Torsten Schatz Sommersemester 2002

Einführung in die Logik

Übungsblatt 4

(1) Beweisen Sie **Satz 2.12** der Vorlesung:

Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln. Dann sind φ und ψ genau dann logisch–äquivalent, wenn $\varphi \longleftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

(2 Punkte)

(2) **Zusatzaufgabe:**

Prüfen Sie, ob die folgenden beiden Aussagen für beliebige aussagenlogische Formeln $\varphi, \theta, \psi_1, \ldots, \psi_n$ gültig sind:

(i) Wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ oder $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \theta$, dann auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi \vee \theta$?

(1 Zusatzpunkt)

(ii) Wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi \vee \theta$, dann auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ oder $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \theta$?

(1 Zusatzpunkt)

(3) Seien $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ aussagenlogische Formeln, wobei $\psi_1, \ldots, \psi_n$ Tautologien sind.
Zeigen Sie, dass dann $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ genau dann gilt, wenn φ ebenfalls eine Tautologie ist.

(*Das bedeutet, dass man aus einer Menge von Tautologien nur Tautologien folgern kann .*)

(1 Punkt)

(4) Thomas Mann schreibt in seiner Erzählung *Wälsungenblut* über ein Gespräch am Mittagstisch: *„Das Gespräch … zog dann Kreise um eine Frage rein logischer Natur, die beiläufig von Kunz aufgeworfen war: ob nämlich, wenn φ die notwendige und hinreichende Bedingung für ψ sei, auch ψ die*

notwendige und hinreichende Bedingung für φ sein müsse.“.
Thomas Mann schildert, wie man sich darüber erhitzt hatte, bis der Hausherr sich anheischig machte, das Ganze zu erklären.
„Er erlitt ein vollkommenes Fiasko. Die Kinder lachten ihn aus. Sogar seine Frau wies ihn zurück, ... “ etc.

Können Sie die aufgeworfene Frage klären?

(1 Punkt)

(5) Seien φ, ψ, θ Formeln. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

(i) $(\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

(ii) $(\varphi \vee \psi \to \theta) \longleftrightarrow (\varphi \to \theta) \wedge (\psi \to \theta)$

(iii) $(\varphi \wedge \psi \to \theta) \longleftrightarrow (\varphi \to \theta) \vee (\psi \to \theta)$

(3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

(iv) $(\varphi \to \psi \wedge \theta) \longleftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \theta)$

(v) $(\varphi \to \psi \vee \theta) \longleftrightarrow (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \theta)$

(2 Zusatzpunkte)

(6) Seien φ, ψ, θ Formeln. Sind die folgenden Formeln logisch–äquivalent?

(i) $(\neg\varphi \to \psi) \to (\psi \vee \theta)$ und $(\neg\psi \to \varphi) \to (\neg\psi \to \theta)$

(ii) $(\varphi \to \psi) \to \theta$ und $\varphi \to (\psi \to \theta)$

(iii) $(\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \theta$ und $\varphi \longleftrightarrow (\psi \longleftrightarrow \theta)$

(3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 28. Mai 2002