

Einführung in die Logik

Übungsblatt 4

- (1) Beweisen Sie **Satz 2.12** der Vorlesung:

Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln. Dann sind φ und ψ genau dann logisch-äquivalent, wenn $\varphi \leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

(2 Punkte)

- (2) **Zusatzaufgabe:**

Prüfen Sie, ob die folgenden beiden Aussagen für beliebige aussagenlogische Formeln $\varphi, \theta, \psi_1, \dots, \psi_n$ gültig sind:

- (i) Wenn $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ oder $\psi_1, \dots, \psi_n \models \theta$, dann auch $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi \vee \theta$?

(1 Zusatzpunkt)

- (ii) Wenn $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi \vee \theta$, dann auch $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ oder $\psi_1, \dots, \psi_n \models \theta$?

(1 Zusatzpunkt)

- (3) Seien $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$ aussagenlogische Formeln, wobei ψ_1, \dots, ψ_n Tautologien sind.

Zeigen Sie, dass dann $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ genau dann gilt, wenn φ ebenfalls eine Tautologie ist.

(Das bedeutet, dass man aus einer Menge von Tautologien nur Tautologien folgern kann.)

(1 Punkt)

- (4) THOMAS MANN schreibt in seiner Erzählung *Wälsungenblut* über ein Gespräch am Mittagstisch: „Das Gespräch . . . zog dann Kreise um eine Frage rein logischer Natur, die beiläufig von Kunz aufgeworfen war: ob nämlich, wenn φ die notwendige und hinreichende Bedingung für ψ sei, auch ψ die

notwendige und hinreichende Bedingung für φ sein müsse.“.

Thomas Mann schildert, wie man sich darüber erhitzt hatte, bis der Hausherr sich anheischig machte, das Ganze zu erklären.

„*Er erlitt ein vollkommenes Fiasko. Die Kinder lachten ihn aus. Sogar seine Frau wies ihn zurück, ...*“ etc.

Können Sie die aufgeworfene Frage klären?

(1 Punkt)

(5) Seien φ, ψ, θ Formeln. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

(i) $(\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

(ii) $(\varphi \vee \psi \rightarrow \theta) \longleftrightarrow (\varphi \rightarrow \theta) \wedge (\psi \rightarrow \theta)$

(iii) $(\varphi \wedge \psi \rightarrow \theta) \longleftrightarrow (\varphi \rightarrow \theta) \vee (\psi \rightarrow \theta)$

(3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

(iv) $(\varphi \rightarrow \psi \wedge \theta) \longleftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \theta)$

(v) $(\varphi \rightarrow \psi \vee \theta) \longleftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \theta)$

(2 Zusatzpunkte)

(6) Seien φ, ψ, θ Formeln. Sind die folgenden Formeln logisch-äquivalent?

(i) $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \vee \theta)$ und $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \theta)$

(ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \theta$ und $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$

(iii) $(\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \theta$ und $\varphi \longleftrightarrow (\psi \longleftrightarrow \theta)$

(3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 28. Mai 2002