown ...$ gilt: $Y_\alpha = Y^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Also ist duplex_n definiert.

Nun muß nur noch Eigenschaft (2) gezeigt werden: Sei $X \in A_n$, $\text{duplex}_n(X) = Y$ und $g \in \text{Im}(Y)$. Dann gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $g \in \text{Im}(Y_\alpha)$. Wegen $\text{duplex}_{n-1}(X_\alpha) = Y_\alpha$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $f \in \text{Im}(X_\alpha)$ mit $\text{duplex}_2(f) = g$. Da $\text{Im}(X_\alpha) \subseteq \text{Im}(X)$ ist, folgt die Behauptung.

□

Wieder übertragen wir die Funktionen duplex_n auf die Restklassen:

Definition 4.4.15
Wir definieren für alle $n \geq 1$ eine Funktion $\mathbf{duplex}_n : A_n/{\sim_n} \to A_n/{\sim_n}$ durch

$$\mathbf{duplex}_n([\![X]\!]_n) := [\![\text{duplex}_n(X)]\!]_n \quad \text{für alle } X \in A_n.$$

Lemma 4.4.16 Für alle $n \geq 1$ ist die Funktion $\mathbf{duplex}_n$ wohldefiniert.

Beweis:
Wieder wird die Behauptung durch Induktion nach n bewiesen:
Die Funktion $\mathbf{duplex}_1$ ist wohldefiniert, da $[\![\alpha]\!]_1$ für alle $\alpha < \kappa$ nur ein Element enthält.
Sei nun $n > 1$ und schon gezeigt, daß $\mathbf{duplex}_{n-1}$ wohldefiniert ist. Seien weiter $X_1, X_2 \in A_n$ mit $X_1 \sim_n X_2$ gegeben, $\text{duplex}_n(X_1) =: Y_1$, und $\text{duplex}_n(X_2) =: Y_2$. Dann ist

$$\{\alpha < \kappa;\ (X_1)_\alpha \sim_{n-1} (X_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit $\{\alpha < \kappa;\ (Y_1)_\alpha = \text{duplex}_{n-1}((X_1)_\alpha) \sim_{n-1} \text{duplex}_{n-1}((X_2)_\alpha) = (Y_2)_\alpha\} \in \mathcal{C}$, also $Y_1 \sim_n Y_2$. Somit ist auch $\mathbf{duplex}_n$ wohldefiniert.

□

Wir definieren, wie oben schon erwähnt, für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jedes $X \in A_{n+1}$ eine Einbettung $\Phi_X : A_n/{\sim_n} \to A_{n+1}/{\sim_{n+1}}$ durch $\Phi_X([\![U]\!]_n) := [\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U]\!]_n$. Das folgende Lemma zeigt, daß das Bild der Abbildung Φ_X für alle $X \in A_{n+1}$ beschränkt in $A_{n+1}/{\sim_{n+1}}$ ist.

Lemma 4.4.17 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.
Für jedes $X \in A_{n+1}$ gilt $\Phi_X([\![U]\!]) <_{n+1} \mathbf{duplex}_{n+1}([\![X]\!]_{n+1})$ für alle $U \in A_n$.

Beweis:
Dies folgt durch Induktion nach n :
Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Sei $f \in A_2$ und $\eta < \kappa$.
Dann ist $C_1 := \{\beta < \kappa;\ f(\beta) > \eta\} \in \mathcal{C}$. Somit gilt $f(\beta)+\eta < f(\beta)\cdot 2 = (\text{duplex}_2(f))(\beta)$ für alle $\beta \in C_1$.
Nach Proposition 4.4.5 gilt $C_2 := \{\beta < \kappa;\ (f +_1 \eta)(\beta) = f(\beta) + \eta\} \in \mathcal{C}$. Also folgt $(f +_1 \eta)(\beta) = f(\beta)+\eta < (\text{duplex}_2(f))(\beta)$ für alle $\beta \in C_1 \cap C_2$, d.h. $f +_1 \eta < \text{duplex}_2(f)$ $\mathcal{C}$–fast überall.
Somit gilt $\Phi_f([\![\eta]\!]_1) = [\![f]\!]_2 \boxplus_1 [\![\eta]\!]_1 = [\![f +_1 \eta]\!]_2 <_2 [\![\text{duplex}_2(f)]\!]_2 = \mathbf{duplex}_2([\![f]\!]_2)$.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung schon für $n-1$ gezeigt.
Sei $X \in A_{n+1}$ und $U \in A_n$. Wir setzen $Y := X +_n U$ und $Z := \text{duplex}_{n+1}(X)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{array}{rcl} [\![Y_\alpha]\!]_n & = & [\![X_\alpha +_{n-1} U_\alpha]\!]_n = [\![X_\alpha]\!]_n \boxplus_{n-1} [\![U_\alpha]\!]_{n-1} = \Phi_{X_\alpha}([\![U_\alpha]\!]_{n-1}) \\ & <_n & \mathbf{duplex}_n([\![X_\alpha]\!]_n) = [\![\text{duplex}_n(X_\alpha)]\!]_n = [\![Z_\alpha]\!]_n \end{array}$$

für alle $\alpha < \kappa$. Also gilt

$$\begin{array}{rcl} \Phi_X([\![U]\!]_n) & = & [\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U]\!]_n \\ & = & [\![X +_n U]\!]_{n+1} = [\![Y]\!]_{n+1} \\ & <_{n+1} & [\![Z]\!]_{n+1} = [\![\text{duplex}_{n+1}(X)]\!]_{n+1} = \mathbf{duplex}_{n+1}([\![X]\!]_{n+1}). \end{array}$$

Somit ist die Behauptung auch für $n > 1$ bewiesen.

□

Die Funktionen Φ_X sind außerdem ordnungserhaltend:

Lemma 4.4.18 Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.
Für alle $X \in A_{n+1}$ ist die Abbildung Φ_X ordnungserhaltend.

Beweis:
Wir beweisen diese Behauptung wieder durch Induktion nach n :
Sei zunächst $n = 1$ und $f \in A_2$. Seien $\eta_1, \eta_2 < \kappa$ mit $\eta_1 < \eta_2$ gegeben. Es gilt $f(\beta)+\eta_1 < f(\beta)+\eta_2$ für alle $\beta < \kappa$. Also folgt mit Proposition 4.4.5 $f +_1 \eta < f +_1 \eta_2$ $\mathcal{C}$–fast überall. Somit gilt

$$\begin{array}{rcl} \Phi_f([\![\eta_1]\!]_1) & = & [\![f]\!]_2 \boxplus_1 [\![\eta_1]\!]_1 = [\![f +_1 \eta_1]\!]_2 \\ & <_2 & [\![f +_1 \eta_2]\!]_2 = [\![f]\!]_2 \boxplus_1 [\![\eta_2]\!]_1 \\ & = & \Phi_f([\![\eta_2]\!]_1). \end{array}$$

Also ist Φ_f ordnungserhaltend.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung sei für $n-1$ schon gezeigt.
Wähle ein beliebiges $X \in A_{n+1}$ und seien $U_1, U_2 \in A_n$ mit $[\![U_1]\!]_n <_n [\![U_2]\!]_n$. Setze $X +_n U_1 =: Y_1$ und $X +_n U_2 =: Y_2$.

Dann gilt $\{\alpha < \kappa;\ [\![(U_1)_\alpha]\!]_{n-1} <_{n-1} [\![(U_2)_\alpha]\!]_{n-1}\} \in \mathcal{C}$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt deshalb

$$\begin{aligned}\{\alpha < \kappa; \quad & [\![(Y_1)_\alpha]\!]_n = [\![X_\alpha +_{n-1} (U_1)_\alpha]\!]_n = [\![X_\alpha]\!]_n \boxplus_{n-1} [\![(U_1)_\alpha]\!]_{n-1} \\ & <_n [\![X_\alpha]\!]_n \boxplus_{n-1} [\![(U_2)_\alpha]\!]_{n-1} = [\![X_\alpha +_{n-1} (U_2)_\alpha]\!]_n = [\![(Y_2)_\alpha]\!]_n\} \in \mathcal{C},\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\Phi_X([\![U_1]\!]_n) \quad & = \quad [\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U_1]\!]_n = [\![X +_n U_1]\!]_{n+1} = [\![Y_1]\!]_{n+1} \\ & <_{n+1} \quad [\![Y_2]\!]_{n+1} = [\![X +_n U_2]\!]_{n+1} = [\![X]\!]_{n+1} \boxplus_n [\![U_2]\!]_n = \Phi_X([\![U_2]\!]_n).\end{aligned}$$

Also ist Φ_X ordnungserhaltend. Somit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

□

Wir haben nun also ordnungserhaltende, beschränkte Funktionen von $A_n/\sim_n$ in $A_{n+1}/\sim_{n+1}$ gefunden. Unser Ziel für diesen Abschnitt ist somit erreicht:

Satz 4.4.19 Für alle $n \geq 1$ ist $\kappa_n < \kappa_{n+1}$.

Beweis: Sei $n \geq 1$ beliebig. Da $\langle \kappa_n, < \rangle$ und $\langle A_n/\sim_n, <_n \rangle$ isomorph sind, reicht es, eine Einbettung von $A_n/\sim_n$ in ein echtes Anfangssegment von $A_{n+1}/\sim_{n+1}$ anzugeben. Wählen wir ein beliebiges $X \in A_{n+1}$ fest, so ist die Funktion Φ_X eine Einbettung mit den gewünschten Eigenschaften: Φ_X ist nach Lemma 4.4.18 ordnungserhaltend. Nach Lemma 4.4.17 ist das Bild von Φ_X beschränkt in $A_{n+1}/\sim_{n+1}$. Also ist Φ_X eine Einbettung von $A_n/\sim_n$ in ein echtes Anfangssegment von $A_{n+1}/\sim_{n+1}$. Somit ist für alle $n \geq 1$ gezeigt, daß $\kappa_n < \kappa_{n+1}$ gilt.

□

4.4.3 Die Konfinalität der Zahlen κ_n

Wir werden jetzt zeigen, daß die Zahlen κ_n Konfinalität κ_2 besitzen. Da nach Satz 4.4.2 und Satz 4.4.19 $\kappa_n \geq \kappa_3 \geq \kappa_2^+$ gilt, folgt hieraus, daß die Zahlen κ_n für $n \geq 3$ singuläre Kardinalzahlen sind.

Satz 4.4.20 Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ besitzt κ_n die Konfinalität κ_2.

Beweis: Sei $n \geq 2$ gegeben.
Zunächst zeigen wir, daß die Konfinalität von κ_n höchstens κ_2 ist. Hierzu definieren wie eine konfinale Einbettung von κ_2 in κ_n. Wir nutzen aus, daß Elemente aus B_n Folgen in B_2 sind. Jedem Element a aus B_2 werden wir ein Element aus B_n zuordnen, nämlich die Folge der κ^{n-2} Elemente von B_2, die direkt auf a folgen. Diese Zuordnung liefert in kanonischer Weise eine konfinale Einbettung von B_2 in $B_n/\approx_n$. Da B_2 Ordnungstyp κ_2 und $B_n/\approx_n$ Ordnungstyp κ_n besitzt, ist dann gezeigt, daß die Konfinalität von κ_n höchstens κ_2 beträgt.
Wir werden dies nun im Detail ausführen:
Sei $K : B_2 \times \kappa^{n-2} \to B_2$ die Funktion, die jedem Paar $\langle [f]_\mathcal{C}, \beta \rangle$ das β–te Element aus B_2 zuordnet, das größer ist als $[f]_\mathcal{C}$.
Nach Satz 4.4.19 ist $\kappa_2 > \kappa$. Da κ_2 nach Lemma 2.4.7 regulär ist und B_2 denselben Ordnungstyp wie $B_2/\approx_2$, nämlich κ_2, besitzt, ist die Funktion K wohldefiniert.
Für alle $\gamma < \kappa_2$ setzen wir $a_\gamma := \pi_2^{-1}(\gamma)$. Dies ist das γ–te Element von B_2.
Sei nun $\gamma < \kappa_2$ beliebig. Setze $x^\gamma := \langle K(a_\gamma, \beta);\ \beta < \kappa^{n-2} \rangle \in B_n$. Damit definieren wir eine Funktion $\Psi : \kappa_2 \to \kappa_n$ durch

$$\Psi(\gamma) := \sigma_n([\![x^\gamma]\!]_n) \quad \text{für alle } \gamma < \kappa_2.$$

Ψ ist streng monoton steigend. Denn seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \kappa_2$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$ gegeben. Dann ist $a_{\gamma_1} <_C a_{\gamma_2}$, also nach Definition von K auch $K(a_{\gamma_1}, \beta) <_C K(a_{\gamma_2}, \beta)$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$, d.h. $[\![x^{\gamma_1}]\!]_n \prec_n [\![x^{\gamma_2}]\!]_n$ nach Proposition 4.2.17. Da σ_n ordnungserhaltend ist, folgt schließlich $\Psi(\gamma_1) < \Psi(\gamma_2)$, also ist Ψ eine strikt aufsteigende Funktion.

Nun muß gezeigt werden, daß $\mathrm{Im}(\Psi)$ konfinal in κ_n ist: Sei $\delta < \kappa_n$ beliebig und $x \in \sigma_n^{-1}(\delta)$. Es gilt $x \in B_n$.
Setze dann $a := \mathrm{Sup}\{x(\alpha);\ \alpha < \kappa^{n-2}\}$. Es gibt ein $\gamma < \kappa_2$ mit $a = a_\gamma$. Dann ist $a_\gamma \leq_2 K(a_\gamma, \beta)$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$ nach Definition von K. Also $x(\beta) <_C K(a_\gamma, \beta)$ für alle $\beta < \kappa^{n-2}$, d.h. $[\![x]\!]_n \prec_n \sigma_n^{-1}(\Psi(\gamma))$, bzw. $\Psi(\gamma) > \sigma_n([\![x]\!]_n) = \delta$.
Also ist $\mathrm{Im}(\Psi)$ tatsächlich konfinal in κ_n. Somit ist gezeigt, daß die Konfinalität von κ_n höchstens κ_2 ist.

Da κ_2 regulär ist, ist die Konfinalität mindestens κ_2. Denn angenommen, es gibt ein $\gamma < \kappa_2$ und eine Funktion $\vartheta \in [\kappa_n]^\gamma$ deren Bildmenge konfinal in κ_n liegt. Definiere dann eine Folge $\langle \alpha_\nu;\ \nu < \gamma \rangle$ in κ_2 durch

$$\alpha_\nu := \mathrm{Min}\{\alpha < \kappa_2;\ \vartheta(\nu) < \Psi(\alpha)\} \quad \text{für alle } \nu < \gamma.$$

Da $\mathrm{Im}(\vartheta)$ konfinal in κ_n ist, ist auch $\langle \Psi(\alpha_\nu);\ \nu < \gamma \rangle$ konfinal in κ_n. Da jedoch Ψ streng monoton steigt, ist $\langle \alpha_\nu;\ \nu < \gamma \rangle$ konfinal in κ_2, was der Regularität von κ_2 widerspricht.

Somit ist gezeigt, daß κ_n für alle $n \geq 2$ die Konfinalität κ_2 besitzt.

□

4.4.4 Die Jónsson–Eigenschaft der Zahlen κ_n

Wir zeigen nun, daß alle Zahlen κ_n die Jónsson–Eigenschaft besitzen. Zunächst weisen wir nach, daß κ_n für alle natürlichen Zahlen n sogar eine noch stärkere Partitionseigenschaft als die Jónsson–Eigenschaft erfüllt.

Für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ sei wie in den vorhergehenden Abschnitten $X_{k,f}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$ der k–te Block von $\mathrm{Sort}_{\kappa^{n-2}\cdot m}$ der Länge κ^{n-2}.
Ebenso definieren wir $x_{k,f} := X_{k,f}^{\maltese}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$.
Ist $m \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl und $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, so kann $B_2^H/\approx_2$ in Blöcke der Länge $\kappa^{n-2} \cdot m$ aufgeteilt werden. Da $B_2^H/\approx_2$ Ordnungstyp κ_2 besitzt und κ_2 eine Kardinalzahl ist, erhält man κ_2 solche Blöcke. Für alle $\alpha < \kappa_2$ sei z^α der α–te Block.

Lemma 4.4.21 Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt $\kappa_n \to [\kappa_n]^{<\omega}_{\gamma, <\aleph_1}$ für alle $\gamma < \kappa_2$.

Beweis:
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl.
Da κ_n und $B_n/\approx_n$ ordnungsisomorph sind, genügt es, die folgende Behauptung zu zeigen: Wenn $\gamma < \kappa_2$ und $F : [B_n/\approx_n]^{<\omega} \to \gamma$ eine beliebige Partition ist, dann gibt es eine Menge $Q \subseteq B_n/\approx_n$ vom Ordnungstyp κ_n mit $|F\text{"}[Q]^{<\omega}| \leq \aleph_0$.

Sei also $\gamma < \kappa_2$ beliebig und $F : [B_n/\approx_n]^{<\omega} \to \gamma$ eine Partition.
Es werden nun abzählbar viele Funktionen $G_m : [\kappa]^\kappa \to 2$ definiert. Mit Hilfe der schwachen Partitionseigenschaft von κ werden wir zeigen, daß es eine Menge Q vom Ordnungstyp κ_n gibt, so daß $|F\text{"}[Q]^m| \leq (n-1)^{m-1}$ gilt für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$.

Wir definieren $G_1 : [\kappa]^\kappa \to 2$ durch

$$G_1(f) = 0 \iff F([\![x_{1,f}]\!]_n) = F([\![x_{2,f}]\!]_n).$$

$G_m : [\kappa]^\kappa \to 2$ sei definiert durch

$$G_m(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F([\![s_I(f)]\!]_n) = F([\![s_I^*(f)]\!]_n) \quad \text{für alle } I \in (n-1)^{m-1}.$$

Nach Voraussetzung besitzen alle Funktionen G_m eine homogene Menge vom Ordnungstyp κ. Nach Satz 3.2.11 gibt es sogar eine Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, die für alle Funktionen G_m simultan homogen ist. Dann wird $Q := B_n^H/\approx_n$ die Teilmenge von $B_n/\approx_n$ mit der gewünschten Eigenschaft sein. Nach Korollar 4.2.20 hat Q Ordnungstyp κ_n. Zu zeigen bleibt also nur noch $|F\text{"}[Q]^{<\omega}| \leq \aleph_0$. Dafür beweisen wir, daß jede Funktion $f \in [H]^\kappa$ durch die Funktionen G_m auf 0 abgebildet wird.

1. Behauptung: $G_m\text{"}[H]^\kappa = \{0\}$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$.

Beweis der 1. Behauptung:
Wir betrachten zunächst den Fall $m = 1$. Wir können, wie schon erwähnt, $B_2^H/\approx_2$ in κ_2 Blöcke z^α der Länge $\kappa^{n-2} \cdot 2$ aufteilen. Für alle $\beta < \alpha < \kappa_2$ setzen wir $f_{\beta,\alpha} := \text{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(\Upsilon_H(z^\beta)^\frown\Upsilon_H(z^\alpha)) \in [H]^\kappa$. Dann gilt $x_{1,f_{\beta,\alpha}} = z^\beta$ und $x_{2,f_{\beta,\alpha}} = z^\alpha$. Wegen $\gamma < \kappa_2$ gibt es Ordinalzahlen β und α mit $F([\![x_{1,f_{\beta,\alpha}}]\!]_n) = F([\![z^\beta]\!]_n) = F([\![z^\alpha]\!]_n) = F([\![x_{2,f_{\beta,\alpha}}]\!]_n)$, also gilt $G_1(f_{\beta,\alpha}) = 0$. Wegen $f \in [H]^\kappa$ und da H homogen für G_1 ist, folgt $G_1\text{"}[H]^\kappa = \{0\}$.

Sei jetzt $m \geq 2$ beliebig.
Wir teilen $B_2^H/\approx_2$ in κ_2 Blöcke z^α der Länge $\kappa^{n-2} \cdot 2m$ auf. Sei $z^\alpha = z_1^\alpha{}^\frown ...{}^\frown z_m^\alpha$, wobei die z_k^α Folgen der Länge κ^{n-2} seien.
Nun setzen wir $f_\alpha := \text{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot m}(\Upsilon_H(z^\alpha))$ für alle $\alpha < \kappa_2$. Für jedes $\alpha < \kappa_2$ gilt dann $f_\alpha \in [H]^\kappa$ nach dem Misch– und Sortierlemma 3.2.15 und wie in Korollar 4.3.19 folgt $t_I(f_\alpha) = T_I(z_1^\alpha, ..., z_m^\alpha)$ für alle Folgen $I \in (n-1)^{m-1}$.
Definiere nun für alle $\alpha < \kappa_2$ eine Folge w_α der Länge $(n-1)^{m-1}$:

$$w_\alpha := \langle F([\![t_I(f_\alpha)]\!]_n);\ I \in (n-1)^{m-1}\rangle.$$

Man kann diese Folgen als Funktionen $w_\alpha \in \gamma^{((n-1)^{m-1})}$ auffassen. Der Ordnungstyp von $\gamma^{((n-1)^{m-1})}$ ist kleiner als κ_2. Somit gibt es Ordinalzahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa_2$ mit $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_2}$, d.h.

$$F([\![t_I(f_{\alpha_1})]\!]_n) = F([\![t_I(f_{\alpha_2})]\!]_n) \quad \text{für alle } I \in (n-1)^{m-1}.$$

Nach Proposition 4.3.20 gibt es ein $f \in [H]^\kappa$ mit $s_I(f) = T_I(z_1^{\alpha_1}, ..., z_m^{\alpha_1}) = t_I(f_{\alpha_1})$ und $s_I^*(f) = T_I(z_1^{\alpha_2}, ..., z_m^{\alpha_2}) = t_I(f_{\alpha_2})$ für alle $I \in (n-1)^{m-1}$.
Also gilt

$$F([\![s_I(f)]\!]_n) = F([\![s_I^*(f)]\!]_n) \quad \text{für alle } I \in (n-1)^{m-1},$$

d.h. $G_m(f) = 0$ nach Definition von G_m. Da jedoch $f \in [H]^\kappa$ gilt und H homogen für G_m ist, folgt $G_m\text{"}[H]^\kappa = \{0\}$. Die 1. Behauptung ist nun vollständig bewiesen.

Mit Hilfe dieser Behauptung kann gezeigt werden, daß für alle natürlichen Zahlen m die Funktion F, eingeschränkt auf die m–elementigen Teilmengen von Q nur endlich viele Werte annimmt:

2. Behauptung: $|F\text{"}[Q]^m| \leq (n-1)^{m-1}$.

Beweis der 2. Behauptung:
Wieder betrachten wir den Fall $m = 1$ gesondert und zeigen zunächst $|F\text{"}[Q]^1| = 1$.
Seien dazu $x_1, x_2 \in B_n^H = [B_2^H]^{\kappa^{n-2}}$. Da B_2^H Ordnungstyp κ_2 hat und κ_2 regulär ist, kann ein $y \in B_n^H$ gewählt werden, so daß die Paare $\langle x_1, y\rangle$ und $\langle x_2, y\rangle$ isoliert sind. Setzen wir $f_1 := \text{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(\Upsilon_H(x_1)^\frown\Upsilon_H(y))$ und $f_2 := \text{Misch}_{\kappa^{n-2}\cdot 2}(\Upsilon_H(x_2)^\frown\Upsilon_H(y))$, so gilt

$x_{1,f_1} = x_1, x_{2,f_1} = y$ und $x_{1,f_2} = x_2, x_{2,f_2} = y$. Außerdem sind f_1 und f_2 Elemente aus $[H]^\kappa$. Nach der 1. Behauptung gilt somit $G_1(f_1) = G_1(f_2) = 0$, also

$$\begin{aligned} F([\![x_1]\!]_n) &= F([\![x_{1,f_1}]\!]_n) = F([\![x_{2,f_1}]\!]_n) \\ &= F([\![y]\!]_n) = F([\![x_{2,f_2}]\!]_n) \\ &= F([\![x_{1,f_2}]\!]_n) = F([\![x_2]\!]_n). \end{aligned}$$

Somit werden alle Elemente aus Q durch F auf denselben Wert abgebildet, also $|F\text{"}[Q]^1| = 1$.

Nun beweisen wir die Behauptung für natürliche Zahlen $m > 1$.
Sei $I \in (n-1)^{m-1}$. Seien außerdem $\langle x_1, ..., x_m\rangle, \langle y_1, ..., y_m\rangle \in B_n^H$ zwei I–verwobene Tupel.
Nach Korollar 4.3.19 gibt es Funktionen $f_1, f_2 \in [H]^\kappa$ mit $[\![t_I(f_1)]\!]_n = \langle [\![x_1]\!]_n, ..., [\![x_m]\!]_n\rangle$ und $[\![t_I(f_2)]\!]_n = \langle [\![y_1]\!]_n, ..., [\![y_m]\!]_n\rangle$. Wir wählen nun ein m–Tupel $\langle z_1, ..., z_m\rangle \in [B_n^H]^m$, so daß die Tupel $\langle x_{1,f_1}, ..., x_{m,f_1}, z_1, ..., z_m\rangle$ und $\langle x_{1,f_2}, ..., x_{m,f_2}, z_1, ..., z_m\rangle$ isoliert sind. Da κ_2 regulär ist, gibt es eine solche Folge.
Nach Proposition 4.3.20 gibt es dann Funktionen $g_1, g_2 \in [H]^\kappa$ mit

$$\begin{aligned} s_I(g_1) &= T_I(x_{1,f_1}, ..., x_{m,f_1}) \text{ und } & s_I^*(g_1) &= T_I(z_1, ..., z_m), \quad \text{sowie} \\ s_I(g_2) &= T_I(x_{1,f_2}, ..., x_{m,f_2}) \text{ und } & s_I^*(g_2) &= T_I(z_1, ..., z_m). \end{aligned}$$

Wegen $t_I(f_1) = T_I(x_{1,f_1}, ..., T_I(x_{m,f_1})) = s_I(g_1)$ und $t_I(f_2) = T_I(x_{1,f_2}, ..., T_I(x_{m,f_2})) = s_I(g_2)$ folgt nun mit der 1. Behauptung

$$\begin{aligned} F([\![x_1]\!]_n, ..., [\![x_m]\!]_n) &= F([\![s_I(g_1)]\!]_n) = F([\![s_I^*(g_1)]\!]_n) \\ &= F([\![s_I^*(g_2)]\!]_n) = F([\![s_I(g_2)]\!]_n) \\ &= F([\![y_1]\!]_n, ..., [\![y_m]\!]_n). \end{aligned}$$

D.h. für ein festes $I \in (n-1)^{m-1}$ werden alle I–verwobenen m–Tupel durch F auf denselben Wert abgebildet. Also gilt $|F\text{"}[Q]^m| \leq (n-1)^{m-1}$.

Somit ist bewiesen: $|F\text{"}[Q]^{<\omega}| \leq \sum_{m\geq 1} |F\text{"}[Q]^m| = \aleph_0$.
Da $B_n/\approx_n$ und κ_n isomorph sind, zeigt dies, daß es für jedes $\gamma < \kappa_2$ und für jede Partition $F : [\kappa_n]^{<\omega} \to \gamma$ eine Menge $Q \subseteq \kappa_n$ vom Ordnungstyp κ_n gibt mit $|F\text{"}[Q]^{<\omega}| \leq \aleph_0$. Also gilt $\kappa_n \to [\kappa_n]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ für alle $\gamma < \kappa_2$ und natürliche Zahlen $n \geq 2$.

□

Die Partitionseigenschaft, die wir nun für κ_n gezeigt haben, ähnelt der Rowbottom–Eigenschaft sehr stark. Der Unterschied ist, daß bei einer Rowbottom–Zahl λ die Eigenschaft $\lambda \to [\lambda]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ wirklich für alle $\gamma < \lambda$ und nicht nur für die Zahlen γ unterhalb einer bestimmten Schranke erfüllt ist. Die Voraussetzung $\gamma < \kappa_2$ ging in Lemma 4.4.21 beim Beweis der ersten Behauptung ein, um ein Schubfachargument anwenden zu können. Eine leichte Modifikation des Beweises gibt quasihomogene Mengen für eine Partition $F : [\kappa_n]^{<\omega} \to \gamma$ auch für $\gamma > \kappa_2$, allerdings besitzen diese quasihomogenen Mengen dann nur Ordnungstyp κ_{n-1}, so daß wir daraus nur die Partitionseigenschaft $\kappa_n \to [\kappa_{n-1}]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ erhalten. Die Jónsson-Eigenschaft der Zahlen κ_n folgt daraus nicht, jedoch liefert dies die Grundidee für den Satz in Abschnitt 4.5, der besagt, daß das Supremum der Zahlen κ_n die Rowbottom–Eigenschaft besitzt.
Aus der Partitionseigenschaft, die in Lemma 4.4.21 für die Zahlen κ_n nachgewiesen wurde, folgt nun leicht die Jónsson–Eigenschaft:

Satz 4.4.22 κ_n ist eine Jónsson–Zahl für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Beweis:
$\kappa_1 = \kappa$ ist nach Satz 3.1.4 meßbar, also nach Satz 2.4.15 insbesondere eine Jónsson–Zahl.
Wir müssen die Behauptung nur noch für $n \geq 2$ zeigen.
Sei $G : [\kappa_n]^{<\omega} \to \kappa_n$ gegeben und γ mit $\aleph_1 \leq \gamma < \kappa_2$ beliebig.
Definiere dann eine Funktion $F : [\kappa_n]^{<\omega} \to \gamma$ durch

$$F(M) := \begin{cases} G(M), & \text{falls } G(M) < \gamma, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $M \in [\kappa_n]^{<\omega}$.
Nach Lemma 4.4.21 gibt es eine Menge $Q \subseteq \kappa_n$ vom Ordnungstyp κ_n mit $|F\text{"}[Q]^{<\omega}| \leq \aleph_0$, also $F\text{"}[Q]^{<\omega} \neq \gamma$, da γ überabzählbar ist.
Somit gibt es ein $\eta < \gamma$ mit $\eta \notin F\text{"}[Q]^{<\omega}$. Dann gilt auch $\eta \notin G\text{"}[Q]^{<\omega}$, also $G\text{"}[Q]^{<\omega} \neq \kappa_n$. Also gilt $\kappa_n \to [\kappa_n]^{<\omega}_{\kappa_n}$, d.h. κ_n ist eine Jónsson–Zahl.

□

4.5 κ_ω ist eine Rowbottom–Zahl

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß auch das Supremum über die in Abschnitt 4.2 konstruierten Zahlen κ_n eine große Kardinalzahl–Eigenschaft besitzt. Wir definieren daher zunächst:

Definition 4.5.1 $\kappa_\omega := \text{Sup}\{\kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\}$.

Man kann mit Methoden ähnlich zu denen, die wir angewendet haben, um die Jónsson–Eigenschaft der Zahlen κ_n zu zeigen, sogar eine noch stärkere große Kardinalzahl–Eigenschaft als die Jónsson–Eigenschaft für κ_ω nachweisen, nämlich daß κ_ω eine Rowbottom–Zahl ist. Wir hatten schon in Abschnitt 4.4.4 nach Lemma 4.4.21 bemerkt, daß die Grundidee des Beweises darin besteht, zu zeigen, daß für alle Zahlen κ_n die Partitionseigenschaft $\kappa_n \to [\kappa_{n-1}]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ erfüllt ist, wenn $\gamma < \kappa_{n-1}$ ist. Dies gibt uns für eine Partition $F : [\kappa_\omega]^{<\omega} \to \gamma$ für jede natürliche Zahl n mit $\gamma < \kappa_{n-1}$ eine quasihomogene Menge Q_n für die Funktion $F\restriction[\kappa_n]^{<\omega}$. Die Vereinigung dieser quasihomogenen Mengen besitzt dann Ordnungstyp κ_ω. Führt man die Konstruktion der Mengen Q_n sorgfältiger durch, als es hier beschrieben wurde, so kann sogar gezeigt werden, daß die Vereinigung dieser Mengen quasihomogen für F ist, wodurch die Rowbottom–Eigenschaft von κ_ω gezeigt ist. Wir wollen den Beweis in diesem Abschnitt detailliert durchführen.
Wieder klassifizieren wir endliche Tupel aus κ_ω nach dem Grad ihrer Verwobenheit. Dazu betrachten wir die Menge $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n$. Diese Menge hat den Vorteil, daß jedes ihrer Elemente durch die in Abschnitt 2.4 definierten Funktionen σ_n einem Element aus κ_ω zugeordnet werden kann, und daß außerdem der Begriff der Verwobenheit für diese Menge schon besteht. Wir müssen den Begriff allerdings noch erweitern, da endliche Teilmengen aus dieser Menge gemischt sein können in dem Sinne, daß die Elemente aus unterschiedlichen Mengen B_n stammen können.
Es ist leicht abzusehen, daß durch dieses Problem der gemischten Tupel die Betrachtung der Zahl κ_ω zur Unübersichtlichkeit neigt. Eine wesentliche Erleichterung bringt hier der folgende Hilfssatz, der uns später erlaubt, nur die jeweils $(n-2)$–verwobenen Paare aus B_n zu betrachten.

Hilfssatz 4.5.2 Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ und $z \in B_n$ beliebig. Dann gibt es ein $Q_n \subseteq B_n^H/{\approx_n}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Q_n besitzt Ordnungstyp κ_{n-1}.

(2) Für alle $[\![x]\!]_n \in Q_n$ gilt $[\![z]\!]_n \prec_n [\![x]\!]_n$.

(3) Jedes Paar $\langle [\![x]\!]_n, [\![y]\!]_n \rangle$ aus Q_n mit $[\![x]\!]_n \neq [\![y]\!]_n$ ist $(n-2)$–verwoben.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Je zwei Paare aus $B_2^H/{\approx_2}$ sind 0–verwoben. Da $B_2^H/{\approx_2}$ Ordnungstyp κ_2 besitzt und κ_2 regulär ist, besitzt auch $\{[\![x]\!]_2 \in B_2^H/{\approx_2};\ [\![z]\!]_2 \prec_2 [\![x]\!]_2\}$ Ordnungstyp κ_2. Somit kann als Q_2 jede beliebige Teilmenge dieser Menge mit Ordnungstyp $\kappa_1 = \kappa$ gewählt werden.

Nun zum Fall $n > 2$. Wir definieren rekursiv für alle $n > 2$ Funktionen $R_n : B_n \to B_{n-1}$: Für $n = 3$ definiere R_3 durch

$$R_3(x) := \mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa\}.$$

Da B_2 Ordnungstyp κ_2 besitzt und κ_2 nach Korollar 4.2.8 regulär ist, ist R_3 wohldefiniert. Für $n > 3$ sei

$$R_n(x) = u \iff u_\alpha = R_{n-1}(x_\alpha) \quad \text{für alle } \alpha < \kappa.$$

1. BEHAUPTUNG:

(1) Die Funktionen R_n sind wohldefiniert

(2) Wenn $\langle x, y\rangle$ ein isoliertes Paar aus B_n ist, so ist auch $\langle R_n(x), R_n(y)\rangle$ isoliert.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Wir beweisen dies durch Induktion nach n :
Sei zunächst $n = 3$. Wie oben erwähnt, ist R_3 wohldefiniert. Sei $\langle x, y\rangle$ ein isoliertes Paar aus B_3. Dann gilt: $R_3(x) = \mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa\} = R_3(y)$. Im Fall $n = 3$ sind also beide Eigenschaften erfüllt.

Sei $n > 3$ und die Behauptung für alle kleineren natürlichen Zahlen schon gezeigt. Sei $x \in B_n$ gegeben und $R_{n-1}(x_\alpha) =: u^\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Nach Induktionsvoraussetzung sind die Paare $\langle u^{\alpha_1}, u^{\alpha_2}\rangle$ für alle $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ isoliert. Somit gilt $u^\alpha = u_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$, wobei $u := u^0 {}^\frown u^1 {}^\frown ... {}^\frown u^\alpha {}^\frown ...$ sei. Also ist $R_n(x) = u$, und R_n ist wohldefiniert.

Sei $\langle x, y\rangle$ isoliert in B_n. Wir setzen $R_n(x) =: u$ und $R_n(y) =: v$. Für alle $\alpha_1, \alpha_2 < \kappa$ sind die Paare $\langle x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}\rangle$ isoliert. Also sind nach Induktionsvoraussetzung auch die Paare $\langle u_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}\rangle$ isoliert für alle $\alpha_1, \alpha_2 < \kappa$.
Wenn nun $[g_1]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(u)$ und $[g_2]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(v)$ ist, dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 < \kappa$ mit $[g_1]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(u_{\alpha_1})$ und $[g_2]_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Im}(v_{\alpha_2})$. Da aber $\langle u_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}\rangle$ isoliert ist, folgt $[g_1]_{\mathcal{C}} <_{\mathcal{C}} [g_2]_{\mathcal{C}}$. Das bedeutet jedoch, daß $\langle u, v\rangle$ ebenfalls isoliert ist.
Somit ist die 1. Behauptung vollständig bewiesen.

Jetzt übertragen wir die Funktionen R_n auf die Restklassen:
Für alle $n \geq 3$ sei $r_n : B_n/{\approx_n} \to B_{n-1}/{\approx_{n-1}}$ definiert durch

$$r_n([\![x]\!]_n) := [\![u]\!]_n \iff R_n(x) = u.$$

2. BEHAUPTUNG: Für alle $n \geq 3$ ist die Funktion r_n wohldefiniert.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG:
Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion nach n :
Sei $n = 3$ und $x, y \in B_3$ mit $x \approx_3 y$. Dann gilt $\mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa\} = \mathrm{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa\}$, also $R_3(x) \approx_2 R_3(y)$. Somit ist r_3 wohldefiniert.

Sei nun $n > 3$ und schon gezeigt, daß r_{n-1} wohldefiniert ist. Seien $x, y \in B_n$ mit $x \approx_n y$ gegeben. Setze $R_n(x) =: u$ und $R_n(y) =: v$. Wegen $x \approx_n y$ ist $\{\alpha < \kappa;\ x_\alpha \approx_{n-1} y_\alpha\} \in \mathcal{C}$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung auch $\{\alpha < \kappa;\ u_\alpha \approx_{n-2} v_\alpha\} \in \mathcal{C}$, d.h. $u \approx_{n-1} v$. Somit ist auch r_n wohldefiniert.

3. Behauptung: Für alle $n \geq 3$ gilt: Wenn $r_n(\llbracket x \rrbracket_n) = r_n(\llbracket y \rrbracket_n)$ ist, so gilt entweder $\llbracket x \rrbracket_n = \llbracket y \rrbracket_n$, oder $\langle \llbracket x \rrbracket_n, \llbracket y \rrbracket_n \rangle$ ist $(n-2)$–verwoben.

Beweis der 3. Behauptung:
Auch diese Behauptung wird durch Induktion nach n gezeigt:
Aus $R_3(x) = R_3(y)$ folgt $\text{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa\} = \text{Sup}\{y(\beta);\ \beta < \kappa\}$. Falls $\llbracket x \rrbracket_n \neq \llbracket y \rrbracket_n$ ist, bedeutet das, daß $\langle \llbracket x \rrbracket_n, \llbracket y \rrbracket_n \rangle$ 1–verwoben ist.

Sei $n > 3$ und die Behauptung für alle kleineren natürlichen Zahlen schon gezeigt.
Seien $x, y \in B_n$ mit $r_n(\llbracket x \rrbracket_n) = r_n(\llbracket y \rrbracket_n)$. Dann gilt $u := R_n(x) \approx_{n-1} R_n(y) =: v$, d.h. $C_1 := \{\alpha < \kappa;\ R_{n-1}(x_\alpha) = u_\alpha \approx_{n-2} v_\alpha = R_{n-1}(y_\alpha)\} = \{\alpha < \kappa;\ r_{n-1}(\llbracket x_\alpha \rrbracket_n) = r_{n-1}(\llbracket y_\alpha \rrbracket_n)\} \in \mathcal{C}$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt für $\alpha \in C_1$ entweder $x_\alpha \approx_{n-1} y_\alpha$ oder $\langle \llbracket x_\alpha \rrbracket, \llbracket y_\alpha \rrbracket \rangle$ ist $(n-3)$–verwoben.
Sei $C_2 := \{\alpha \in C_1;\ x_\alpha \approx_{n-1} y_\alpha\}$ und $C_3 := \{\alpha \in C_1;\ \langle \llbracket x_\alpha \rrbracket, \llbracket y_\alpha \rrbracket \rangle$ ist $(n-3)$–verwoben$\}$.
Es ist $C_1 = C_2 \cup C_3$. Also muß eine der beiden Mengen C_1 und C_2 in $\mathcal{C}$ liegen. Im Fall $C_2 \in \mathcal{C}$ folgt $\llbracket x \rrbracket_n = \llbracket y \rrbracket_n$. Im Fall $C_3 \in \mathcal{C}$ folgt, daß $\langle \llbracket x \rrbracket_n, \llbracket y \rrbracket_n \rangle$ $(n-2)$–verwoben ist.
Somit ist die 3. Behauptung bewiesen.

Sei nun $n \geq 3$ fest. Setze $M_z := \{\llbracket x \rrbracket_n \in B_n^H/\approx_n;\ \llbracket z \rrbracket_n \prec_n \llbracket x \rrbracket_n\}$. Als Endsegment einer Menge vom Ordnungstyp κ_n besitzt M_z ebenfalls Ordnungstyp κ_n. Wir betrachten nun die Abbildung $r_n \restriction M_z : M_z \to B_{n-1}/\approx_{n-1}$.

4. Behauptung: Es gibt eine Teilmenge $Q \subseteq M_z$ vom Ordnungstyp κ_{n-1}, so daß $r_n \restriction Q$ konstant ist.

Beweis der 4. Behauptung:
Angenommen, eine solche Menge gäbe es nicht. Für $\beta < \kappa_{n-1}$ sei $K_\beta := \{\sigma_n(\llbracket x \rrbracket_n);\ \llbracket x \rrbracket_n \in M_z\ \ \&\ \ \sigma_{n-1}(r_n(\llbracket x \rrbracket_n)) = \beta\}$. Für alle $\beta < \kappa_{n-1}$ ist dann nach Annahme der Ordnungstyp γ_β von K_β kleiner als κ_{n-1}. Sei $K_\beta := \{\alpha^\beta_\nu;\ \nu < \gamma_\beta\}$ für alle $\beta < \kappa_{n-1}$.
Definiere nun eine Abbildung $w : \kappa_{n-1} \times \kappa_{n-1} \to \bigcup_{\beta < \kappa_{n-1}} K_\beta$ durch

$$w(\nu, \beta) := \begin{cases} \alpha^\beta_\nu, & \text{falls } \nu < \gamma_\beta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

w ist eine Surjektion. Daher kann $\bigcup_{\beta < \kappa_{n-1}} K_\beta$ höchstens $|\kappa_{n-1} \times \kappa_{n-1}| = \kappa_{n-1}$ Elemente enthalten. Da σ_n eine Bijektion zwischen M_z und $\bigcup_{\beta < \kappa_{n-1}} K_\beta$ ist, hat dann auch M_z höchstens Mächtigkeit κ_{n-1}, im Widerspruch zur Definition von M_z.

Somit gibt es also doch ein $Q \subseteq M_z$ vom Ordnungstyp κ_{n-1}, so daß $r_n \restriction Q$ konstant ist.

Dann besitzt $Q =: Q_n$ alle gewünschten Eigenschaften:
Q_n besitzt Ordnungstyp κ_{n-1}, d.h. Eigenschaft (1) ist erfüllt. Wegen $Q_n \subseteq M_z$ ist auch Eigenschaft (2) erfüllt. Eigenschaft (3) folgt aus der 3. und 4. Behauptung.

□

Wir verallgemeinern nun also den Begriff der Verwobenheit auf Tupel aus $\bigcup_{2 \leq n \in \omega} B_n$.
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für jedes $k \geq 2$ bezeichne $I^n(k)$ die Folge der Länge $k-1$, die konstant den Wert $n-2$ annimmt. Außerdem setzen wir $I^n(1) := \emptyset$.
Aus notationstechnischen Gründen nennen wir jede Folge $\langle x \rangle$ aus B_n bzw. $\langle \llbracket x \rrbracket_n \rangle$ aus $B_n/\approx_n$ mit nur einem einzigen Folgenglied $\emptyset$–verwoben.

Definition 4.5.3 Seien natürliche Zahlen $n_1 < ... < n_\ell$ und natürliche Zahlen $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ beliebig.

(1) Wenn für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ Folgen $s^{n_j}(k_j) \in [B_{n_j}]^{k_j}$ gegeben sind, so heißt $s^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown s^{n_\ell}(k_\ell)$ genau dann $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–**verwoben**, wenn $s^{n_j}(k_j)$ $I^{n_j}(k_j)$–verwoben ist für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$.

(2) Sind für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ Folgen $S^{n_j}(k_j) \in [B_{n_j}/{\approx_{n_j}}]^{k_j}$ gegeben, so heißt $S^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$ genau dann $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–**verwoben**, wenn $S^{n_j}(k_j)$ $I^{n_j}(k_j)$–verwoben ist für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$.

Die in Definition 4.3.12 eingeführten Bezeichnungen übertragen wir in natürlicher Weise auf die hier betrachteten gemischten Tupel.
Tupel mit der in Definition 4.5.3 beschriebenen Eigenschaft sind maximal verwobene Tupel. Dies bedeutet, daß diejenigen Folgen des Tupels, die dieselbe Länge besitzen, so stark miteinander verwoben sind, daß ihre einzelnen Punkte sich $\mathcal{C}$–fast überall abwechseln. Abbildung 4.6 stellt schematisch ein $\langle\langle n-2, n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobenes Tupel dar. Es besteht aus drei Elementen aus B_n, die $(n-2)$–verwoben sind, aus einem Element aus B_{n+1} und aus zwei n–verwobenen Elementen aus B_{n+2}.

Betrachtet man eine Folge x aus einer Menge B_n und ist $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, die kleiner als n ist, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Anfangssegment von x, aufgefaßt als Folge in B_2, das Element von B_m ist. Dies ist nämlich gerade das Anfangssegment von x der Länge κ^{m-2}, also $x{\restriction}\kappa^{m-2}$.
Ebenso wie in Abschnitt 4.3 zeichnen wir bestimmte gemischte Tupel aus $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n$ aus und nennen sie kanonisch verwobene Tupel:

Definition 4.5.4 Seien natürliche Zahlen $n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ gegeben. Abkürzend schreiben wir $N := \langle n_1, ..., n_\ell\rangle$ und $K := \langle k_1, ..., k_\ell\rangle$. Sei außerdem $x \in B_{n_\ell}$.

(1) Wir definieren zunächst für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ ein Tupel

$$\mathrm{Kan}(x, n_j, k_j) := \begin{cases} \langle (x{\restriction}\kappa^{n_j-2})^{k_j, n_j-2, 1}, ..., (x{\restriction}\kappa^{n_j-2})^{k_j, n_j-2, k_j}\rangle & \text{für } k_j \geq 1, \\ x{\restriction}\kappa^{n_j-2} & \text{für } k_j = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich sind die Tupel $\mathrm{Kan}(x, n_j, k_j)$ $I^{n_j}(k_j)$–verwoben für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$.

(2) Dann nennen wir $\mathrm{Kan}(x, N, K) := \mathrm{Kan}(x, n_1, k_1)^\frown ...^\frown \mathrm{Kan}(x, n_\ell, k_\ell)$ das **kanonisch** $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–**verwobene Tupel** für x.

(3) Seien $f \in [\kappa]^\kappa$ und $x(f) := \mathrm{Sort}_{\kappa^{n_\ell-2}}(f)^{\maltese}$. Dann heißt

$$\mathrm{Kan}(f, N, K) := \mathrm{Kan}(x(f), N, K)$$

das **kanonisch** $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–**verwobene Tupel für** f.

(4) $[\![\mathrm{Kan}(x, N, K)]\!]$ bzw. $[\![\mathrm{Kan}(f, N, K)]\!]$ seien diejenigen Tupel, die durch punktweise Restklassenbildung aus $\mathrm{Kan}(x, N, K)$ bzw. aus $\mathrm{Kan}(f, N, K)$ entstehen.

Die rechten fünf Folgen in Abbildung 4.7 veranschaulichen das kanonisch $\langle\langle n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobene Quintupel für ein $x \in B_{n+2}$, welches links im Bild dargestellt wurde. Das $(n-2)$–verwobene Paar aus B_n entsteht dabei durch Aufteilen des untersten Blocks der Länge κ^{n-2} von x. Die mittlere Komponente des Quintupels ist der unterste Block von x der Länge κ^{n-1}, und das $\langle n, n\rangle$–verwobene Paar ist einfach das kanonisch $\langle n, n\rangle$–verwobene Paar für x, wie es in Abschnitt 4.3 definiert wurde.
Mit Hilfe des Hilfssatzes 4.5.2 und unter Voraussetzung von AC_ω konstruieren wir nun für ein gegebenes $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ und ein $\gamma < \kappa_\omega$ rekursiv Teilmengen Q_n von $B_n^H/{\approx_n}$, deren Elemente untereinander alle $(n-2)$–verwoben sind. Die Mengen

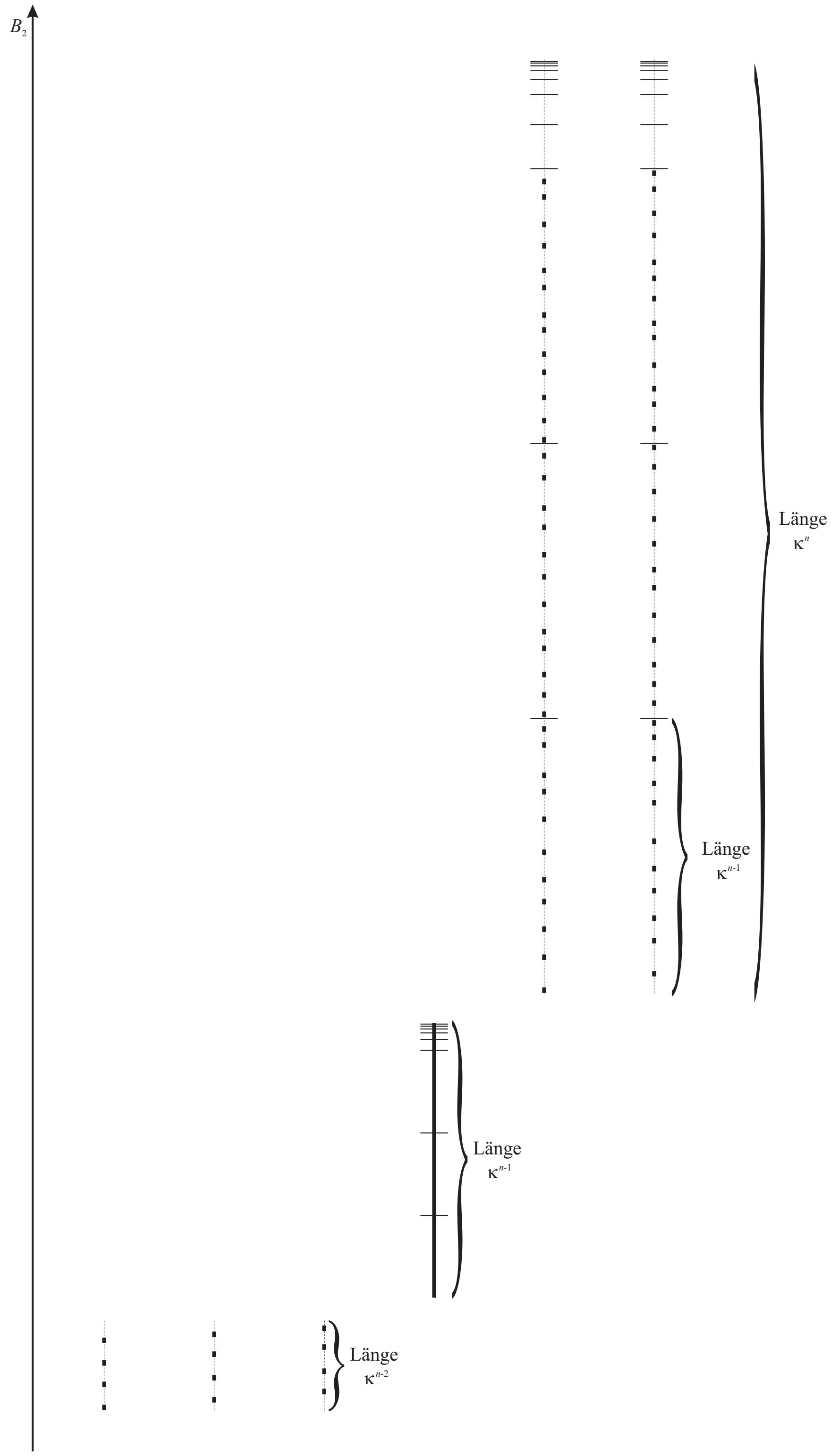

Abbildung 4.6: Ein $\langle\langle n-2, n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobenes Quintupel.

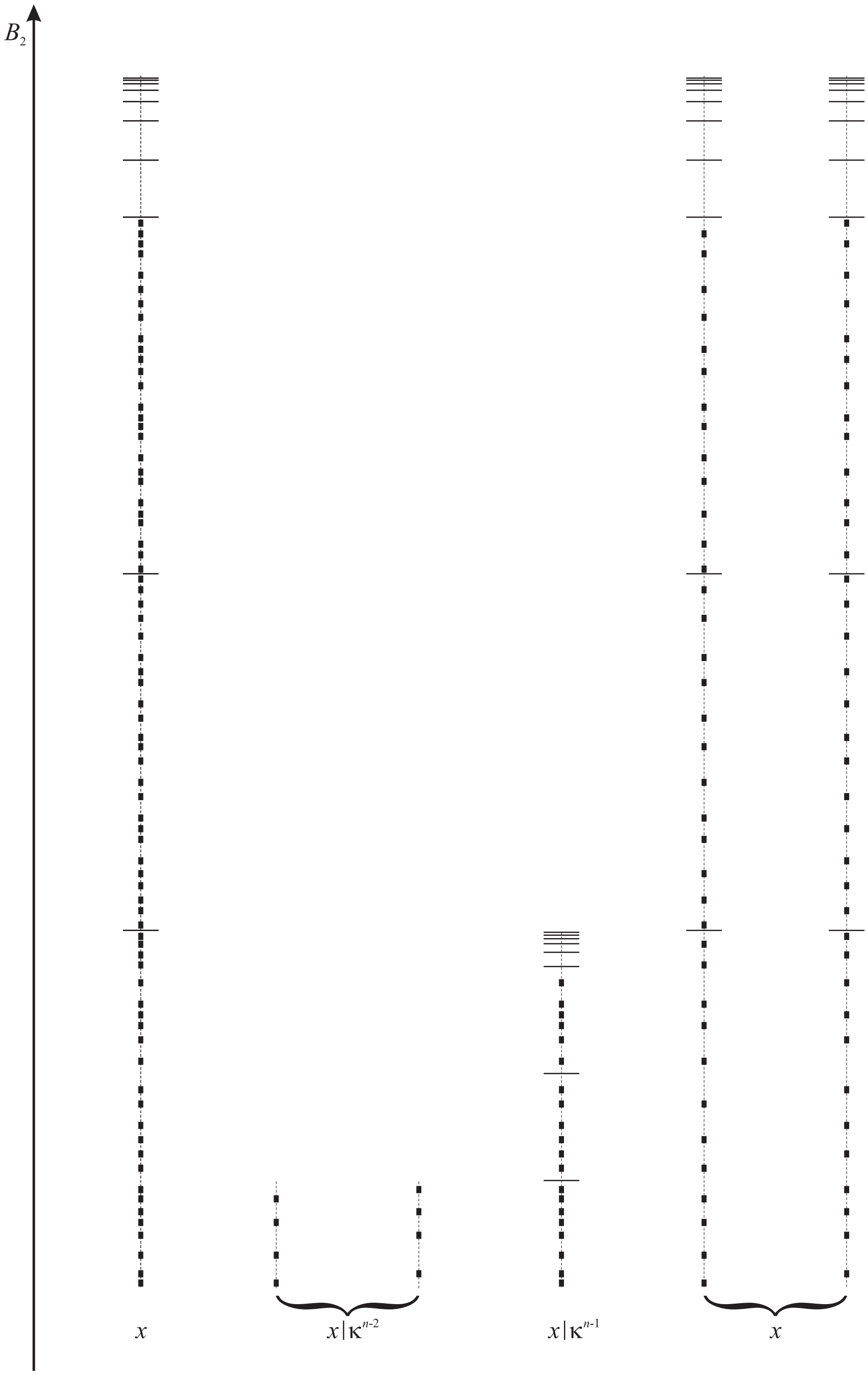

ABBILDUNG 4.7: Das kanonisch $\langle\langle n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobene Quintupel für x.

sollen außerdem die Eigenschaft besitzen, daß für natürliche Zahlen $m < n$ die Elemente von Q_m alle unterhalb der Elemente von Q_n liegen.

Diese Mengen Q_n werden später beim Nachweis der Rowbottom–Eigenschaft von κ_ω eine quasihomogene Menge liefern.
Sei also $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ und $\gamma < \kappa_\omega$ beliebig. Sei n_γ die kleinste natürliche Zahl $n \geq 3$ mit $\gamma < \kappa_{n-1}$. Wir definieren nun für alle $n \geq n_\gamma$ rekursiv eine Menge $Q_n \subseteq B_n^H/{\approx_n}$.

Q_{n_γ} sei eine beliebige Teilmenge von $B_{n_\gamma}^H/{\approx_{n_\gamma}}$ vom Ordnungstyp $\kappa_{n_\gamma-1}$, für die gilt: Jedes $\langle [\![x]\!]_{n_\gamma}, [\![y]\!]_{n_\gamma}\rangle \in [Q_{n_\gamma}]^2$ ist $(n-2)$–verwoben. Nach Hilfssatz 4.5.2 existiert eine solche Menge.

Sei nun $n > n_\gamma$ und $Q_{n-1} \subseteq B_{n-1}^H/{\approx_{n-1}}$ schon definiert. Wähle ein $z \in B_n^H$ so, daß $[\![z_0]\!]_{n-1} \in Q_{n-1}$ ist, wobei z_0 der erste Block von z der Länge κ^{n-3} sei. Da $Q_{n-1} \subseteq B_{n-1}^H/{\approx_{n-1}}$ ist, gibt es ein solches z.
Wir wählen nun $Q_n \subseteq B_n^H/{\approx_n}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Q_n besitzt Ordnungstyp κ_{n-1}.

(2) Für alle $[\![x]\!]_n \in Q_n$ gilt $[\![z]\!]_n \prec_n [\![x]\!]_n$.

(3) Jedes Paar $\langle [\![x]\!]_n, [\![y]\!]_n\rangle$ aus Q_n ist $(n-2)$–verwoben.

Nach Hilfssatz 4.5.2 gibt es eine solche Menge Q_n.

Abbildung 4.8 zeigt Repräsentanten von Elementen der Mengen Q_n, Q_{n+1} und Q_{n+2}. Es reicht, jeweils nur Repräsentanten eines Elements zu betrachten, um ein gutes Bild dieser Mengen zu bekommen. Denn da je zwei Elemente $(n-2)$–verwoben sind, sind ihre Suprema gleich. Je zwei Elemente sind außerdem so stark ineinander verwoben, daß sie im wesentlichen auf derselben Höhe liegen.

Für die folgenden Hilfssätze 4.5.6 und 4.5.7 sowie für das Korollar 4.5.8 sei immer $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, $\gamma < \kappa_\omega$, und die Mengen Q_n seien für alle $n \geq n_\gamma$ wie oben konstruiert, wobei n_γ die kleinste natürliche Zahl $n \geq 3$ mit $\gamma < \kappa_{n-1}$ sei.

Der Begriff der Isoliertheit soll nun verallgemeinert werden auf Tupel von Folgen, die nicht notwendigerweise dieselbe Länge besitzen müssen.

Definition 4.5.5 Es seien Folgen $x_1, ..., x_m$ gegeben, $\alpha_1, ..., \alpha_m$ seien Ordinalzahlen, wobei $x_k \in [B_2]^{\alpha_k}$ für alle k mit $1 \leq k \leq m$ gelte. Dann heißt $\langle x_1, ..., x_m\rangle$ **isoliert**, wenn $[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [g]_\mathcal{C}$ gilt für alle $[f]_\mathcal{C} \in \mathrm{Im}(x_k)$ und $[g]_\mathcal{C} \in \mathrm{Im}(x_{k+1})$ und für alle k mit $1 \leq k \leq m-1$.

Der nächste Hilfssatz zeigt den folgenden Sachverhalt: Sind zwei natürliche Zahlen $n_1 < n_2$ gegeben, und wählt man aus den Mengen Q_{n_1} und Q_{n_2} je ein Element aus, so gibt es Repräsentanten dieser Elemente, die ein isoliertes Tupel bilden.
Die Konstruktion dieser Repräsentanten basiert auf der folgenden Idee: Hat man je einen beliebigen Repräsentanten eines Elements u aus Q_{n_1} und eines Elements y aus Q_{n_2}, so schneidet man das Anfangssegment von y ab, so daß u und die dadurch entstehende Folge x sich nicht überschneiden. Da nur ein Anfangssegment von y verändert wurde, sind y und x äquivalent, und man hat ein isoliertes Paar wie gewünscht gefunden.
Abbildung 4.9 zeigt ein Beispiel für die Wahl solcher isolierter Repräsentanten. Wir haben die (im Bild gepunkteten) Repräsentanten aus Abbildung 4.8 genommen und ein dazu äquivalentes (mit durchgezogenen Linien dargestelltes) Tupel gezeichnet, welches isoliert ist.

Hilfssatz 4.5.6 Seien $n_\gamma \leq n_1 < n_2 \in \omega$ beliebig.
Wenn $u \in B_{n_1}^H, x \in B_{n_2}^H$ so ist, daß $[\![u]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$ und $[\![x]\!]_{n_2} \in Q_{n_2}$ gilt, dann gibt es ein $y \in B_{n_2}^H$ mit den folgenden Eigenschaften:

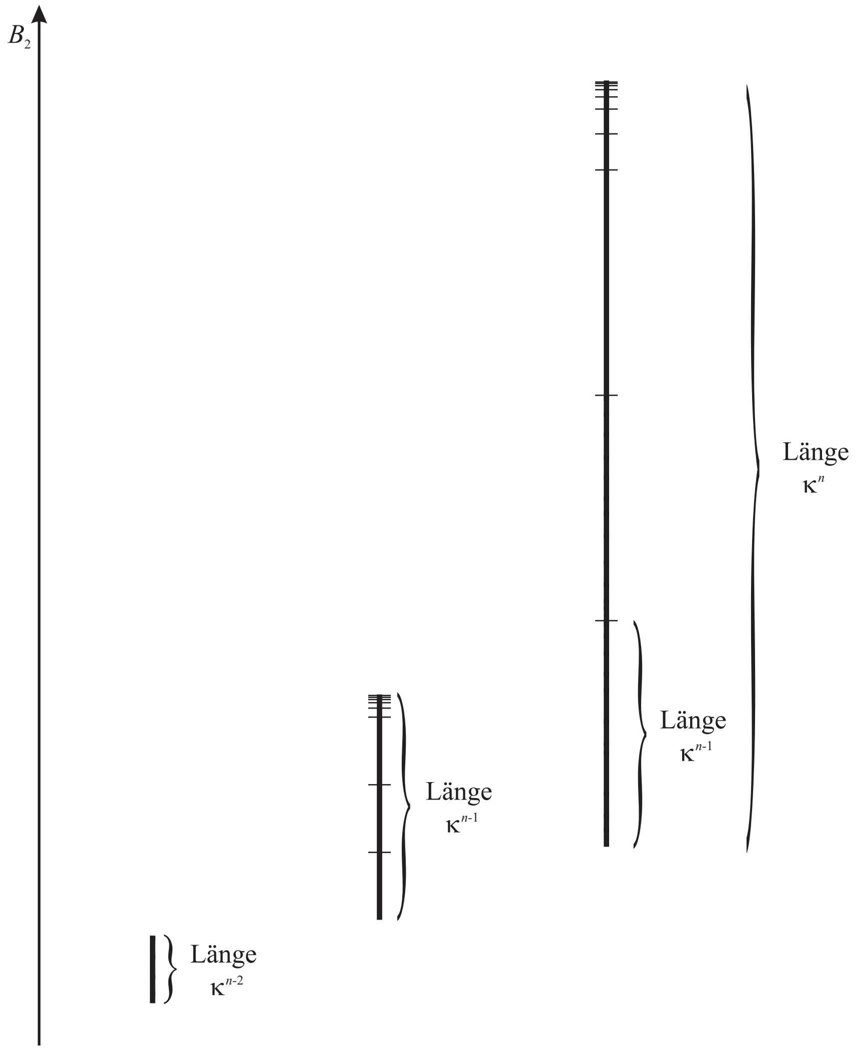

ABBILDUNG 4.8: Repräsentanten von Elementen der Mengen Q_n, Q_{n+1} und Q_{n+2}.

(1) $x \approx_{n_2} y$

(2) $\mathrm{Im}(y) \subseteq \mathrm{Im}(x)$

(3) $\langle u, y \rangle$ ist isoliert.

Beweis: Die Behauptung folgt durch Induktion nach n_2 :
Sei zunächst $n_2 = n_1 + 1$. Nach Konstruktion von Q_{n_2} gibt es ein $z \in B^H_{n_2}$ mit $[\![z_0]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$ und $[\![z]\!]_{n_2} \prec_{n_2} [\![x]\!]_{n_2}$ für alle $[\![x]\!]_{n_2} \in Q_{n_2}$.
Da alle Paare aus Q_{n_1} $(n_1 - 2)$–verwoben sind und $n_1 \geq 3$ gilt, ist $\mathrm{Sup}\{u(\beta);\ \beta < \kappa^{n_1-2}\} = \mathrm{Sup}\{z_0(\beta);\ \beta < \kappa^{n_1-2}\}$ für alle u mit $[\![u]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$. Also sind die Paare $\langle u, z_\alpha \rangle$ isoliert für alle $\alpha > 0$ und $u \in B^H_{n_1}$ mit $[\![u]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$.
Sei nun also $x \in B^H_{n_2}$ mit $[\![x]\!]_{n_2} \in Q_{n_2}$ und $u \in B^H_{n_1}$ mit $[\![u]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$. Es gilt $[\![z]\!]_{n_2} \prec_{n_2} [\![x]\!]_{n_2}$ und daher $\mathrm{Sup}\{z(\beta);\ \beta < \kappa^{n_2-2}\} \leq_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n_2-2}\}$ nach Korollar 4.2.16. Es folgt hieraus $\mathrm{Sup}\{z_0(\beta);\ \beta < \kappa^{n_1-2}\} <_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{x(\beta);\ \beta < \kappa^{n_2-2}\}$. Insbesondere gibt es daher ein $\alpha < \kappa$ mit $\mathrm{Sup}\{z_0(\beta);\ \beta < \kappa^{n_1-2}\} \leq_{\mathcal{C}} \mathrm{Sup}\{x_\alpha(\beta);\ \beta < \kappa^{n_1-2}\}$. Sei α_0

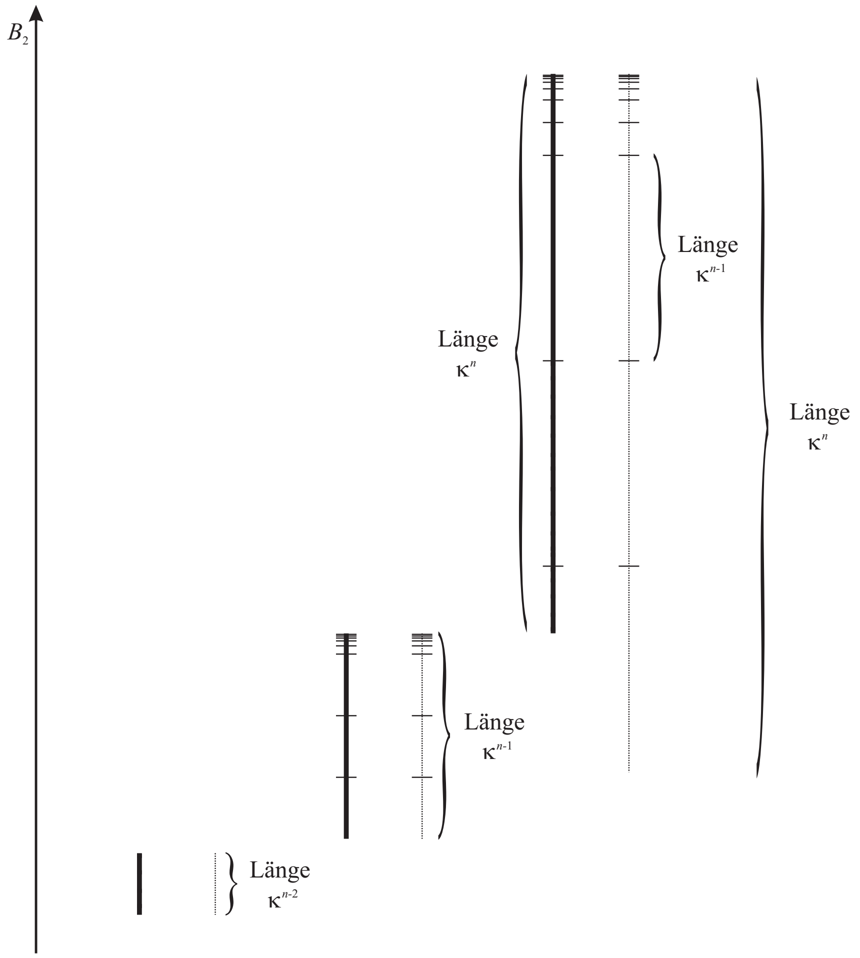

Abbildung 4.9: Isolierte Repräsentanten von Elementen aus Q_n, Q_{n+1} und Q_{n+2}.

das kleinste α mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [g]_\mathcal{C}$ für alle $[f]_\mathcal{C} \in \mathrm{Im}(u)$ und $[g]_\mathcal{C} \in \mathrm{Im}(x_\alpha)$, wenn $\alpha > \alpha_0$ ist. Somit sind die Paare $\langle u, x_\alpha \rangle$ für alle $\alpha > \alpha_0$ isoliert.

Sei nun $\tau : \kappa \to \kappa - (\alpha_0 + 1)$ die ordnungserhaltende Bijektion und definiere $y \in B^H_{n_2}$ durch

$$y_\alpha := x_{\tau(\alpha)} \quad \text{für alle } \alpha < \kappa.$$

Dann erfüllt y nach Definition die Eigenschaften (2) und (3).
Nach Hilfssatz 3.2.1 gilt $\{\alpha < \kappa;\ y_\alpha = x_\alpha\} \in \mathcal{C}$, wenn wir $g = \tau$ und $f = \mathrm{id}$ setzen. Also gilt auch $x \approx_{n_2} y$ und somit Eigenschaft (1).

Sei nun $n_2 > n_1 + 1$ und sei die Behauptung für alle n mit $n_1 + 1 \leq n < n_2$ schon gezeigt. Sei außerdem $x \in B^H_{n_2}$ mit $[\![x]\!]_{n_2} \in Q_{n_2}$, $u \in B^H_{n_1}$ mit $[\![u]\!]_{n_1} \in Q_{n_1}$. Wir wählen $w \in B^H_{n_2-1}$ mit $[\![w]\!]_{n_2-1} \in Q_{n_2-1}$ so, daß das Paar $\langle u, w \rangle$ isoliert ist. Dies ist nach Induktionsvoraussetzung möglich.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es außerdem ein $y \in B^H_{n_2}$ mit $x \approx_{n_2} y$ und $\mathrm{Im}(y) \subseteq \mathrm{Im}(x)$, so daß $\langle w, y \rangle$ isoliert ist. Also ist auch $\langle u, y \rangle$ isoliert.
Somit ist ein y mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

$\square$

Es wird sich zeigen, daß es, analog zu Satz 4.3.18, den wir in Abschnitt 4.3 gezeigt hatten, für jedes endliche Tupel ein dazu äquivalentes, kanonisch verwobenes Tupel aus $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n$ gibt. Da wir uns später nur für Tupel aus $\bigcup_{n_\gamma\leq n\in\omega} Q_n$ interessieren, und weil wir die kanonisch verwobenen Tupel sowieso nur für maximal ineinander verwobene Tupel eingeführt haben, werden wir dies nur für Tupel zeigen, deren Äquivalenzklassentupel aus eben dieser Menge $\bigcup_{n_\gamma\leq n\in\omega} Q_n$ stammt.
Ein kanonisches Tupel, wie wir es in Definition 4.5.4 eingeführt haben, wird aus verschieden langen Anfangssegmenten einer Folge x aus einer Menge B_n konstruiert. Haben wir also ein endliches Tupel, dessen Äquivalenzklassentupel in $\bigcup_{n_\gamma\leq n\in\omega} Q_n$ liegt, so müssen wir zunächst ein dazu äquivalentes Tupel finden, welches aus den Anfangssegmenten einer solchen Folge x aufgebaut ist.
In Hilfssatz 4.5.6 hatten wir gesehen, daß man immer äquivalente Tupel findet, für die die Komponenten unterschiedlicher Länge isoliert zueinander sind. In Abbildung 4.10 ist dies am Beispiel eines $\langle\langle n-2, n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobenen Tupels dargestellt.
Die Idee ist nun, aus diesen Tupeln die kanonischen Tupel zu konstruieren. Man geht dabei rekursiv nach der Länge der Komponenten vor. Ist eine bestimmte Länge κ^{n-2} gegeben, und sind alle Komponenten des kanonischen Tupels, die kürzere Länge besitzen, schon konstruiert, so teilt man diese kürzeren Komponenten in genau so viele Stücke auf, wie Komponenten der Länge κ^{n-2} vorhanden sind. Die kanonischen Komponenten der Länge κ^{n-2} erhält man dann, indem man diese Stücke unten an die ursprünglichen Komponenten ansetzt. Dadurch erhält man Folgen, deren Anfangssegmente aus denselben Stücken aufgebaut sind. Das entstandene Tupel ist dabei immer noch äquivalent zum ursprünglichen, da immer nur Anfangssegmente verändert wurden.
Abbildung 4.11 zeigt dies an dem $\langle\langle n-2, n-2\rangle, \emptyset, \langle n\rangle\rangle$–verwobenen Tupel, das in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Es ist zu sehen, daß die längeren Komponenten des Tupels durch die kürzeren Komponenten ergänzt werden, indem diese eventuell neu aufgeteilt werden.
Die genaue Konstruktion ist nun im folgenden Hilfssatz beschrieben:

Hilfssatz 4.5.7 Seien natürliche Zahlen $n_1, ..., n_\ell$ mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und natürliche Zahlen $k_1, .., k_\ell \geq 1$ gegeben. Abkürzend schreiben wir wieder $N := \langle n_1, ..., n_\ell\rangle$ und $K := \langle k_1, ..., k_\ell\rangle$.
Sei außerdem für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ eine $I^{n_j}(k_j)$–verwobene Folge $\langle x_1^j, ..., x_{k_j}^j\rangle \in [B_{n_j}^H]^{k_j}$ gegeben mit $[\![x_i^j]\!]_{n_j} \in Q_{n_j}$ für alle i mit $1 \leq i \leq k_j$.
Dann gibt es ein $y \in B_{n_\ell}^H$ und für jedes j mit $1 \leq j \leq \ell$ und $1 \leq i \leq k_\ell$ Folgen $y_i^j \in B_{n_j}^H$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $x_i^j \approx_{n_j} y_i^j$ für alle j und i mit $1 \leq j \leq \ell$ und $1 \leq i \leq k_j$.

(2) Es gilt $\mathrm{Kan}(y, n_j, k_j) = \langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j\rangle$ für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$. Dies bedeutet, daß $\mathrm{Kan}(y, N, K) = \langle y_1^1, ..., y_{k_1}^1\rangle ^\frown ... ^\frown \langle y_1^\ell, ..., y_{k_\ell}^\ell\rangle$ ist, d.h. das konstruierte Tupel ist kanonisch $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–verwoben für y.

Beweis: Wir definieren das gesuchte Tupel $\langle y_1^1, ..., y_{k_1}^1\rangle ^\frown ... ^\frown \langle y_1^\ell, ..., y_{k_\ell}^\ell\rangle$ rekursiv:
Zunächst definieren wir $\langle y_1^1, ..., y_{k_1}^1\rangle$:
Nach Satz 4.3.18 gibt es ein zu $\langle x_1^1, ..., x_{k_1}^1\rangle$ äquivalentes Tupel $\langle y_1^1, ..., y_{k_1}^1\rangle$ mit $\mathrm{Im}(y_i^1) \subseteq \mathrm{Im}(x_i^1)$ für alle i, welches kanonisch $I^{n_1}(k_1)$–verwoben ist. Wegen $\mathrm{Im}(y_i^1) \subseteq \mathrm{Im}(x_i^1)$ ist $y_i^1 \in B_{n_1}^H$ für alle i mit $1 \leq i \leq k_1$.
Dieses Tupel ist unser gesuchtes.

Sei nun $1 < j \leq \ell$ und $\langle y_1^{j-1}, ..., y_{k_{j-1}}^{j-1}\rangle$ mit $y_i^{j-1} \in B_{n_{j-1}}^H$ für alle i schon definiert. Wir konstruieren dann $\langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j\rangle$ wie folgt: Es ist $\bigsqcup y^{j-1} := y_1^{j-1} \sqcup ... \sqcup y_{k_{j-1}}^{j-1} \in B_{n_{j-1}}^H$. Nach Hilfssatz 4.5.6 kann o.B.d.A. angenommen werden, daß die Paare $\langle \bigsqcup y^{j-1}, x_i^j\rangle$ isoliert

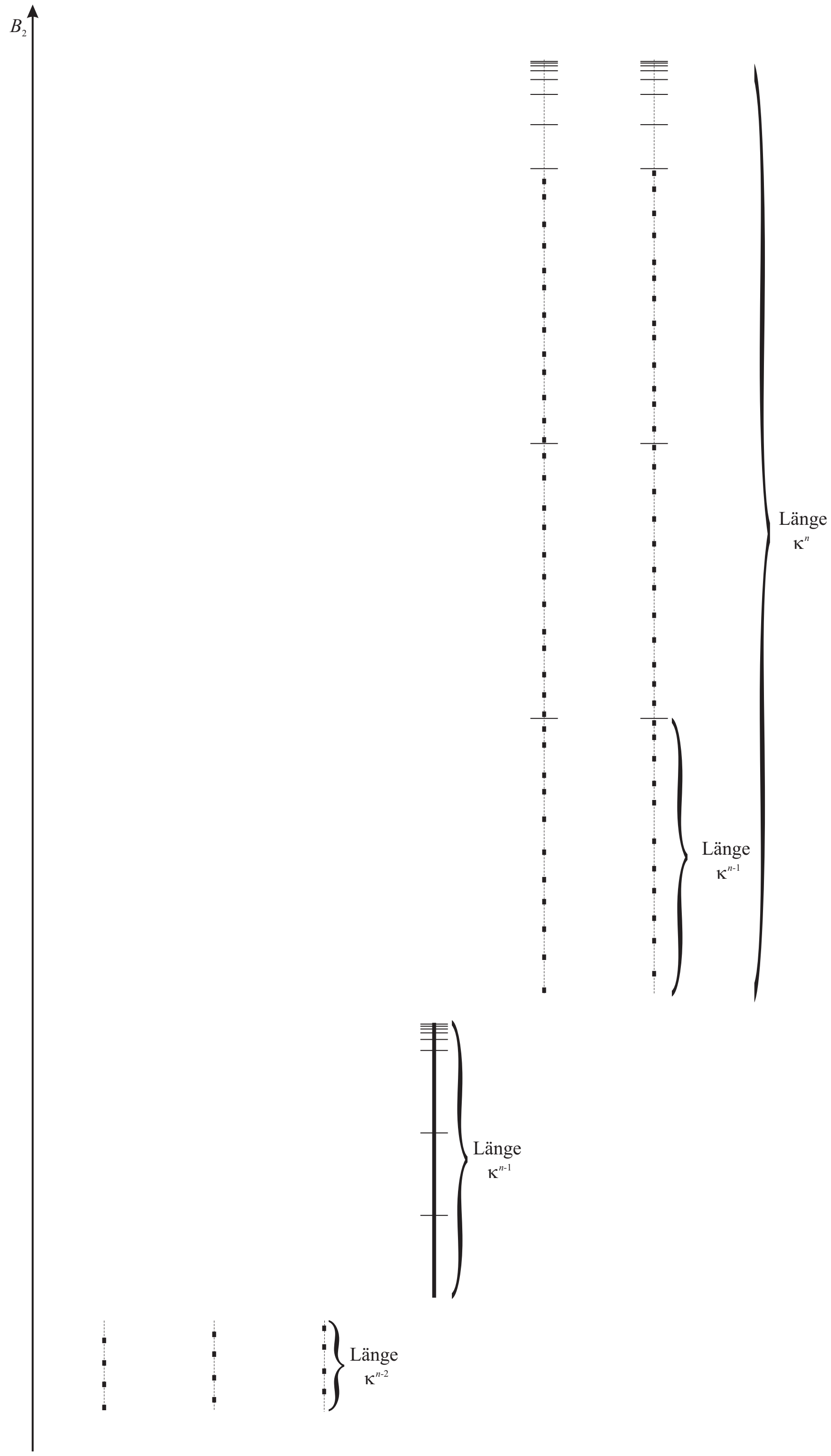

Abbildung 4.10: Tupel mit isolierten Komponenten.

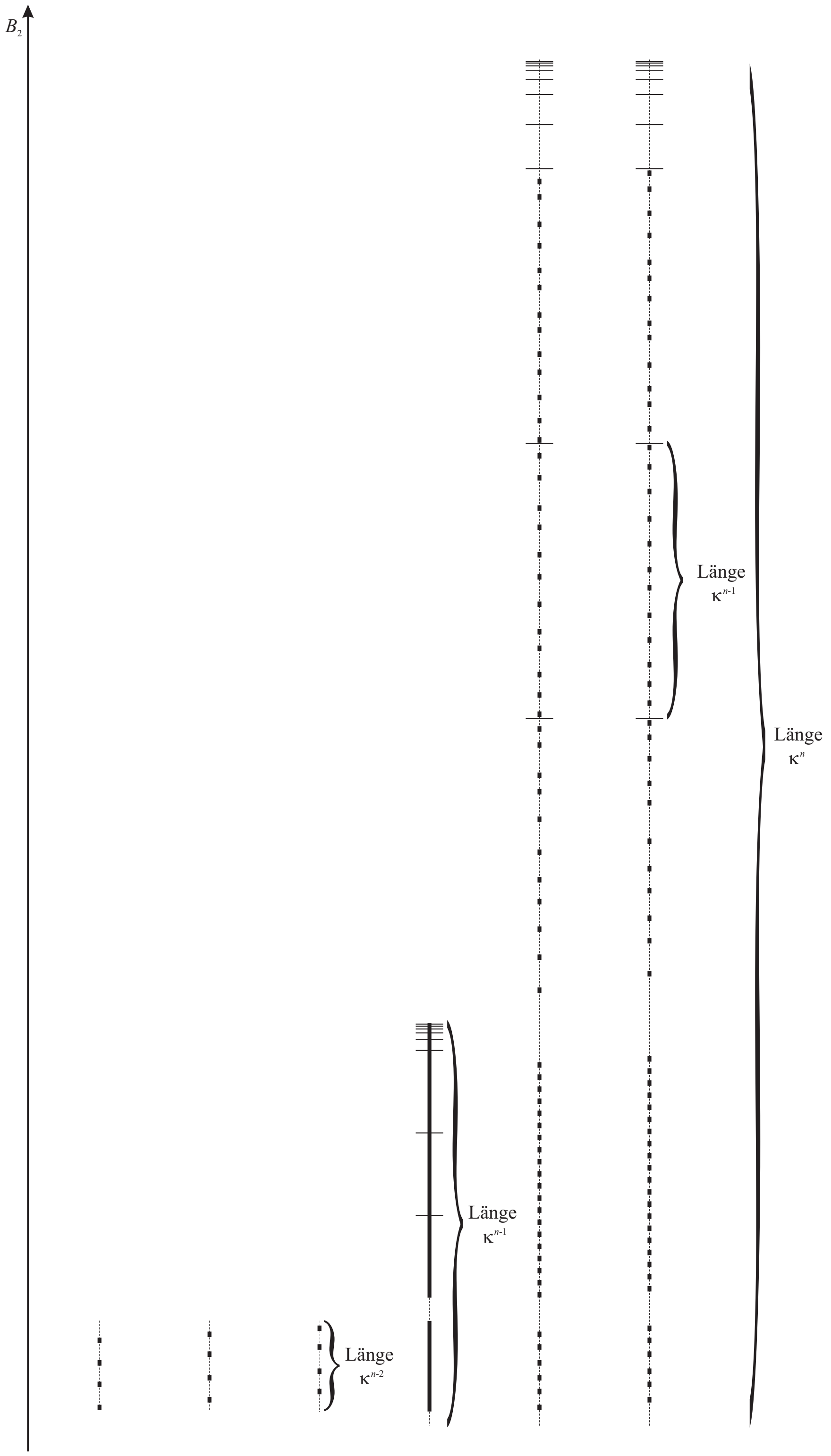

ABBILDUNG 4.11: Veranschaulichung von Hilfssatz 4.5.7

sind für alle i mit $1 \leq i \leq k_j$. Nach Satz 4.3.18 gibt es ein zu $\langle x_1^j, ..., x_{k_j}^j \rangle$ äquivalentes Tupel $\langle z_1^j, ..., z_{k_j}^j \rangle$ mit $\mathrm{Im}(z_i^j) \subseteq \mathrm{Im}(x_i^j)$ für alle i mit $1 \leq i \leq k_j$, welches kanonisch $I^{n_j}(k_j)$–verwoben ist.
Aus $\langle z_1^j, ..., z_{k_j}^j \rangle$ konstruieren wir nun das Tupel $\langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j \rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften. Für alle i unterscheidet sich y_i^j von z_i^j nur durch den ersten Block der Länge $\kappa^{n_{j-1}-1}$:
Sei also $1 \leq i \leq k_j$. Dann sei $y_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} (y_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1})_0 &:= (\bigsqcup y^{j-1})^{k_j, n_{j-1}-2, i}, \\ (y_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1})_m &:= (z_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1})_{m-1} \quad \text{für } 1 \leq m < \omega \;\; \text{und} \\ (y_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1})_\alpha &:= (z_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1})_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \geq \omega. \end{aligned}$$

Ansonsten sollen y_i^j und z_i^j übereinstimmen.
Nach Konstruktion ist $\langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j \rangle$ ebenfalls kanonisch $I^{n_j}(k_j)$–verwoben. Wegen $z_i^j \in B_{n_j}^H$ für alle i, und $\bigsqcup y^{j-1} \in B_{n_{j-1}}^H$ ist auch $y_i^j \in B_{n_j}^H$ für alle i mit $1 \leq i \leq k_j$.
Es gilt $y_i^j \approx_{n_j} z_i^j$ für alle i mit $1 \leq i \leq k_j$: Im Fall $n_j = n_{j-1} + 1$ gilt $y_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1} = y_i^j$, bzw. $z_i^j \restriction \kappa^{n_{j-1}-1} = z_i^j$, und somit $(y_i^j)_\alpha = (z_i^j)_\alpha$ für alle α mit $\omega \leq \alpha < \kappa$, also für $\mathcal{C}$–fast alle $\alpha < \kappa$. Damit gilt in diesem Fall $y_i^j \approx_{n_j} z_i^j$.
Im Fall $n_j > n_{j-1} + 1$ gilt sogar $(y_i^j)_\alpha = (z_i^j)_\alpha$ für alle $\alpha > 0$. Also folgt auch in diesem Fall $y_i^j \approx_{n_j} z_i^j$.

Somit sind die Folgen $\langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j \rangle$ für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ definiert. Wir setzen jetzt $y := \bigsqcup y^\ell = y_1^\ell \sqcup ... \sqcup y_{k_\ell}^\ell \in B_{n_\ell}^H$. Dann gilt nach Konstruktion $\mathrm{Kan}(y, n_j, k_j) = \langle y_1^j, ..., y_{k_j}^j \rangle$ für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ und somit $\mathrm{Kan}(y, N, K) = \langle y_1^1, ..., y_{k_1}^1 \rangle ^\frown ... ^\frown \langle y_1^\ell, ..., y_{k_\ell}^\ell \rangle$, d.h. das konstruierte Tupel ist kanonisch $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell) \rangle$–verwoben für y.

□

Somit gibt es für alle Folgen $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell) \rangle$ eine Funktion, die surjektiv auf den $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell) \rangle$–verwobenen Tupeln aus $\bigcup_{n_\gamma \leq n \in \omega} Q_n$ ist:

Korollar 4.5.8 Seien natürliche Zahlen $n_1, ..., n_\ell, k_1, ..., k_\ell$ mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ gegeben. Wie immer kürzen wir das Tupel $\langle n_1, ..., n_\ell \rangle$ mit N und das Tupel $\langle k_1, ..., k_\ell \rangle$ mit K ab.
Dann gibt es eine Surjektion $\Phi_{N,K}$ von $[H]^\kappa$ auf die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{N,K} \quad := \{ & S^{n_1}(k_1) ^\frown ... ^\frown S^{n_\ell}(k_\ell); \; S^{n_j}(k_j) \in [Q_{n_j}]^{k_j} \\ & \text{ist } I^{n_j}(k_j)\text{–verwoben für alle } j, 1 \leq j \leq \ell \} \end{aligned}$$

der $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell) \rangle$–verwobenen Tupel aus $\bigcup_{n_\gamma \leq n \in \omega} Q_n$.

Beweis:
Wir definieren $\Phi_{N,K} : [H]^\kappa \to (\bigcup_{2 \leq n \in \omega} B_n)^{k_1 + ... + k_\ell}$ durch $\Phi_{N,K}(f) := [\![\mathrm{Kan}(f, N, K)]\!]$.

$\Phi_{N,K}$ ist surjektiv auf der Menge $\mathcal{K}_{N,K}$:
Denn sei $S^{n_1}(k_1) ^\frown ... ^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{K}_{N,K}$, wobei also die Tupel $S^{n_j}(k_j)$ $I^{n_j}(k_j)$–verwobene Folgen aus Q_{n_j} seien für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$.
Nach Hilfssatz 4.5.7 gibt es ein $y \in B_{n_\ell}$, so daß $S^{n_j}(k_j) = [\![\mathrm{Kan}(y, n_j, k_j)]\!]$ ist für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$. Also ist dann $[\![\mathrm{Kan}(y, N, K)]\!] = S^{n_1}(k_1) ^\frown ... ^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$.
Setze nun $f := \mathrm{Misch}_{\kappa^{n_\ell - 2}}(\Upsilon_H(y)) \in [H]^\kappa$.

Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi_{N,K}(f) &= [\![\mathrm{Kan}(f,N,K)]\!] = [\![\mathrm{Kan}(x(f),N,K)]\!] \\ &= [\![\mathrm{Kan}(y,N,K)]\!] = S^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown S^{n_\ell}(k_\ell).\end{aligned}$$

Somit ist ein Urbild von $S^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$ gefunden.

□

Der nun gleich folgende Beweis, daß κ_ω eine Rowbottom–Zahl ist, ist nach einem sehr ähnlichen Muster aufgebaut wie der Nachweis der Jónsson–Eigenschaft der Zahlen κ_n. Wie in Lemma 4.4.21 werden abzählbar viele Funktionen auf $[\kappa]^\kappa$ definiert, die wegen der schwachen Partitionseigenschaft von κ eine homogene Menge besitzen.
Während uns in Lemma 4.4.21 Funktionen s_I und s_I^* zur Verfügung standen, um diese abzählbar vielen Funktionen zu definieren, setzen wir in diesem Fall hier ausschließlich diejenigen Funktionen ein, die jedem $f \in [\kappa]^\kappa$ das Tupel $[\![\mathrm{Kan}(f,N,K)]\!]$ zuordnen.
Die Idee hierbei ist, das Tupel $[\![\mathrm{Kan}(f,N,K)]\!]$ in einem gewissen Sinne zu halbieren und die Funktionswerte der beiden Hälften bezüglich einer gegebenen Partition zu betrachten. Dieses Prinzip gibt uns dann, genau wie in Lemma 4.4.21, die Definition der abzählbar vielen Funktionen auf $[\kappa]^\kappa$.
Wie diese Halbierung der Tupel $[\![\mathrm{Kan}(f,N,K)]\!]$ zu verstehen ist, wollen wir nun erklären:

Seien natürliche Zahlen $n_1, ..., n_\ell$ mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und ebenfalls natürliche Zahlen $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ gegeben. Sei außerdem $x \in B_{n_\ell}$.
Dann sei für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$

$$\begin{aligned}\mathrm{Kan}(x, n_j, 2\cdot k_j)_1 &:= \langle (x\restriction\kappa^{n_j-2})^{2\cdot k_j, n_j-2, 1}, ..., (x\restriction\kappa^{n_j-2})^{2\cdot k_j, n_j-2, k_j}\rangle \quad \text{und} \\ \mathrm{Kan}(x, n_j, 2\cdot k_j)_2 &:= \langle (x\restriction\kappa^{n_j-2})^{2\cdot k_j, n_j-2, k_j+1}, ..., (x\restriction\kappa^{n_j-2})^{2\cdot k_j, n_j-2, 2\cdot k_j}\rangle.\end{aligned}$$

Setzen wir $2\cdot K := \langle 2\cdot k_1, ..., 2\cdot k_\ell\rangle$, so gilt

$$\mathrm{Kan}(x, N, 2\cdot K) = \mathrm{Kan}(x, n_1, 2\cdot k_1)^\frown ...^\frown \mathrm{Kan}(x, n_\ell, 2\cdot k_\ell).$$

Für $i \in \{1, 2\}$ sei dann

$$\mathrm{Kan}(x, N, 2\cdot K)_i := \mathrm{Kan}(x, n_1, 2\cdot k_1)_i{}^\frown ...^\frown \mathrm{Kan}(x, n_\ell, 2\cdot k_\ell)_i.$$

Für $i \in \{1, 2\}$ seien die Tupel $[\![\mathrm{Kan}(x, n_j, 2\cdot k_j)_i]\!]$ und $[\![\mathrm{Kan}(x, N, 2\cdot K)_i]\!]$ wieder die Äquivalenzklassentupel von $\mathrm{Kan}(x, n_j, 2\cdot k_j)_i$ bzw. von $\mathrm{Kan}(x, N, 2\cdot K)_i$.

In Abbildung 4.12 stellen wir für eine Folge $x \in B_{n+1}$ die Tupel $\mathrm{Kan}(x, \langle n, n+1\rangle, \langle 2, 4\rangle)_1$ und $\mathrm{Kan}(x, \langle n, n+1\rangle, \langle 2, 4\rangle)_2$ dar.

Wir werden zum Nachweis der Rowbottom–Eigenschaft eine Funktion auf $[\kappa_\omega]^{<\omega}$ betrachten. Die endlichen Folgen in κ_ω bringen wir in Verbindung mit endlichen Folgen in $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n/\!\approx_n$. Über die Funktionen σ_n kann nämlich jeder Folge aus $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n/\!\approx_n$ eine endliche Folge in κ_ω zugeordnet werden.
Allerdings ist diese zugeordnete Folge im allgemeinen nicht aufsteigend. Daher führen wir nun eine Bezeichnung ein, die jeder endlichen Folge in $\bigcup_{2\leq n\in\omega} B_n/\!\approx_n$ eine aufsteigende Folge in κ_ω zuordnet:

Seien $S^{n_j}(k_j) = \langle [\![x_1^j]\!]_{n_j}, ..., [\![x_{k_j}^j]\!]_{n_j}\rangle$ beliebige Folgen der Länge k_j in $B_{n_j}/\!\approx_{n_j}$ für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$, $S := S^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$.
Dann sei S^σ die eindeutig bestimmte endliche, streng aufsteigende Folge in κ_ω, die genau die Elemente von $\bigcup_{1\leq j\leq \ell}\{\sigma_{n_j}([\![x_i^j]\!]_{n_j});\ 1 \leq i \leq k_j\}$ enthält.

Die nötigen Bezeichnungen und Hilfssätze sind nun vorhanden, um das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen:

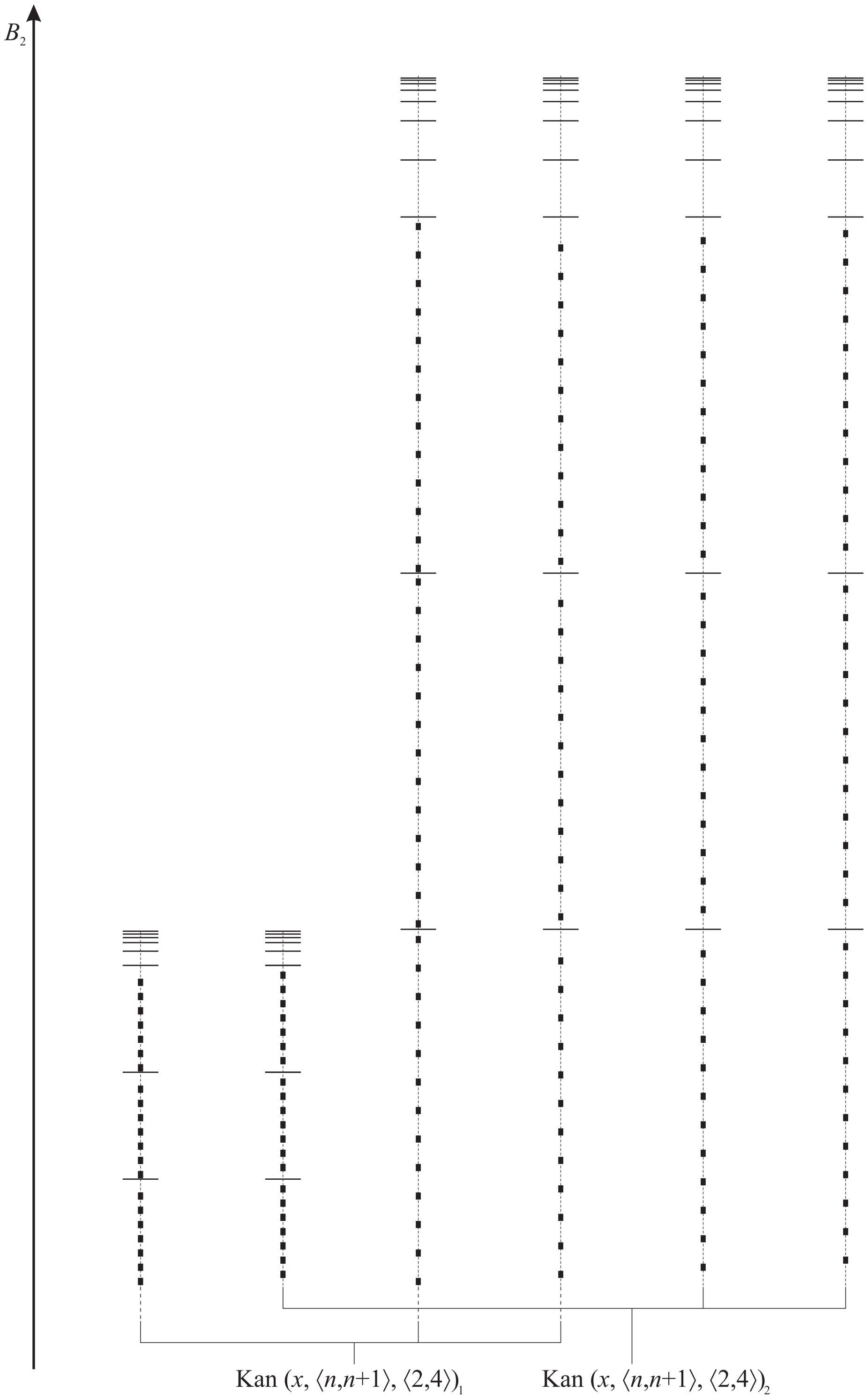

ABBILDUNG 4.12: Darstellung der Folgen $\mathrm{Kan}(x, \langle n, n+1\rangle, \langle 2,4\rangle)_i$

Satz 4.5.9 κ besitze die schwache Partitionseigenschaft, d.h. $\kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{2}$.
Dann ist κ_ω eine Rowbottom–Zahl.

Beweis:
Sei $\gamma < \kappa_\omega$ beliebig, $F : [\kappa_\omega]^{<\omega} \to \gamma$ eine Partition.
Wir müssen zeigen, daß es ein $M \subseteq \kappa_\omega$ vom Ordnungstyp κ_ω gibt mit $|F"[M]^{<\omega}| \leq \aleph_0$.
n_γ sei wieder die kleinste natürliche Zahl n, so daß $\gamma < \kappa_{n-1}$ gilt.

Für alle Folgen $N = \langle n_1, ..., n_\ell \rangle$ und $K = \langle k_1, ..., k_\ell \rangle$ natürlicher Zahlen mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$, und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ definieren wir eine Funktion $G_{N,K} : [\kappa]^\kappa \to 2$ durch

$$G_{N,K}(f) = 0 \iff F([\![\mathrm{Kan}(f, N, 2 \cdot K)_1]\!]^\sigma) = F([\![\mathrm{Kan}(f, N, 2 \cdot K)_2]\!]^\sigma).$$

Dadurch sind abzählbar viele Funktionen $G_{N,K}$ definiert. Wegen der schwachen Partitionseigenschaft von κ können wir Satz 3.2.11 anwenden, und wir erhalten eine Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp κ, die homogen für alle Funktionen $G_{N,K}$ ist.
Für diese Menge H und das durch die Partition F vorgegebene $\gamma < \kappa_\omega$ seien nun die Mengen Q_n für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_\gamma$ wie in den vorhergehenden Hilfssätzen definiert. Diese Mengen Q_n werden uns später die quasihomogene Menge von F liefern. Dazu machen wir zunächst die folgende Beobachtung:

1. BEHAUPTUNG: Es gilt $G_{N,K}"[H]^\kappa = \{0\}$ für alle Folgen $N = \langle n_1, ..., n_\ell \rangle$ und $K = \langle k_1, ..., k_\ell \rangle$ natürlicher Zahlen mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$.

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Seien Folgen $N = \langle n_1, ..., n_\ell \rangle$ und $K = \langle k_1, ..., k_\ell \rangle$ gegeben, wobei $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ gelte und alle k_j größer als 0 seien.
Wir numerieren die Mengen Q_{n_j} wie folgt durch:

$$Q_{n_j} := \{q_i^{\nu,j}; \nu < \kappa_{n_j-1}, 1 \leq i \leq k_j\},$$

wobei für alle $\nu < \kappa_{n_j-1}$ gelten soll:

$$q_1^{\nu,j} \prec_{n_j} ... \prec_{n_j} q_{k_j}^{\nu,j} \prec_{n_j} q_1^{\mu,j} \quad \text{für alle } \mu > \nu.$$

Man teilt also Q_{n_j} in k_j Blöcke auf, denen man in abwechselnder Reihenfolge die der Größe nach geordneten Elemente von Q_{n_j} zuordnet.

Wir setzen dann $T_\nu^{n_j}(k_j) := \langle q_1^{\nu,j}, ..., q_{k_j}^{\nu,j} \rangle$ für alle $\nu < \kappa_{n_j-1}$. Nach Definition von Q_{n_j} ist $T_\nu^{n_j}(k_j)$ $I^{n_j}(k_j)$–verwoben für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$.
Wir betrachten nun für alle $\nu < \kappa_{n_1-1}$ die $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell) \rangle$–verwobenen Tupel $T_\nu^N(K) := T_\nu^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown T_\nu^{n_\ell}(k_\ell)$. Es sind genau κ_{n_1-1} solche Folgen $T_\nu^N(K)$ definiert, da die Anzahl dieser Folgen durch die Anzahl der Folgen $T_\nu^{n_1}(k_1)$ begrenzt ist.

Da jedoch $\gamma < \kappa_{n_1-1} < ... < \kappa_{n_\ell-1}$ gilt, gibt es Ordinalzahlen $\nu_1 < \nu_2 < \kappa_{n_1-1}$ mit

$$F(T_{\nu_1}^N(K)^\sigma) = F(T_{\nu_2}^N(K)^\sigma).$$

Wir wenden nun Korollar 4.5.8 auf die $\langle I^{n_1}(2 \cdot k_1), ..., I^{n_\ell}(2 \cdot k_\ell) \rangle$–verwobene Folge $T_{\nu_1,\nu_2}(2 \cdot K) := T_{\nu_1}^{n_1}(k_1)^\frown T_{\nu_2}^{n_1}(k_1)^\frown ...^\frown T_{\nu_1}^{n_\ell}(k_\ell)^\frown T_{\nu_2}^{n_\ell}(k_\ell)$ an.
Nach Korollar 4.5.8 gibt es ein $f \in [H]^\kappa$ mit $T_{\nu_1,\nu_2}(2 \cdot K) = [\![\mathrm{Kan}(f, N, 2 \cdot K)]\!]$.

Da wir die Mengen Q_n so durchnumeriert haben, daß für $T_{\nu_1}^{n_j}(k_j) := \langle [\![x_1]\!]_{n_j}, ..., [\![x_{k_j}]\!]_{n_j} \rangle$ und $T_{\nu_2}^{n_j}(k_j) := \langle [\![y_1]\!]_{n_j}, ..., [\![y_{k_j}]\!]_{n_j} \rangle$ gilt:

$$[\![x_1]\!]_{n_j} \prec_{n_j} ... \prec_{n_j} [\![x_{k_\ell}]\!]_{n_j} \prec_{n_j} [\![y_1]\!]_{n_j} \prec_{n_j} ... \prec_{n_j} [\![y_{k_\ell}]\!]_{n_j},$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned} [\![\mathrm{Kan}(f, N, 2 \cdot K)_1]\!] &= T_{\nu_1}^N(K) \quad \text{und} \\ [\![\mathrm{Kan}(f, N, 2 \cdot K)_2]\!] &= T_{\nu_2}^N(K). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} F(\llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_1\rrbracket^\sigma) &= F(T^N_{\nu_1}(K)^\sigma) = F(T^N_{\nu_2}(K)^\sigma) \\ &= F(\llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_2\rrbracket^\sigma), \end{aligned}$$

und somit ist $G_{N,K}(f) = 0$. Wegen $f \in [H]^\kappa$ und da H homogen für $G_{N,K}$ ist, folgt nun die Behauptung: Es gilt $G_{N,K}"[H]^\kappa = \{0\}$.

Wir definieren nun für alle $n \geq n_\gamma$ Mengen $M_n := \{\sigma_n(\llbracket x\rrbracket_n);\ \llbracket x\rrbracket_n \in Q_n\}$. Für alle n hat die Menge M_n denselben Ordnungstyp wie Q_n, also κ_{n-1}. Somit besitzt $M := \bigcup_{n_\gamma\leq n\in\omega} M_n \subseteq \kappa_\omega$ Ordnungstyp κ_ω. Die Menge M ist die gesuchte quasihomogene Menge für F:

2. Behauptung: $|F"[M]^{<\omega}| \leq \aleph_0$.

Beweis der 2. Behauptung:
Wieder seien Folgen $N := \langle n_1, ..., n_\ell\rangle$ und $K := \langle k_1, ..., k_\ell\rangle$ natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ gegeben.

Seien nun $S^N_1(K)$ und $S^N_2(K)$ zwei Folgen in $\bigcup_{n_\gamma\leq n\in\omega} Q_n$ so, daß $S^N_1(K) = S^{n_1}_1(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_1(k_\ell)$ und $S^N_2(K) = S^{n_1}_2(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_2(k_\ell)$ sind, wobei $S^{n_j}_1(k_j) := \langle \llbracket x^j_1\rrbracket_{n_j}, ..., \llbracket x^j_{k_j}\rrbracket_{n_j}\rangle$ und $S^{n_j}_2(k_j) := \langle \llbracket y^j_1\rrbracket_{n_j}, ..., \llbracket y^j_{k_j}\rrbracket_{n_j}\rangle$ für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ Folgen in Q_{n_j} der Länge k_j seien.

Dann sind also $S^N_1(K)$ und $S^N_2(K)$ beide $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–verwoben.

Für alle j mit $1 \leq j \leq \ell$ hat Q_{n_j} Ordnungstyp κ_{n_j-1}, also kann eine Folge $S^{n_j}_3(k_j) = \langle \llbracket z^j_1\rrbracket_{n_j}, ..., \llbracket z^j_{k_j}\rrbracket_{n_j}\rangle$ der Länge k_j in Q_{n_j} gewählt werden, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \llbracket x^j_1\rrbracket_{n_j} &\prec_{n_j} ... \prec_{n_j} \llbracket x^j_{k_j}\rrbracket_{n_j} \prec_{n_j} \llbracket z^j_1\rrbracket_{n_j} \prec_{n_j} ... \prec_{n_j} \llbracket z^j_{k_j}\rrbracket_{n_j} \quad \text{und} \\ \llbracket y^j_1\rrbracket_{n_j} &\prec_{n_j} ... \prec_{n_j} \llbracket y^j_{k_j}\rrbracket_{n_j} \prec_{n_j} \llbracket z^j_1\rrbracket_{n_j} \prec_{n_j} ... \prec_{n_j} \llbracket z^j_{k_j}\rrbracket_{n_j}. \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.5.8 gibt es Funktionen $f, g \in [H]^\kappa$ mit

$$\begin{aligned} \llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)\rrbracket &= S^{n_1}_1(k_1)^\frown S^{n_1}_3(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_1(k_\ell)^\frown S^{n_\ell}_3(k_\ell) \quad \text{und} \\ \llbracket \mathrm{Kan}(g,N,2\cdot K)\rrbracket &= S^{n_1}_2(k_1)^\frown S^{n_1}_3(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_2(k_\ell)^\frown S^{n_\ell}_3(k_\ell). \end{aligned}$$

Dabei gilt dann

$$\begin{aligned} \llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_1\rrbracket &= S^{n_1}_1(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_1(k_\ell) = S^N_1(K), \\ \llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_2\rrbracket &= S^{n_1}_3(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_3(k_\ell), \\ \llbracket \mathrm{Kan}(g,N,2\cdot K)_1\rrbracket &= S^{n_1}_2(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_2(k_\ell) = S^N_2(K) \quad \text{und} \\ \llbracket \mathrm{Kan}(g,N,2\cdot K)_2\rrbracket &= S^{n_1}_3(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}_3(k_\ell). \end{aligned}$$

Nach der ersten Behauptung ist $G_{N,K}(f) = G_{N,K}(g) = 0$, also gilt

$$\begin{aligned} F(S^N_1(K)^\sigma) &= F(\llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_1\rrbracket^\sigma) = F(\llbracket \mathrm{Kan}(f,N,2\cdot K)_2\rrbracket^\sigma) \\ &= F(\llbracket \mathrm{Kan}(g,N,2\cdot K)_2\rrbracket^\sigma) = F(\llbracket \mathrm{Kan}(g,N,2\cdot K)_1\rrbracket^\sigma) \\ &= F(S^N_2(K)^\sigma). \end{aligned}$$

Für alle endlichen Folgen χ in M gibt es nach Definition von M natürliche Zahlen $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ sowie Folgen $S^{n_j}(k_j)$ in Q_{n_j} der Länge k_j, so daß mit $S^N(K) := S^{n_1}(k_1)^\frown...^\frown S^{n_\ell}(k_\ell)$ gilt: $S^N(K)^\sigma = \chi$.

Wir haben eben gezeigt, daß für feste Folgen $N = \langle n_1, ..., n_\ell\rangle$ und $K = \langle k_1, ..., k_\ell\rangle$ natürlicher Zahlen mit $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ alle Folgen χ der Form

$\chi = S^N(K)^\sigma$, wobei $S^N(K)$ eine $\langle I^{n_1}(k_1), ..., I^{n_\ell}(k_\ell)\rangle$–verwobene Folge ist, durch F auf denselben Wert abgebildet werden.
Da es aber nur abzählbar viele verschiedene Folgen $\langle n_1, ..., n_\ell, k_1, ..., k_\ell\rangle$ mit den Eigenschaften $n_\gamma \leq n_1 < ... < n_\ell$ und $k_1, ..., k_\ell \geq 1$ in ω gibt, kann F auf $[M]^{<\omega}$ höchstens abzählbar viele Werte annehmen, also $|F"[M]^{<\omega}| \leq \aleph_0$.

Somit ist eine Teilmenge M von κ_ω gefunden, die Ordnungstyp κ_ω besitzt und für die $|F"[M]^{<\omega}| \leq \aleph_0$ gilt. Dies zeigt jedoch, daß κ_ω eine Rowbottom–Zahl ist[5].

□

Wir sind nun in der Lage, den Teil des Satzes von Kleinberg, den wir zu Beginn dieses Kapitels vorgestellt hatten, zu beweisen, der lediglich die schwache Partitionseigenschaft benutzt (also die Eigenschaften (1) bis (5)). Zur Erinnerung wiederholen wir hier die Aussage:

Satz 4.5.10 (ZSF+DC)[6]
Sei κ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft. Dann gibt es eine aufsteigende Folge $\langle \kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\rangle$ von Kardinalzahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\kappa = \kappa_1$ ist meßbar. Insbesondere ist κ regulär.

(2) κ_2 ist schwach kompakt und somit ebenfalls regulär.

(3) Alle κ_n für $n \geq 1$ sind Jónsson–Zahlen.

(4) Alle κ_n für $n \geq 3$ sind singulär mit Konfinalität κ_2.

(5) $\kappa_\omega = \mathrm{Sup}\{\kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\}$ ist eine Rowbottom–Zahl.

Beweis: Aus Satz 4.4.19 folgt, daß $\langle \kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\rangle$ eine aufsteigende Folge von Ordinalzahlen ist. Satz 4.4.2 besagt, daß die Zahlen κ_n sogar Kardinalzahlen sind. Wir betrachten nun noch die aufgelisteten Eigenschaften:

(1) Die Meßbarkeit von κ folgt aus Satz 3.1.4. Aus Satz 2.1.38 ergibt sich die Regularität von κ.

(2) κ_2 ist schwach kompakt nach Hilfssatz 4.2.7 und regulär nach Lemma 2.4.7.

(3) Die Jónsson–Eigenschaft der Zahlen κ_n folgt aus Satz 4.4.22.

(4) Nach Satz 4.4.20 besitzen die Zahlen κ_n für $n \geq 2$ Konfinalität κ_2. Für $n \geq 3$ ist κ_n somit singulär.

(5) κ_ω ist nach Satz 4.5.9 eine Rowbottom–Zahl.

□

[5] Wir bemerken, daß derselbe Beweis, wie zu Beginn dieses Abschnitts schon erwähnt, für jedes n mit $\gamma < \kappa_{n-1}$ die Partitionseigenschaft $\kappa_n \to [\kappa_{n-1}]^{<\omega}_{\gamma, <\aleph_1}$ gibt, wobei Q_n die quasihomogene Menge ist. Das Resultat folgt auf dieselbe Weise mit dem einzigen Unterschied, daß man sich auf Folgen aus Q_n beschränkt.

[6] Wie schon auf Seite 58 erwähnt wurde, kann dieser Satz auch ohne DC bewiesen werden. DC wurde vor allem vorausgesetzt, um Satz 2.1.39 anwenden zu können und somit die Existenz eines normalen, κ–vollständigen Ultrafilters auf κ zu gewährleisten. In dieser Situation hier können wir jedoch nach Satz 3.1.4 wegen der schwachen Partitionseigenschaft von κ solche Filter auf κ direkt angeben.

4.6 Die Größe der Zahlen κ_n

Nun wollen wir die Zahlen κ_n genauer berechnen. Hierzu verlangen wir zusätzlich zur schwachen Partitionseigenschaft eine weitere Eigenschaft von κ: Es soll $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$ gelten. Mit dieser Zusatzvoraussetzung folgen die Zahlen κ_n sogar direkt aufeinander.

Satz 4.6.1 Sei κ eine Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft, $\mathcal{C}$ ein normaler Ultrafilter auf κ und $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$.
Dann gilt $\kappa_n^+ = \kappa_{n+1}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Beweis:
1. BEHAUPTUNG: Für alle $n \geq 1$ ist κ_{n+1} in $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$ einbettbar[7].

BEWEIS DER 1. BEHAUPTUNG:
Es genügt, für alle $n \geq 1$ eine ordnungserhaltende Abbildung $\tau : A_{n+1}/{\sim_{n+1}} \to (A_n/{\sim_n})^\kappa/\mathcal{C}$ zu finden.
Betrachte zunächst den Fall $n = 1$. Es gilt $A_2/{\sim_2} \cong [\kappa]^\kappa/\mathcal{C} \subseteq \kappa^\kappa/\mathcal{C}$. Also stimmt für $n = 1$ die Behauptung.
Sei nun $n > 1$. Für $X \in A_{n+1}$ sei $\varphi_X : \kappa \to A_n/{\sim_n}$ durch

$$\varphi_X(\alpha) := [\![X_\alpha]\!]_n \quad \text{für alle } \alpha < \kappa$$

definiert.
Damit kann nun eine Funktion $\tau : A_{n+1}/{\sim_{n+1}} \to (A_n/{\sim_n})^\kappa/\mathcal{C}$ durch

$$\tau([\![X]\!]_{n+1}) := [\varphi_X]_\mathcal{C}$$

definiert werden.

τ ist wohldefiniert: Denn seien $X, Y \in A_{n+1}$ mit $X \sim_{n+1} Y$ gegeben. Dann ist $\{\alpha < \kappa;\ X_\alpha \sim_n Y_\alpha\} \in \mathcal{C}$, also $\{\alpha < \kappa;\ \varphi_X(\alpha) = \varphi_Y(\alpha)\} \in \mathcal{C}$, das heißt $[\varphi_X]_\mathcal{C} = [\varphi_Y]_\mathcal{C}$.

τ ist ordnungserhaltend: Denn seien X, $Y \in A_{n+1}$ mit $[\![X]\!]_{n+1} <_{n+1} [\![Y]\!]_{n+1}$ gegeben. Dann gilt $\{\alpha < \kappa;\ \varphi_X(\alpha) = [\![X_\alpha]\!]_n <_n [\![Y_\alpha]\!]_n = \varphi_Y(\alpha)\} \in \mathcal{C}$, d.h. $\varphi_X < \varphi_Y$ $\mathcal{C}$–fast überall und somit $[\varphi_X]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [\varphi_Y]_\mathcal{C}$.
Also ist die Behauptung bewiesen.

Nun zurück zum eigentlichen Beweis:
Wir beweisen induktiv, daß $\kappa_n^+ = \kappa_{n+1}$ und $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$ Mächtigkeit κ_{n+1} besitzt.
Sei zunächst $n = 1$. Nach der 1. Behauptung und der Voraussetzung sowie Satz 4.4.19 gilt dann:

$$\kappa = \kappa_1 < \kappa_2 \leq |\kappa^\kappa/\mathcal{C}| = \kappa^+.$$

Also gilt $\kappa_1^+ = \kappa_2$. Daß $\kappa_1^\kappa/\mathcal{C}$ Ordnungstyp κ_2 besitzt, ist nach Voraussetzung wahr.

Sei nun $n > 1$ und es gelte $\kappa_{n-1}^+ = \kappa_n$ und $|\kappa_{n-1}^\kappa/\mathcal{C}| = \kappa_n$.
Sei $K := \{[c_\gamma]_\mathcal{C} \in \kappa_n^\kappa/\mathcal{C}; \gamma < \kappa_n \ \ \&\ \ c_\gamma(\alpha) = \gamma \text{ für alle } \alpha < \kappa\}$ die Menge der konstanten Punkte von $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$.

2. BEHAUPTUNG:
K ist konfinal in $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$.

BEWEIS DER 2. BEHAUPTUNG: Sei $f \in \kappa_n^\kappa$. Da κ_n nach Satz 4.4.20 die Konfinalität κ_2 besitzt und nach Satz 4.4.19 $\kappa < \kappa_2$ gilt, gibt es ein $\gamma \in \kappa_n$ mit $f(\alpha) < \gamma$ für alle $\alpha < \kappa$. Also gilt $[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [c_\gamma]_\mathcal{C}$. Damit ist gezeigt, daß es für alle $[f]_\mathcal{C} \in \kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$ ein $\gamma \in \kappa_n$ gibt mit $[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [c_\gamma]_\mathcal{C}$. Also ist K konfinal in $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$.

[7] Die Voraussetzung $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$ wird zum Beweis dieser Behauptung nicht benötigt.

3. BEHAUPTUNG: Jedes echte Anfangssegment von $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$ hat höchstens Kardinalität κ_n.

BEWEIS DER 3. BEHAUPTUNG:
Sei I ein echtes Anfangssegment von $\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}$. Nach der 2. Behauptung gibt es ein $\gamma \in \kappa_n$ mit $[f]_\mathcal{C} <_\mathcal{C} [c_\gamma]$ für alle $[f]_\mathcal{C} \in I$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|\gamma| \leq \kappa_{n-1}$.
Also gilt nach Hilfssatz 2.1.33 und der Induktionsvoraussetzung

$$|I| \leq |\gamma^\kappa/\mathcal{C}| \leq |\kappa_{n-1}^\kappa/\mathcal{C}| = \kappa_n.$$

Daraus kann man nun schließen, daß $|\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}| \leq \kappa_n^+$ ist.

Insgesamt erhält man mit Satz 4.4.19 und der 1. Behauptung

$$\kappa_n < \kappa_{n+1} \leq |\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}| \leq \kappa_n^+,$$

also $\kappa_{n+1} = \kappa_n^+ = |\kappa_n^\kappa/\mathcal{C}|$.

□

Schon zu Beginn unserer Untersuchungen hatten wir festgestellt, daß die schwache Partitionseigenschaft einer Kardinalzahl κ mit AC inkonsistent ist, siehe Satz 2.4.3. Das soeben gewonnene Ergebnis ist ein weiterer Beweis dafür, daß AC falsch ist, wenn κ die schwache Partitionseigenschaft besitzt und zusätzlich die Ultrapotenz von κ modulo einem normalen Ultrafilter auf κ die Kardinalität κ^+ besitzt. Denn sind diese beiden Eigenschaften erfüllt, so gibt es nach Satz 4.4.20 und Satz 4.6.1 singuläre Nachfolgerzahlen, was eine besonders starke Verletzung des Auswahlaxioms darstellt.

Zusammen mit Satz 4.5.10 gibt Satz 4.6.1 nun den Satz von Kleinberg 4.1.1, wie er zu Beginn von Kapitel 4 dargestellt wurde.

Wir hatten schon in Kapitel 3 gesehen, daß es unter der Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit eine Kardinalzahl gibt, die beide Voraussetzungen des Satzes von Kleinberg erfüllt, nämlich $\aleph_1$. Es folgt somit:

Korollar 4.6.2 (Mit ZSF+AD+DC)[8]

(1) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist $\aleph_n$ eine Jónsson–Zahl.

(2) Für $n \geq 3$ ist $\aleph_n$ singulär.

(3) Die Zahl $\aleph_\omega$ ist eine Rowbottom–Zahl.

Beweis: Nach Satz 3.4.5 besitzt $\aleph_1$ die schwache Partitionseigenschaft. Wir wissen außerdem nach Proposition 2.1.20, Proposition 2.1.21 und Satz 3.3.6, daß der Clubfilter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ ein normaler, $\aleph_1$–vollständiger, freier Ultrafilter auf $\aleph_1$ ist. Konstruiert man für $\kappa := \aleph_1$ und $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\aleph_1}$ die Zahlen κ_n wie in Abschnitt 4.2, so sind diese Zahlen nach Satz 4.4.22 Jónsson–Zahlen. Nach Satz 4.4.20 ist κ_n für alle $n \geq 3$ singulär. Es gilt $\aleph_1^{\aleph_1}/\mathcal{C} \cong \aleph_2$ nach Korollar 3.5.4 . Daher sind die Zahlen κ_n nach Satz 4.6.1 die ersten ω direkten Nachfolger von $\aleph_1$, also $\kappa_n = \aleph_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.
Es gilt außerdem $\kappa_\omega = \mathrm{Sup}\{\kappa_n;\ 1 \leq n \in \omega\} = \mathrm{Sup}\{\aleph_n;\ n \in \omega\} = \aleph_\omega$. Nach Satz 4.5.9 ist somit $\aleph_\omega$ eine Rowbottom–Zahl.

□

[8] Wie bei Satz 4.1.1 kann auch hier auf die Voraussetzung von DC verzichtet werden.

Kapitel 5

Ausblick

Im Verlauf dieser Arbeit ergab sich eine Vielzahl von interessanten Fragen, deren weitere Untersuchung sehr lohnend erscheint. All diese Fragen bauen auf den schon bestehenden Kenntnissen über Partitionskardinalzahlen und anderen großen Kardinalzahlen unter AD auf. Wir wollen einige dieser Kenntnisse, die größtenteils in dieser Arbeit dargestellt wurden, auflisten:

(a) $\aleph_1 \to (\aleph_1)_2^{\aleph_1}$, vergleiche Satz 3.4.5.

(b) $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_{\omega+1}$ und $\aleph_{\omega+2}$ sind meßbar, vergleiche Satz 3.3.5, Satz 3.3.7, sowie [Kechris, 1978].

(c) $\aleph_n$ ist für $1 \leq n \in \omega$ eine Jónsson–Zahl, vergleiche Korollar 4.6.2.

(d) $\aleph_\omega$ ist eine Rowbottom–Zahl, siehe Korollar 4.6.2.

Die Fragen, die sich hieraus ergeben, lassen sich grundsätzlich zwei Typen zuordnen: Der eine Teil der Fragen betrifft die Vertiefung der Kenntnisse über Partitionskardinalzahlen unter AD. Die anderen Fragen befassen sich mit der genauen Konsistenzstärke der schon bekannten Resultate unter AD, beispielsweise der oben aufgeführten. Einige der Fragen, die besonders interessant zu sein scheinen, wollen wir nun etwas detaillierter beschreiben:

(1) Interessant ist die Untersuchung leichter Abwandlungen der Frage, ob eine Zahl κ für eine bestimmte Klasse $\mathcal{A}$ von Algebren eine $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahl ist.
Eine mögliche Abwandlung dieser Frage für einige der Klassen $\mathcal{A}$ von Algebren lautet: Besitzt eine Algebra A eine direkte Zerlegung in Summanden, die dieselbe Kardinalität wie A besitzen? Dabei werden nur solche Klassen von Algebren betrachtet, bei denen der Begriff der direkten Summe Sinn macht, also z.B. Gruppen. Eine positive Antwort dieser Frage impliziert insbesondere, daß A keine Jónsson–Algebra ist. Dies bedeutet, daß jede Kardinalzahl κ, für die alle Algebren der Kardinalität κ eine Zerlegung in Summanden derselben Kardinalität besitzen, insbesondere auch eine $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahl ist. Ulrich Felgner und Klaus Schulz beantworten diese Frage in [Felgner und Schulz, 1984] für die Gruppe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ unter Voraussetzung des Axioms der Determiniertheit. Sie zeigen sogar, daß $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ unter AD überhaupt nicht in eine direkte Summe von Untergruppen zerlegbar ist.
Die Methoden, die Felgner und Schulz in dieser Veröffentlichung benutzen, legen nahe, daß ein Zusammenhang zwischen AD und den Algebren, von denen in der oben formulierten Frage die Rede ist, besteht. Es wäre interessant, diesen Zusammenhang näher zu erforschen.

(2) Der Beweis von Kleinberg, daß die Zahlen $\aleph_n$ Jónsson–Zahlen sind, zeigt sogar eine noch stärkere Eigenschaft von $\aleph_n$, nämlich die Eigenschaft $\aleph_n \to [\aleph_n]^{<\omega}_{\gamma,<\aleph_1}$ für $\gamma < \aleph_2$, siehe Lemma 4.4.21. Naheliegend ist daher die Frage, ob aus Kleinbergs Beweis

noch stärkere große Kardinalzahl–Eigenschaften der Zahlen $\aleph_n$ gewonnen werden können. Ein möglicher Ansatz wäre hier, zu überprüfen, ob die Zahlen $\aleph_n$ unter AD sogenannte starke Jónsson–Zahlen sind. Diese Zahlen wurden von Ronald Jensen eingeführt, um zu zeigen, daß die Einbettung, die durch Woodins stationären Turm hinzugefügt wird, fundiert ist, vergleiche [HEGEWALD, 1997, Abschnitt 3.3]. Starke Jónsson–Zahlen sind insbesondere Jónsson–Zahlen.

(3) $\aleph_1$ ist unter AD nicht die einzige Kardinalzahl mit der schwachen Partitionseigenschaft. Jackson hat gezeigt, daß jede zweite projektive Ordinalzahl $\boldsymbol{\delta}^1_n$ die schwache Partitionseigenschaft besitzt. Die projektiven Ordinalzahlen sind wie folgt definiert: Für $n \geq 1$ sei

$$\boldsymbol{\delta}^1_n := \mathrm{Sup}\{\xi;\ \xi \text{ ist der Ordnungstyp einer } \boldsymbol{\Delta}^1_n\text{–Präwohlordnung auf } \omega^\omega\}.$$

Unter AD sind beispielsweise $\boldsymbol{\delta}^1_1 = \aleph_1$, $\boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2$, $\boldsymbol{\delta}^1_3 = \aleph_{\omega+1}$ und $\boldsymbol{\delta}^1_4 = \aleph_{\omega+2}$ nach Martin und Kunen.
Jacksons Resultat lautet mit dieser Notation (vergleiche [KANAMORI, 1994, Theorem 30.33]):

Satz (Mit AD + DC)
Für alle natürlichen Zahlen n besitzt $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ die schwache Partitionseigenschaft.

Beweis: Vergleiche [JACKSON, 1988].

□

Für jede dieser Zahlen gibt uns Satz 4.4.22 eine unendliche Folge von Jónsson–Zahlen. Man weiß sogar noch mehr: Aus Satz 4.4.22 erhält man für jeden normalen, $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$–vollständigen Ultrafilter auf $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ eine Folge von Jónsson–Zahlen. Nach Satz 3.1.4 ist $\mathcal{C}^\lambda_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ für jede reguläre Kardinalzahl $\lambda < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ ein solcher Filter[1]. Man kann also die Anzahl der Folgen von Jónsson–Zahlen, die man aus Kleinbergs Satz erhält, ausrechnen. Wo diese Zahlen genau liegen, weiß man nur für die Folge von Jónsson–Zahlen, die man für den Filter $\mathcal{C}^{\aleph_0}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ bekommt. Denn für $\mathcal{C}^{\aleph_0}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ ist die Eigenschaft

$$(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}/\mathcal{C}^{\aleph_0}_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}} \cong (\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^+$$

erfüllt (vergleiche [KECHRIS, 1978, Theorem 14.3]); dies bedeutet also, daß gerade die ersten ω Nachfolger von $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ die Folge der Jónsson–Zahlen bilden. Dagegen steht die genaue Berechnung der Jónsson–Zahlen, die man für die Filter $\mathcal{C}^\lambda_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ für die regulären Zahlen λ mit $\aleph_0 < \lambda < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ erhält, noch aus. Es gibt einige Ansatzpunkte, durch die man zu mehr Informationen darüber gelangen könnte:

– Nach einem Resultat von Jackson ist bekannt, daß die Menge der Ordnungstypen der Ultrapotenzen $(\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1})^{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}/\mathcal{C}^\lambda_{\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}}$ für $\lambda < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ regulär gerade die Menge der regulären Kardinalzahlen zwischen $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ und $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+3}$ ist (vergleiche [KANAMORI, 1994, Seite 435]). Somit kennt man zumindest die jeweiligen Zahlen κ_2 aus der Folge $\langle \kappa_n;\ 1 \leq n \leq \omega \rangle$, die man aus Satz 4.5.10 erhält.
– Durch die Kenntnis der Zahlen κ_2 kennt man nach Satz 4.4.20 auch die Konfinalität der Zahlen κ_n. Dadurch kann die Menge der Zahlen, die für die Zahlen κ_n in Frage kommen, weiter eingeschränkt werden, da es nach [JACKSON und KHAFIZOV, noch nicht erschienen] Regeln gibt, wie man die Konfinalitäten der singulären Kardinalzahlen unterhalb von Θ berechnen kann.

[1] Diese Filter sind sogar die einzigen normalen Ultrafilter auf $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ (vergleiche [KANAMORI, 1994, 28.11]).

Eine genauere Analyse dieser Folgen von Jónsson–Zahlen erscheint faszinierend und aufschlußreich[2].

(4) Über andere kombinatorische große Kardinalzahlen gibt es unter AD noch sehr wenige Resultate. Zu diesen Zahlen gehören z.B. die subtilen und unaussprechlichen Kardinalzahlen[3], die auch sehr eng mit Partitionseigenschaften zusammenhängen. Näheres über solche Zahlen kann in [Kanamori, noch nicht erschienen, Kapitel 7] nachgelesen werden. Es wäre interessant, zu untersuchen, welche Zahlen unter AD diese großen Kardinalzahl–Eigenschaften besitzen.

(5) Unbekannt ist die genaue Konsistenzstärke der Voraussetzungen $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ und $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$ des Satzes von Kleinberg. Wir wissen, daß es unter AD Zahlen mit diesen Eigenschaften gibt. Dies gibt uns eine obere Schranke der Konsistenzstärke, nämlich die Theorie "ZSF + AC + Es gibt $\aleph_0$ Woodin–Zahlen" (vergleiche [Kanamori, 1994, Theorem 32.16]). Die beiden Voraussetzungen $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ und $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$ implizieren sowohl die Meßbarkeit von κ als auch die von κ^+. Daher gibt ein Resultat von Ralf Schindler eine untere Schranke für die Konsistenzstärke an. Dieses Resultat (vergleiche [Schindler, 1999]) besagt, daß aus der Existenz zweier aufeinanderfolgender meßbarer Kardinalzahlen die Existenz eines Modells von ZSF +AC mit einer Woodin–Zahl folgt[4]. Bessere Resultate, die die Konsistenzstärke der Eigenschaften $\kappa \to (\kappa)^\kappa_2$ und $\kappa^\kappa/\mathcal{C} \cong \kappa^+$ weiter eingrenzt, sind bisher noch nicht bekannt. Ebenso ist die Konsistenzstärke der Aussage "$\aleph_n$ ist eine Jónsson–Zahl" noch unbekannt.

(6) Es sind noch weitere kombinatorische Konsequenzen von AD bekannt, die in dieser Arbeit nicht erwähnt wurden. So besitzt $\aleph_1$ unter AD die Baumeigenschaft, d.h. es gibt keinen Aronszajn–Baum der Kardinalität $\aleph_1$. Viele Ergebnisse wurden im Umfeld der Aussage "$\aleph_n$ besitzt die Baumeigenschaft" für $n \geq 2$ erzielt. Man vergleiche dazu [Cummings, 1998, Abschnitt 5], [Cummings und Foreman, 1998] und [Foreman und Magidor, noch nicht erschienen]. Dagegen gibt es keine Ergebnisse über die Konsistenzstärke der Aussage "$\aleph_1$ besitzt die Baumeigenschaft"[5], da dies mit ZSF + AC inkonsistent ist. Die Bestimmung der Konsistenzstärke dieser Aussage wäre ebenfalls eine interessante Aufgabe. Die bisher beste obere Abschätzung ist die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl (vergleiche [Jech, 1978, Theorem 90]).

(7) Eine Partitionseigenschaft, die mit der schwachen Partitionseigenschaft eng verwandt ist, ist die sogenannte starke Partitionseigenschaft $\kappa \to (\kappa)^\kappa_\gamma$ für alle $\gamma < \kappa$. Es scheint immer noch unbekannt zu sein, ob diese Partitionseigenschaft echt stärker ist als die schwache Partitionseigenschaft. Dies zu erforschen, ist ein lohnendes Forschungsprojekt.

(8) Weitere interessante Fragen ergaben sich während der Untersuchung von $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahlen für spezielle Klassen $\mathcal{A}$ von Algebren in Abschnitt 2.3:

  – Satz 2.3.23 besagt, daß unter AC jede überabzählbare Kardinalzahl eine $\mathcal{K}$–Jónsson–Zahl ist. Das Auswahlaxiom geht in den Beweis entscheidend ein.

[2] Dieses Problem wurde unterhalb von $\boldsymbol{\delta}^1_5$ nach Fertigstellung dieser Arbeit unter Verwendung der genannten Ansatzpunkte von Benedikt Löwe gelöst: Die noch unbekannten Folgen von Jónsson–Zahlen sind $\langle \aleph_{\omega\cdot n+1};\ 1 \leq n \in \omega\rangle$ und $\langle \aleph_{\omega+(\omega^\omega\cdot n)+1};\ n \in \omega\rangle$, vergleiche [Löwe, noch nicht erschienen].

[3] Im Englischen heißen diese Zahlen "subtle" bzw. "ineffable".

[4] Zum Beweis dieses Satzes muß man allerdings weitere metamathematische Annahmen machen, damit die Kernmodelltheorie angewendet werden kann.

[5] Amir Leshem untersuchte allerdings in [Leshem, noch nicht erschienen] eine Abschwächung dieser Aussage.

Interessant wäre es, zu erforschen, wie Jónsson–Körper in auswahlfreien Kontexten aussehen. Analog könnte man auch bei Jónsson–Ringen, Jónsson–Verbänden usw. untersuchen, ob die Ergebnisse, die man mit AC gewonnen hat, auch ohne AC gültig sind.

- Shelah hat gezeigt, daß $\aleph_1$ unter AC keine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl ist. Unter AD ist $\aleph_1$ dagegen nach Korollar 4.6.2 eine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl. Daraus ergibt sich die Frage nach der Konsistenzstärke der Aussage "ZSF + $\aleph_1$ ist eine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl". Allgemeiner ist die Konsistenzstärke der Aussage "ZSF + $\aleph_n$ ist eine $\mathcal{G}$–Jónsson–Zahl" noch nicht untersucht.
- Die Betrachtung von $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahlen gibt eine Methode zur Untersuchung des ungelösten Problems, ob $\aleph_\omega$ unter Erhaltung von AC eine Jónsson–Zahl sein kann. Ein möglicher Ansatz wäre hier, zu überprüfen, ob $\aleph_\omega$ unter AC für eine bestimmte Klasse $\mathcal{A}$ von Algebren, für die dies nicht trivial ist, eine $\mathcal{A}$–Jónsson–Zahl ist. Diese Vorgehensweise könnte zu einem besseren Verständnis dieses Problems führen.
- Die Untersuchung anderer Klassen von Algebren, z.B. der Klasse der Fast–Körper, steht noch aus. Dies läßt weitere, interessante Ergebnisse erwarten.

Literaturverzeichnis

APTER, Arthur, On a Problem of Silver, Fundamenta Mathematicae **116** (1983), S. 33–38.

APTER, Arthur W., HENLE, James M. und JACKSON, Stephen C., The Calculus of Partition Sequences, Changing Cofinalities, and a Question of Woodin, Transactions of the American Mathematical Society (noch nicht erschienen).

BAUER, Heinz, *Maß– und Integrationstheorie*, de Gruyter (de Gruyter Lehrbuch), Berlin (1992), 2. Auflage.

CHANG, Chen-Chung und KEISLER, H. Jerome, *Model Theory*, Bd. 73, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **73**), Amsterdam (1990).

CHERNIKOV, Sergej N., Concerning the Theory of Infinite Special Groups, Matematicheskii Sbornik **7(49)** (1940a).

CHERNIKOV, Sergej N., Infinite Locally Solvable Groups, Matematicheskii Sbornik **7(49)** (1940b).

CHERNIKOV, Sergej N., On Shmidt's Problem, Ukrainian Mathematical Journal **23** (1971a), S. 493–497.

CHERNIKOV, Sergej N., Otto Yul'evich Shmidt (On the Eightieth Anniversary of his Birth), Ukrainian Mathematical Journal **23** (1971b), S. 478–481.

CUMMINGS, James, Large Cardinal Properties of Small Cardinals, in *Set theory: Techniques and applications. Proceedings of the conferences, Curaçāo, Netherlands Antilles, June 26–30, 1995 and Barcelona, Spain, June 10–14, 1996*, herausgegeben von Carlos Augusto Di Prisco, Jean A. Larson, Joan Bagaria und Adrian R. D. Mathias, Kluwer, Dordrecht (1998).

CUMMINGS, James und FOREMAN, Matthew, The Tree Property, Advances in Mathematics **133** (1998), S. 1–32.

DEVLIN, Keith J., *Constructibility*, Springer (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin (1984).

DRAKE, Frank R., *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **76**), Amsterdam (1974).

EBBINGHAUS, Heinz-Dieter, FLUM, Jörg und THOMAS, Wolfgang, *Einführung in die mathematische Logik*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).

EHRENFEUCHT, Andrzej und MOSTOWSKI, Andrzej M., Models of Axiomatic Theories Admitting Automorphisms, Fundamenta Mathematicae **43** (1956), S. 50–68.

ERDŐS, Paul und HAJNAL, András, On a Problem of B. Jónsson, Bulletin De L'Academie Polonaise Des Sciences **14** (1966), S. 19–23.

Erdős, Paul, Hajnal, András, Máté, Attila und Rado, Richard, *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*, North–Holland (Studies in Logic and The Foundations of Mathematics **106**), Amsterdam (1984).

Felgner, Ulrich, Einführung in die Theorie der Schiefkörper, Skriptum einer Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1973/74 an der Universität Heidelberg (1974).

Felgner, Ulrich, Einführung in die Mengenlehre, Skript zur Vorlesung an der Universität Tübingen (1996).

Felgner, Ulrich, Infinitäre Kombinatorik, Manuskript zur Vorlesung an der Universität Tübingen (1997a).

Felgner, Ulrich, Modelle der Mengenlehre, Manuskript zur Vorlesung an der Universität Tübingen (1997b).

Felgner, Ulrich und Schulz, Klaus, Algebraische Konsequenzen des Determiniertheits-Axioms, Archiv der Mathematik **42** (1984), S. 557–563.

Foreman, Matthew und Magidor, Menachem und Schindler, Ralf-Dieter, Determinacy and the Tree Property, *eingesandt an* Journal of Symbolic Logic (noch nicht erschienen).

Gale, David und Stewart, Frank M., Infinite Games with Perfect Information, in *Contributions to the Theory of Games II*, herausgegeben von Harold W. Kuhn und Albert W. Tucker, Princeton University Press (Annals of Mathematical Studies **28**), Princeton (1953), S. 245–266.

Hall, P. und Kulatilaka, C. R., A Property of Locally Finite Groups, Journal of the London Mathematical Society **39** (1964), S. 235–239.

Hanf, William, Representations of Lattices by Subalgebra. Preliminary Report, Bulletin of the American Mathematical Society **62** (1956), S. 402.

Hegewald, Annekatrin, *Generische Ultraprodukte und Woodin–Forcing*, Diplomarbeit, Technische Universität Berlin (1997).

Henle, James M., The Axiom of Determinateness and Canonical Measures, Fundamenta Mathematicae **114** (1981), S. 183–194.

Henle, James M., Kleinberg, Eugene M. und Watro, Ronald J., On the Ultrafilters and Ultrapowers of Strong Partition Cardinals, Journal of Symbolic Logic **49** (1984), S. 1268–1272.

Herstein, Israel Nathan, *Topics in Algebra*, Blaisdell (A Blaisdell Book in the Pure and Applied Sciences), New York (1964).

Jackson, Steve, AD and Projective Ordinals, in *Cabal Seminar 81–85. Proceedings, Caltech–UCLA Logic Seminar 1981–85.*, herausgegeben von Alexander S. Kechris, Donald A. Martin und John R. Steel, Springer (Lecture Notes in Mathematics **1333**), Berlin (1988), S. 117–220.

Jackson, Steve, A New Proof of the Strong Partition Relation on ω_1, Transactions of the American Mathematical Society **320** (1990), S. 737–745.

Jackson, Steve, A computation of $\boldsymbol{\delta}^1_5$, Memoirs of the American Mathematical Society (noch nicht erschienen,a).

JACKSON, Steve, Structural Consequences of AD, Handbook of Set Theory, herausgegeben von Matt Foreman, Akihiro Kanamori und Menachem Magidor (noch nicht erschienen,b).

JACKSON, Steve und KHAFIZOV, Farid T., Descriptions and Cardinals Below $\boldsymbol{\delta}^1_5$, Journal of Symbolic Logic (noch nicht erschienen).

JECH, Thomas, *Set Theory*, Academic Press, San Diego (1978).

JENSEN, Bruce A. und MILLER, Donald W., Commutative Semigroups Which are Almost Finite, Pacific Journal of Mathematics **27** (1968), S. 533–538.

JÓNSSON, Bjarni, *Topics in Universal Algebra*, Springer (Lecture Notes in Mathematics **250**), Berlin (1972).

KANAMORI, Akihiro, *The Higher Infinite, Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer (Perspectives in Mathematical Logic), Berlin (1994).

KANAMORI, Akihiro, *The Higher Infinite, Volume II* (noch nicht erschienen).

KAPLANSKY, Irving, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press (University of Michigan Publications in Mathematics **2**), Ann Arbor (1954).

KARGAPOLOV, Mikhail Ivanovich, O Probleme O. Yu. Shmidta, Sibirskij Matematicheskij Zhurnal **4** (1963), S. 232–235.

KASTANAS, Ilias G., On the Ramsey Property for Sets of Reals, Journal of Symbolic Logic **48** (1983), S. 1035–1045.

KECHRIS, Alexander S., AD and Projective Ordinals, in *Cabal Seminar 76–77, Proceedings, Caltech–UCLA Logic Seminar 1976-77*, herausgegeben von Alexander S. Kechris und N. Moschovakis, Yiannis, Springer (Lecture Notes in Mathematics **689**), Berlin (1978), S. 91–132.

KECHRIS, Alexander S., The Axiom of Determinacy Implies Dependent Choices in $\mathbf{L}(\mathbb{R})$, Journal of Symbolic Logic **49** (1984), S. 161–173.

KEGEL, Otto H. und WEHRFRITZ, Bertram A. F., *Locally Finite Groups*, North–Holland (North–Holland Mathematical Library **3**), Amsterdam (1973).

KLEINBERG, Eugene M., A Characterization of Determinacy for Turing Degree Games, Fundamenta Mathematicae **80** (1973a), S. 287–291.

KLEINBERG, Eugene M., Rowbottom Cardinals and Jónsson Cardinals are Almost the Same, Journal of Symbolic Logic **38** (1973b), S. 423–427.

KLEINBERG, Eugene M., AD $\vdash$ "The $\aleph_n$ are Jónsson Cardinals and $\aleph_\omega$ is a Rowbottom Cardinal", Annals of Mathematical Logic **12** (1977a), S. 229–248.

KLEINBERG, Eugene M., *Infinitary Combinatorics and the Axiom of Determinateness*, Springer (Lecture Notes in Mathematics **612**), Berlin (1977b).

KLEINBERG, Eugene M., A Measure Representation Theorem for Strong Partition Cardinals, Journal of Symbolic Logic **47** (1982), S. 161–169.

KOEPKE, Peter G., Some Applications of Short Core Models, Annals of Pure and Applied Logic **37** (1988), S. 179–204.

KOSTINSKY, Alan L., *Some Problems for Rings and Lattices Within the Domain of General Algebra*, Dissertation, University of California, Berkeley (1969).

KOSTINSKY, Alan L. und MCKENZIE, Ralph, Cardinality Problems for Rings, Notices American Mathematical Society **15** (1968), S. 389.

LAFFEY, Thomas J., Infinite Rings with All Proper Subrings Finite, American Mathematical Monthly **81** (1974), S. 270–272.

LESHEM, Amir, On the Consistency of the Definable Tree Property on $\aleph_1$, Journal of Symbolic Logic (noch nicht erschienen).

LÖWE, Benedikt, Kleinberg Sequences and Partition Cardinals Below $\boldsymbol{\delta}^1_5$, *Vorabdruck* (noch nicht erschienen).

MARTIN, Donald A., The Axiom of Determinateness and Reduction Principles in the Analytical Hierarchy, Bulletin of the American Mathematical Society **74** (1968), S. 687–689.

MARTIN, Donald A., Measurable Cardinals and Analytic Games, Fundamenta Mathematicae **66** (1970), S. 287–291.

MARTIN, Donald A., Borel Determinacy, Annals of Mathematics **102** (1975), S. 363–371.

MARTIN, Donald A., Proving Determinacy, *Vorabdruck* (noch nicht erschienen).

MARTIN, Donald A. und MITCHELL, William J., On the Ultrafilter of Closed Unbounded Sets, Journal of Symbolic Logic **44** (1979), S. 503–506.

MARTIN, Donald A. und STEEL, John R., A Proof of Projective Determinacy, Journal of the American Mathematical Society **2** (1989), S. 71–125.

MCKENZIE, Ralph, On Semigroups Whose Proper Subsemigroups Have Lesser Power, Algebra Universalis **1** (1971), S. 21–25.

MIGNONE, Robert J., The Axiom of Determinateness Implies ω_2 Has Precisely Two Countably Complete, Uniform, Weakly Normal Ultrafilters, Fundamenta Mathematicae **117** (1983), S. 91–93.

MORLEY, Michael D., Categoricity in Power, Transactions of the American Mathematical Society **114** (1965a), S. 514–538.

MORLEY, Michael D., Omitting Classes of Elements, in *The Theory of Models.* Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley, herausgegeben von John W. Addison Jr., Leon Henkin und Alfred Tarski, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam (1965b), S. 265–273.

MOSCHOVAKIS, Yiannis N., Determinacy and Prewellorderings of the Continuum, in *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory, Proceedings of an International Colloquium, Jerusalem 1968*, herausgegeben von Yehoshua Bar-Hillel, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam (1970), S. 24–62.

MOSCHOVAKIS, Yiannis N., *Descriptive Set Theory*, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **100**), Amsterdam (1980).

OBRAZTSOV, Viatcheslav N., Embedding Into Groups with Well–Described Lattices of Subgroups, Bulletin of the Australian Mathematical Society **54** (1996), S. 221–240.

OL'SHANSKII, Alexander, Infinite Groups with Cyclic Subgroups, Soviet Mathematics – Doklady **20** (1979), S. 343–346.

OL'SHANSKII, Alexander, An Infinite Group with Subgroups of Prime Orders, Math. USSR Izvestija **16** (1981), S. 279.

OL'SHANSKII, Alexander, Groups of Bounded Period with Subgroups of Prime Order, Algebra and Logic **21** (1982), S. 369–418.

v. QUERENBURG, Boto, *Mengentheoretische Topologie*, Springer, Berlin (1979).

SAMI, Ramez L., Turing Determinacy and the Continuum Hypothesis, Archive for Mathematical Logic **28** (1989), S. 149–154.

SCHATZ, Torsten Ingo, Die Bedeutung großer Kardinalzahlen für die Determiniertheit von Mengen, Wissenschaftliche Arbeit, Eberhard–Karls–Universität Tübingen (1998).

SCHINDLER, Ralf–Dieter, Successive weakly compact or singular cardinals, Journal of Symbolic Logic **64** (1999), S. 139–146.

SHELAH, Saharon, On a Problem of Kurosh, Jónsson Groups, and Applications, in *Word Problems II, The Oxford Book*, herausgegeben von S. I. Adian, William W. Boone und Graham Higman, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **95**), Amsterdam (1980), S. 373–394.

SILVER, Jack H., *Some applications of model theory in set theory*, Dissertation, University of California, Berkeley (1966).

SOLOVAY, Robert M., The Independence of DC from AD, in *Cabal Seminar 76-77. Proceedings, Caltech–UCLA Logic Seminar 1976-1977*, herausgegeben von Alexander S. Kechris und Yiannis N. Moschovakis, Springer (Lecture Notes in Mathematics **689**), Berlin (1978), S. 171–184.

STEINWAND, Heike, Konsequenzen aus dem Axiom der Determiniertheit, Wissenschaftliche Arbeit, Eberhard–Karls–Universität Tübingen (1998).

STRUNKOV, Sergey P., Subgroups of Periodic Groups, Soviet Mathematics – Doklady **7** (1966), S. 1201–1203.

TARSKI, Alfred und VAUGHT, Robert L., Arithmetical Extensions of Relational Systems, Compositio Mathematica **13** (1957), S. 81–102.

WAGON, Stan, *The Banach–Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

WHALEY, Thomas P., *Algebras Satisfying the Descending Chain Condition for Subalgebras*, Dissertation, Vanderbilt University (1968).

WHALEY, Thomas P., Large Sublattices of a Lattice, Pacific Journal of Mathematics **28** (1969), S. 477–484.

WILLIAMS, Neil H., *Combinatorial Set Theory*, North–Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **91**), Amsterdam (1977).

WOODIN, W. Hugh, *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal*, de Gruyter (de Gruyter Series in Logic and its Applications **1**), Berlin (1999).