Universität Tübingen
Mathematische Fakultät

Wissenschaftliche Arbeit
im Fach Mathematik

# Konsequenzen aus dem Axiom der Determiniertheit

Arbeitsbereich Logik, Grundlagen
und Geschichte der Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Felgner

vorgelegt von

Heike Steinwand
aus Horb a.N.

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Tübingen, im April 1998.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Determiniertheit ist ein attraktives Konzept, dem in den vergangenen Jahrzehnten in der Mengenlehre große Aufmerksamkeit gewidmet wurde.

Der Begriff „Determiniertheit einer Menge“ wird mit Hilfe eines unendlichen Zwei–Personen–Spiels definiert. Wenn $A$ eine Teilmenge von $\omega^\omega$ ist, so sehen die Partien des Spiels $G(A)$ wie folgt aus:

Beide Spieler wählen abwechselnd natürliche Zahlen. Nach $\omega$ Zügen ist die Partie zu Ende und der Spieler, der sie eröffnet hat, gewinnt, falls die resultierende Folge natürlicher Zahlen ein Element von $A$ ist. Im anderen Falle gewinnt der zweite Spieler.

Die Menge $A$ und das Spiel $G(A)$ heißen determiniert, falls in $G(A)$ einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat, das heißt, eine Strategie, die sicher zum Gewinn führt, egal wie sein Mitspieler reagiert.

Das Axiom der Determiniertheit (AD) besagt nun, daß das Spiel $G(A)$ für jede Menge $A \subseteq \omega^\omega$ determiniert ist. Es wurde 1962 von Jan Mycielski und Hugo Steinhaus in die wissenschaftliche Diskussion gebracht. Zu dieser Zeit war bekannt, daß im Axiomensystem von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF) mit Auswahlaxiom (AC), das üblicherweise in der Mengenlehre als Grundlage genommen wird, beweisbar ist, daß offene und abgeschlossene sowie abzählbare Schnitte offener und abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen determiniert sind. Außerdem läßt sich in ZSF + AC eine Menge konstruieren, die nicht determiniert ist.

Im Bewußtsein dieser Tatsache schlugen Mycielski und Steinhaus das Axiom AD als Alternative zum Auswahlaxiom vor. Dabei wollten sie nicht das Auswahlaxiom aus der Mengenlehre verbannen, sondern Modelle von ZSF + AD ihrer interessanter Eigenschaften wegen untersuchen. So gilt unter Annahme des Axioms der Determiniertheit zum Beispiel für jede Menge reeller Zahlen, daß sie

Lebesgue–meßbar ist, die Baire–Eigenschaft hat und, sofern sie überabzählbar ist, eine perfekte Teilmenge besitzt.
Obschon die Frage nach Determiniertheit auf Interesse stieß, begegneten die meisten Mengentheoretiker dem Axiom AD mit Skepsis wegen des Widerspruchs zu AC, zumal es der Aussage von AD an Plausibilität mangelt.
Die Einstellung gegenüber dem Axiom änderte sich, als Robert Solovay 1967 bewies, daß AD impliziert, daß $\aleph_1$ eine meßbare Kardinalzahl ist. Damit war ein direkter Zusammenhang zwischen AD und den Axiomen über große Kardinalzahlen hergestellt, einem Gebiet der Mengenlehre, das Gegenstand intensiver Forschung war und ist.
Im Axiomensystem ZSF + AC ist die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl nicht beweisbar. Es ist zudem unmöglich, die Konsistenz dieser Aussage mit den Axiomen von ZSF + AC zu beweisen. Die Aussage „$\aleph_1$ ist meßbar“ ist in ZSF + AC sogar falsch.
Es folgt, daß die Konsistenzstärke von AD (auf der Basis von ZSF) mindestens so groß ist wie die der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl. AD ist demzufolge ein starkes Axiom.
Kurze Zeit später bewies Robert Solovay, daß aus AD auch die Meßbarkeit von $\aleph_2$ folgt. Dieses Resultat ist noch unerwarteter als obiges, denn in einem Universum mit Auswahl ist nicht nur die Meßbarkeit von $\aleph_2$ unmöglich, sondern erst recht die Existenz zweier aufeinanderfolgender meßbarer Kardinalzahlen.
Diese Resultate waren der Anlaß, nach weiteren Zusammenhängen zwischen Determiniertheit und großen Kardinalzahlen zu suchen und damit nach Verbindungen zweier Gebiete der Mengenlehre, in denen bis heute intensiv gearbeitet wird.

Die zugrundeliegende Theorie für alle Kapitel dieser Arbeit ist das Axiomensystem von Zermelo, Skolem und Fraenkel (ZSF) bestehend aus dem Extensionalitätsaxiom, dem Unendlichkeitsaxiom, dem Summenaxiom, dem Potenzmengenaxiom, dem Fundierungsaxiom sowie dem Schema der Ersetzungsungsaxiome (vgl. Felgner [5, § 7]).
Falls für ein Resultat weitere Annahmen benötigt werden, wird dies gesondert erwähnt. Hinsichtlich der grundlegenden mengentheoretischen Begriffe und Notationen orientiere ich mich an Felgner [5]. Die wichtigsten Symbole und Abkürzungen werden nach dieser Einleitung aufgeführt und kurz erklärt.

Das erste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem topologischen Raum $\omega^\omega$, dem Baire–Raum, der hier von Interesse ist, weil AD Aussagen über Teilmengen von $\omega^\omega$ trifft. Zwischen dem Baire–Raum und den reellen Zahlen besteht ein Zusammenhang, auf den ich kurz eingehen werde. Danach behandle ich einige Grundlagen der klassischen Deskriptiven Mengenlehre, und schließlich zeige ich, daß sich viele Sachverhalte in Elementen von $\omega$ und von $\omega^\omega$ ausdrücken lassen, was unter anderem für die Anwendungsmöglichkeiten von AD wichtig sein wird.

Im zweiten Kapitel erfolgt die genaue Einführung von AD und des zugrundeliegenden Spieltyps. Es werden auch erste Folgerungen aus AD bewiesen.

Das Kapitel drei befaßt sich mit Filtern und Ultrafiltern, die zur Definition der meßbaren Kardinalzahl führen. Dabei werde ich anhand zweier grundlegender Resultate aufzeigen, daß sich unterschiedliche Aussagen in diesem Bereich beweisen lassen, je nachdem ob man AC oder das Axiom AD voraussetzt.

Im vierten Kapitel führe ich in die effektive Deskriptive Mengenlehre ein, die Teilmengen von $\omega^\omega$ anhand ihrer logischen Komplexität klassifiziert. Außerdem werden Vorbereitungen für Kapitel fünf und sieben getroffen.

In Kapitel fünf wird dann Solovays Satz, daß aus AD die Meßbarkeit von $\aleph_1$ folgt, gezeigt. Ich gebe drei Beweise für dieses Resultat an.

Um zu zeigen, daß auch $\aleph_2$ unter der Annahme von AD eine meßbare Kardinalzahl ist, benutze ich an zwei Stellen Forcing–Methoden. Eine kurze Einführung dazu stellt das Kapitel sechs dar.

Damit kann dann schließlich in Kapitel sieben die Meßbarkeit von $\aleph_2$ unter AD bewiesen werden.

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $\lvert X \rvert$ | Kardinalität der Menge $X$ |
| $\mathcal{P}(X)$ | Potenzmenge von $X$ |
| $\mathcal{P}_\kappa(X)$ | Menge der Teilmengen von $X$ der Kardinalität $\kappa$ (für eine Kardinalzahl $\kappa$ ) |
| $\mathcal{P}_{<\kappa}(X)$ | Menge der Teilmengen von $X$ der Kardinalität kleiner $\kappa$ (für eine Kardinalzahl $\kappa$ ) |
| $cf(\kappa)$ | Konfinalität der Kardinalzahl $\kappa$ |
| $\Omega$ | Klasse aller Ordinalzahlen |
| $\mathbf{V}$ | Universum aller Mengen |
| $\mathbf{V}_\alpha$ | $\alpha$-te Stufe der kumulativen Hierarchie |
| $\mathbf{L}$ | Klasse der konstruktiblen Mengen |
| $\mathbf{L}_\alpha$ | $\alpha$-te Stufe der konstruktiblen Hierarchie |
| $\mathbf{L}[A]$ | Klasse der Mengen, die konstruktibel relativ zur Menge $A$ sind |
| $\mathbf{L}_\alpha[A]$ | $\alpha$-te Stufe der konstruktiblen Hierarchie relativ zur Menge $A$ |
| $\mathbf{L}(A)$ | Konstruktibler Abschluß der Menge $A$ |
| $\mathbf{L}_\alpha(A)$ | $\alpha$-te Stufe des konstruktiblen Abschlusses der Menge $A$ |
| $\omega$ | kleinste unendliche Ordinalzahl |
| $\aleph_\alpha$ | die $\alpha$-te unendliche Kardinalzahl |
| $\omega_\alpha$ | die $\alpha$-te unendliche Kardinalzahl als Element von $\Omega$ aufgefaßt |
| $\kappa^+$ | kleinste Kardinalzahl, die größer als die Kardinalzahl $\kappa$ ist |
| $Id_X$ | identische Abbildung auf der Menge $X$ |
| $\mathrm{Dom}(f)$ | Definitionsbereich der Abbildung $f$ |
| $\mathrm{Im}(f)$ | Bild der Abbildung $f$ |
| $f[X]$ | Bild der Menge $X \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ unter der Abbildung $f$ |
| $f^{-1}[Y]$ | Urbild der Menge $Y$ unter der Abbildung $f$ |
| $f \upharpoonleft X$ | Einschränkung der Abbildung $f$ auf die Menge $X \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ |
| $f \upharpoonright Y$ | Einschränkung des Bildbereichs der Abbildung $f$ auf die Menge $Y \subseteq \mathrm{Im}(f)$ |
| $B^A$ | Klasse aller Funktionen von $A$ nach $B$ |
| $\mathrm{Feld}(R)$ | Feld der Relation $R$ |
| $\lvert s \rvert$ | Länge der Folge $s$ |
| $s\hat{\ }t$ | Verkettung der Folgen $s$ und $t$, d.h. Folge, die entsteht, wenn man die Folge $t$ an die Folge $s$ anhängt |
| $x_{\mathrm{I}}$ | $\langle x(2i);\ i \in \omega \rangle$ für $x \in \omega^\omega$ |

| | |
|---|---|
| $x_{\mathrm{II}}$ | $\langle x(2i+1);\ i \in \omega \rangle$ für $x \in \omega^\omega$ |
| $x * y$ | $z \in \omega^\omega$ mit $z_{\mathrm{I}} = x,\ z_{\mathrm{II}} = y$ für $x, y \in \omega^\omega$ |
| ZSF | Axiomensystem von Zermelo–Skolem–Fraenkel |
| AC | Auswahlaxiom |
| $\mathrm{AC}_\omega$ | abzählbares Auswahlaxiom |
| AD | Axiom der Determiniertheit |
| DC | Axiom der abhängigen Auswahlen |
| GCH | Generelle Continuums–Hypothese |
| $\Gamma \vdash \varphi$ | $\varphi$ ist aus der Formelmenge $\Gamma$ formal beweisbar |
| $\mathfrak{M} \models \varphi$ | $\mathfrak{M}$ ist Modell von $\varphi$ |

# Kapitel 1

# Der Baire–Raum $\omega^\omega$

Die Spiele, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind abhängig von Teilmengen von $\omega^\omega$ definiert, und ihre Partien sind Elemente dieser Menge.
Ich werde mich in diesem Kapitel genauer mit $\omega^\omega$ beschäftigen.
Im ersten Abschnitt wird $\omega^\omega$ mit einer Topologie versehen. Durch die zusätzliche Struktur werden viele Überlegungen im Zusammenhang mit der Determiniertheit von Spielen erleichtert.
Außerdem werde ich darauf eingehen, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem topologischen Raum $\omega^\omega$ und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besteht. Dies hat zur Folge, daß in der Deskriptiven Mengenlehre in der Regel $\omega^\omega$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird.
Die Deskriptive Mengenlehre untersucht Eigenschaften von definierbaren Teilmengen des Kontinuums. Manche Eigenschaften, die für beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ nicht gelten oder nicht beweisbar sind, gelten jedoch für bestimmte, einfach zu beschreibende Teilmengen.
So ist die Kontinuums-Hypothese für abgeschlossenen Mengen in ZSF + AC beweisbar, d.h. jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist höchstens abzählbar oder zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig (Satz von Cantor–Bendixson, 1883, vgl. Felgner [6, Kor. 17.3]).
Das Interesse der Deskriptiven Mengenlehre gilt vor allem den Borel– und den projektiven Mengen. Sie entstehen aus den offenen und abgeschlossenen Mengen durch Bildung abzählbarer Schnitte und Vereinigungen und durch Komplementbildung sowie durch Projektion und Komplementbildung.
Diese Mengen betrachte ich in den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels.

Zuvor wird jedoch eine Eigenschaft von $\omega^\omega$ betrachtet, die in dieser Arbeit oft von Nutzen sein wird, nämlich die Möglichkeit, in einem Element dieser Menge viel an Information zu kodieren.
Da die Partien der Spiele, deren Determiniertheit das Axiom AD postuliert, Elemente von $\omega^\omega$ sind, möchte man möglichst viel mit Hilfe von diesen bzw. mit Hilfe natürlicher Zahlen ausdrücken.

## 1.1 $\omega^\omega$ als topologischer Raum

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Eigenschaften des topologischen Raumes $\omega^\omega$ dargestellt. Als Grundlage dienten Lévy [21, Kap. VII] und Jech [13, Kap. 7].

**Definition 1.1** Die Basis der offenen Mengen sei $\{U_s;\ s \in \omega^{<\omega}\}$, wobei $U_s = \{x \in \omega^\omega;\ s \subset x\}$ für $s \in \omega^{<\omega}$ ist.
$\omega^\omega$ mit dieser Topologie heißt *Baire–Raum*, den wir ebenfalls mit $\omega^\omega$ bezeichnen.

**Bemerkung 1.2** Seien $s, t \in \omega^{<\omega}$. Dann gilt

(i) $U_s \cap U_t \ \in \ \{\varnothing, U_s, U_t\}$.

(ii) $U_s$ ist offen und abgeschlossen.

**Beweis:** (i) Falls $s \subseteq t$, so ist $U_s \cap U_t = U_s$.
Falls $s \nsubseteq t$ und $t \nsubseteq s$, so ist $U_s \cap U_t = \varnothing$.

(ii) $\omega^\omega - U_s = \{x \in \omega^\omega;\ s \not\subset x\} = \{x \in \omega^\omega;\ x \upharpoonright |s| \neq s\}$
$= \bigcup\{U_t;\ |t| = |s| \ \ \&\ \ t \neq s\}$,
also ist $\omega^\omega - U_s$ ebenfalls offen.

□

Der Baire–Raum ist ein metrischer Raum. Die zugrundeliegende Topologie wird von der folgenden Metrik $d : \omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{, falls } x \neq y \text{ und } n = \min\{i \in \omega;\ x(i) \neq y(i)\} \end{cases} .$$

Mit Hilfe dieser Metrik ist es oftmals einfach, die Stetigkeit von Abbildungen einzusehen.

**Bemerkung 1.3** Folgende Abbildungen sind stetig:

(i) $f : \omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega,\ \langle x, y\rangle \mapsto x * y$,

(ii) $f_{\mathrm{I}} : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega,\ x \mapsto x_{\mathrm{I}} = \langle x(2i);\ i \in \omega\rangle$,

(iii) $f_{\mathrm{II}} : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega,\ x \mapsto x_{\mathrm{II}} = \langle x(2i+1);\ i \in \omega\rangle$.

**Bemerkung 1.4**

(i) $\omega^\omega$ ist ein vollständiger metrischer Raum[1] .

(ii) $\omega^\omega$ ist separabel[2] .

**Beweis:** (i) Sei $\langle x_n;\ n \in \omega\rangle$ eine Cauchy–Folge in $\omega^\omega$. D.h. für jedes $k \in \omega$ existiert ein $n_0 \in \omega$, so daß $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k}$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Damit ist für $n, m \geq n_0$ und für $\ell \leq k$ auch $x_n(\ell) = x_m(\ell)$.
Somit konvergiert die Folge $\langle x_n;\ n \in \omega\rangle$.

(ii) Betrachte $D = \{x \in \omega^\omega;\ \exists\, n \in \omega\ \forall\, m \geq n :\ x(m) = x(n)\}$. $D$ ist die Menge der Folgen aus $\omega^\omega$, die ab einem bestimmten Eintrag konstant sind.
Sei $s \in \omega^{<\omega}$. Dann ist $y \in \omega^\omega$ definiert durch

$$y(i) = \begin{cases} s(i) & \text{, falls } i < |s| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Element von $U_s \cap D$. Somit ist $D$ dicht in $\omega^\omega$.

□

**Bemerkung:** Sei $k \in \omega$. Mit $(\omega^\omega)^k$ bezeichnen wir die $k$-te Potenz des Raumes $\omega^\omega$, d.h. das $k$-fache kartesische Produkt von $\omega^\omega$ versehen mit der Produkttopologie.

[1]Sei $d$ eine Metrik auf einem topologischen Raum $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$, wobei $\mathcal{O}$ von $d$ induziert wird. Dann heißt eine Folge $\langle x_n;\ n \in \omega\rangle$ von Elementen von $X$ *Cauchy–Folge*, falls für jedes $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \omega$ existiert mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$.

Der Raum $\mathfrak{X}$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy–Folge in $\mathfrak{X}$ gegen ein $x \in X$ konvergiert.

[2]Ein topologischer Raum $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn $D \cap O \neq \varnothing$ für jede nicht leere offene Menge $O$ gilt.

Somit bilden die Mengen der Form $U_{s_1} \times U_{s_2} \ldots \times U_{s_k}$ mit $s_i \in \omega^{<\omega}$ für $1 \leq i \leq k$ eine Basis der Topologie auf $(\omega^\omega)^k$.
Die Räume $(\omega^\omega)^k$ und $\omega^\omega$ sind homöomorph, man bezeichnet deshalb den topologischen Raum $\omega^\omega$ als nulldimensional (vgl. Lévy [21, VII 2.2]).

Damit folgt sofort, daß der Baire–Raum und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph sein können, denn Brouwer bewies 1910, daß für $m, n \in \omega$ mit $m \neq n$ die Räume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph sind.

Es ist jedoch trotzdem gerechtfertigt, in der Deskriptiven Mengenlehre mit $\omega^\omega$ zu arbeiten, wenn man Aussagen über die reellen Zahlen treffen will, denn der Baire–Raum ist homöomorph zur Menge $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen versehen mit der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Spurtopologie[3] (vgl. Lévy [21, VII 3.7]).
Für die Aussagen, die in der Deskriptiven Mengenlehre interessant sind, ist der topologische Unterschied zwischen $\mathbb{I}$ und $\mathbb{R}$ im allgemeinen ohne Bedeutung:
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist abzählbar, also eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue–Maßes sowie eine magere Menge.
Da $\mathbb{R} - \mathbb{I} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ die abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist, stimmt die Borel–Hierarchie, die wir im nächsten Abschnitt definieren werden, auf $\mathbb{R}$ und auf $\mathbb{I}$ ab der dritten Stufe überein.
Aus diesen Gründen wird in der Mengenlehre im allgemeinen die Menge $\omega^\omega$ als die reellen Zahlen bezeichnet. Der Baire–Raum bietet einige Vorteile. Seine Struktur macht Betrachtungen oft einfacher, und die Tatsache, daß er nulldimensional ist, bedeutet, daß man viele Resultate, die für $\omega^\omega$ gelten, leicht auf $(\omega^\omega)^k$ für beliebige $k \in \omega$ verallgemeinern bzw. entsprechende Beweise direkt übertragen kann.

## 1.2 Kodierungen durch Elemente von $\omega^\omega$

In diesem Abschnitt wird dargestellt, wie in einem Element von $\omega^\omega$ viele verschiedenartige Informationen kodiert werden können. So läßt sich beispielsweise

[3] Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O} \rangle$ ein topologischer Raum und $X_0 \subseteq X$ eine Menge. Dann sind die offenen Mengen der *Spurtopologie* auf $X_0$ gerade die $O \subseteq X_0$ für die ein $O' \in \mathcal{O}$ existiert, so daß $O = X_0 \cap O'$ ist.

eine abzählbare Ordinalzahl oder eine abzählbare Teilmenge von $\omega^\omega$ durch ein Element von $\omega^\omega$ kodieren.
Dies wird in den nachfolgenden Kapiteln an mehreren Stellen nützlich sein.

Die Notation richtet sich weitgehend nach Kanamori [14, §12].
Zunächst definiere ich eine Abzählung der endlichen Folgen natürlicher Zahlen:

**Definition 1.5**

$$\Phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega, \quad \begin{cases} \langle s(0), \ldots, s(n) \rangle & \mapsto \; p_0^{s(0)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s(n)+1} \\ \varnothing & \mapsto \; 0, \end{cases}$$

wobei $p_i$ die $i$-te Primzahl ist, $i \in \omega$.

Offensichtlich besitzt diese Abzählung die folgenden Eigenschaften:

- $\Phi$ ist bijektiv,
- $s_0 = \varnothing$,
- $|s_i| \leq i$.

**Bemerkung 1.6** Mit dieser Abbildung können wir endliche Folgen kodiert als natürliche Zahlen betrachten.
Der $i$-te Eintrag der zu $m \in \omega$ gehörenden Folge, $i < |\Phi^{-1}(m)|$, wird mit

$$(m)_i := \big(\Phi^{-1}(m)\big)(i)$$

bezeichnet.

Wird von $x \in \omega^\omega$ nur die Information eines endlichen Teilstückes der Länge $n \in \omega$ benötigt, so kann diese auf die gleiche Weise durch eine natürliche Zahl ausgedrückt werden:

$$\bar{x}(n) := \Phi(x \upharpoonright n).$$

Analog sei für $\mathbf{w} = \langle m_0, \ldots, m_{r-1}, x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle \in \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k$ und $n \in \omega$

$$\bar{\mathbf{w}}(n) := \langle m_0, \ldots, m_{r-1}, \bar{x}_0(n), \ldots, \bar{x}_{k-1}(n) \rangle \in \big(\omega^\omega\big)^{r+k}.$$

Als nächstes werden Elemente von $(\omega^\omega)^\omega$ und binären Relationen auf $\omega$ durch Elemente von $\omega^\omega$ kodiert.
Dazu benötige ich zunächst eine Bijektion von $\omega \times \omega$ nach $\omega$ :

**Hilfssatz 1.7** *Die Abbildung*

$$\langle\!\langle , \rangle\!\rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \,, \; \langle\!\langle n, m \rangle\!\rangle \, = \, n + (n+m+1) \cdot \frac{n+m}{2}$$

*ist eine Bijektion.*

**Beweis:** siehe Felgner [5, §9, Prop. 5.7]

**Definition 1.8** Sei $x \in \omega^\omega$.

(i) Wir setzen für $i, m \in \omega$

$$(x)_i(m) \;:=\; x(\langle\!\langle i, m \rangle\!\rangle).$$

Damit kodiert $x$ die Folge $\langle (x)_i;\; i \in \omega \rangle \;\in (\omega^\omega)^\omega$.

(ii) Seien $m, n \in \omega$. Durch

$$\langle m, n \rangle \in E_x \;:\Longleftrightarrow\; x(\langle\!\langle m, n \rangle\!\rangle) \;=\; 0$$

kodiert $x$ die binäre Relation $E_x$ auf $\omega$.

**Bemerkung 1.9** Die Abbildung

$$f_1 : \omega^\omega \to (\omega^\omega)^\omega\,,\; x \mapsto \langle (x)_i;\; i \in \omega \rangle$$

ist bijektiv, da auch $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ bijektiv ist.

Als nächstes zeige ich, daß zu jedem $\alpha < \omega_1$ ein Element von $\omega^\omega$ existiert, das $\alpha$ kodiert.

**Bemerkung 1.10**

- Falls für $x \in \omega^\omega$ die Relation $E_x$ fundiert ist, können wir mit Hilfe von $E_x$ rekursiv eine Rangfunktion auf $\omega$ definieren:

$$\rho_x(n) = \sup\big(\{\rho_x(m) + 1;\; \langle m, n \rangle \in E_x\}\big).$$

- Mit $\|x\| := \sup(\{\rho_x(n){+}1;\; n \in \omega\})$ wird dann die *Länge von* $E_x$ bezeichnet.

- Sei $x \in \omega^\omega$ und $E_x$ fundiert. Dann ist

  – $\rho_x(n) \;=\; \sup(\varnothing) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$ ($n$ ist minimal bezüglich $E_x$ oder $n \notin \mathrm{Feld}(E_x)$).

  – $\|x\| \in \omega_1$.

**Bemerkung:** Falls $x \in \omega^\omega$ eine Wohlordnung kodiert, ist $\rho_x$ eine ordnungserhaltende Bijektion von $\langle \omega, E_x \rangle$ nach $\langle \|x\|, \in \rangle$ In diesem Fall ist $\|x\|$ gleich dem Ordnungstyp von $E_x$.
Der folgende Hilfssatz zeigt, daß auf diese Weise ein Element von $\omega^\omega$ die Information einer abzählbaren Ordinalzahl beinhalten kann.

**Hilfssatz 1.11**
*Die Abbildung*

$$f_2 : \omega^\omega \to \omega_1 \,,\ x \mapsto \begin{cases} \|x\| & , \textit{ falls } E_x \textit{ fundiert} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*ist surjektiv.*

**Beweis:** Sei $\alpha \in \omega_1$. Für $\alpha \leq \omega$ sei $<^*$ die übliche Relation $\in \cap\ \alpha \times \alpha$ auf $\alpha$.
Im Falle $\omega < \alpha$ existiert eine Bijektion $\varphi : \omega \longrightarrow \alpha$.
Die Relation $<^*$ sei dann für beliebige $m, n \in \omega$ definiert durch:

$$m <^* n \iff \varphi(m) \in \varphi(n).$$

$<^*$ ist fundiert und sogar eine Wohlordnung. Sei $x \in \omega^\omega$ wie folgt definiert:

$$x(\ell) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \ell = \langle\!\langle m, n \rangle\!\rangle \text{ und } m <^* n \\ 1 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit kodiert $x$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha$.

□

## 1.3 Die Borel– und die projektive Hierarchie

Nun führe ich die beiden zentralen Hierarchien der klassischen Deskriptiven Mengenlehre ein (vgl. Jech [13, §39] und Kanamori [14, §12]).
Die Überlegungen in diesem Abschnitt lassen sich nicht nur für $\omega^\omega$ oder $\mathbb{R}$, sondern für eine grössere Klasse von topologischen Räumen weitgehend analog durchführen.

**Definition 1.12** Ein topologischer Raum heißt *polnischer Raum*, falls er ein separabler, vollständiger metrischer Raum ist.

**Beispiele** für polnische Räume sind:

(1) $\mathbb{R}$ versehen mit der natürlichen Topologie.

(2) $\mathbb{R}^n$ für $1 < n \in \omega$ versehen mit der Produkttopologie von $\mathbb{R}$.

(3) Der Baire–Raum $\omega^\omega$.

(4) Die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ versehen mit der von der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Spurtopologie.

(5) Der Cantor–Raum $2^\omega$ mit der Topologie, die als offene Basismengen die Mengen $\{x \in 2^\omega;\ s \subset x\}$ für $s \in 2^{<\omega}$ hat.

Für den Rest des Kapitels liegt das Axiomensystem ZSF + DC zugrunde. DC ist das *Axiom der abhängigen Auswahlen* (Principle of Dependent Choices)[4].
DC impliziert das abzählbare Auswahlaxiom $\mathrm{AC}_\omega$, welches seinerseits $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$[5] impliziert.
In den folgenden Kapiteln wird im allgemeinen der Baire–Raum betrachtet. Die Resultate aus den nächsten Abschnitten, die dort verwendet werden, sind alle bereits in ZSF + $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ beweisbar.

**Bemerkung:** Das Produkt zweier polnischer Räume ist wieder polnisch.

**Hilfssatz 1.13** *In einem polnischen Raum ist jede offene Menge abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.*

**Beweis:** Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ ein polnischer Raum.
Beh. 1: Die Topologie von $\mathfrak{X}$ hat eine abzählbare Basis.
Beweis: Weil $\mathfrak{X}$ ein metrischer Raum ist, wird die Topologie von einer Metrik $d$ erzeugt.
Sei $D = \{a_n;\ n \in \omega\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $X$. Für $z \in X$ und $\varepsilon \in\, ]0, \infty[$ sei $K_\varepsilon(z) = \{x \in X;\ d(x, z) < \varepsilon\}$ die offene $\varepsilon$-Kugel um den Punkt $z$.
Dann ist die Menge $\mathcal{B} := \{K_{\frac{1}{n}}(a);\ a \in D\ \ \&\ \ n \in \omega\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von $\mathfrak{X}$.
Denn sei $O \in \mathcal{O}$ und $x \in O$, dann existiert ein minimales $n_x \in \omega$ mit $K_{\frac{1}{n_x}}(x) \subseteq O$.
Da $D$ dicht ist, existiert ein (in der Abzählung von $D$ minimales) $a_{n_x} \in D$ derart, daß $a_{n_x} \in K_{\frac{1}{2n_x}}(x)$ gilt.
Somit ist $x \in K_{\frac{1}{2n_x}}(a_{n_x})$ und für alle $y \in K_{\frac{1}{2n_x}}(a_{n_x})$ gilt:

[4] DC: *Sei $\rho$ eine binäre Relation auf einer nicht leeren Menge $X$, so daß es zu jedem $x \in X$ ein $y \in X$ gibt mit $y\,\rho\,x$. Dann existiert eine Folge $\langle x_n;\ n \in \omega\rangle$ in $X$ mit $x_{n+1}\,\rho\,x_n$ für alle $n \in \omega$.*

[5] $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$: *Jede abzählbare Familie nicht leerer Teilmengen von $\omega^\omega$ besitzt eine Auswahlfunktion.*

$d(x,y) \leq d(x,a_{n_x}) + d(a_{n_x},y) < \frac{1}{n_x}$ , d.h. $K_{\frac{1}{2n_x}}(a_{n_x}) \subseteq O$.
Es folgt: $O = \bigcup_{x\in O} K_{\frac{1}{2n_x}}(a_{n_x})$.
Beh. 2: Jede Menge der Basis $\mathcal{B}$ ist abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.
Sei $z \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $K_\varepsilon(z) = \bigcup_{n\in\omega} \{x \in X;\ d(x,z) \leq \varepsilon - \frac{1}{n}\}$, d.h. die abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

Sei nun $O$ eine offene Menge. Dann ist $O = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ die abzählbare Vereinigung von Basismengen aus $\mathcal{B}$. Jedes der $B_n$ $(n \in \omega)$ kann wie in Beh. 2 gezeigt wurde als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen $B_n = \bigcup_{i\in\omega} A_{n,i}$ dargestellt werden. Also ist auch $O = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{i\in\omega} A_{n,i}$ eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

□

Ausgehend von obigem Resultat lassen sich nun die Familien $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ und $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ für $1 \leq \alpha < \omega_1$ rekursiv definieren.

**Definition 1.14** Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ ein polnischer Raum, sei $A \subseteq X$. Sei $\alpha > 1$ eine Ordinalzahl.

$$\begin{aligned}
A \in \mathbf{\Sigma}^0_1(X) &\iff A \text{ offen.}\\
A \in \mathbf{\Pi}^0_1(X) &\iff A \text{ abgeschlossen.}\\
A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) &\iff A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \text{ , wobei } A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_n}(X) \text{ für } \beta_n < \alpha,\ n \in \omega.\\
A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) &\iff A = \bigcap_{n\in\omega} A_n \text{ , wobei } A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\beta_n}(X) \text{ für } \beta_n < \alpha,\ n \in \omega.\\
A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) &\iff A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).
\end{aligned}$$

Elemente von $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ bzw. von $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ heißen $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$- bzw. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$-Mengen.

**Bemerkungen:**

- Wenn der zugrundeliegende Raum aus dem Zusammenhang klar ist, schreibe ich $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ statt $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ etc.

- Für die ersten Stufen der Borel–Hierarchie werden auch folgende ältere Bezeichnungen verwendet:

  $F_\sigma$ für $\mathbf{\Sigma}^0_2$, $G_\delta$ für $\mathbf{\Pi}^0_2$, $G_{\delta\sigma}$ für $\mathbf{\Sigma}^0_3$, $F_{\sigma\delta}$ für $\mathbf{\Pi}^0_3$ etc.

- Durch Induktion sieht man sofort, daß für alle $\alpha$ und alle $A \subseteq X$ gilt:

$$A \in \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \iff X - A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$$

- Nach Hilfssatz 1.13 ist jede offene Menge abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen und somit: $\boldsymbol{\Sigma}^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_2$.

  Aus dieser Inklusion und der Definition 1.14 folgt direkt für alle $1 \leq \beta < \alpha$:

  $\boldsymbol{\Sigma}^0_\beta \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ , $\boldsymbol{\Pi}^0_\beta \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ , $\boldsymbol{\Sigma}^0_\beta \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ , $\boldsymbol{\Pi}^0_\beta \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$.

- Es ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 & \\
 & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 & & & \dots \\
 & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \\
 & & \boldsymbol{\Pi}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 &
\end{array}$$

- Es ist $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1} = \bigcup\limits_{1 \leq \alpha \in \omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$.

  Beweis: Sei $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$. Dann ist $A = \bigcup\limits_{i \in \omega} A_i$ für $A_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\beta_i}$ mit $\beta_i \in \omega_1$ $(i \in \omega)$. Somit ist $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\gamma$ für $\gamma := \sup\{\beta_i;\ i \in \omega\} + 1$. Da $\aleph_1$, wie in Abschnitt 2.3 gezeigt werden wird, unter der Annahme von $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ regulär ist, ist $\gamma$ als Limes einer abzählbaren Folge abzählbarer Ordinalzahlen ein Element von $\omega_1$.

  Die andere Richtung ist offensichtlich.

- Hieraus sieht man leicht, daß für $\alpha \geq \omega_1$ gilt: $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$.

  Angenommen dies wäre falsch. Dann gäbe es eine kleinste Ordinalzahl $\alpha > \omega_1$, so daß $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \neq \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$, d.h. $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \nsubseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$. Für jede Menge $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ gilt, daß sie abzählbare Vereinigung von Elementen $A_i$ $(i \in \omega)$ von früheren Stufen ist. Doch diese Stufen sind nach Wahl von $\alpha$ alle Teilmengen von $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$. Wegen obiger Aussage ist also jedes der $A_i$ in einem $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\beta_i}$ für $\beta_i \in \omega_1$. Doch dann ist $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$, Widerspruch!

- Es gilt $\bigcup\limits_{1 \leq \alpha < \omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup\limits_{1 \leq \alpha < \omega_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha(X)$, und diese Vereinigung ist die Klasse der *Borel-Mengen* des Raumes $\langle X, \mathcal{O} \rangle$.

- Offensichtlich sind $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Mengen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen und $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-Mengen unter der Bildung abzählbarer Schnitte abgeschlossen. Wegen
$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{i\in\omega} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in\omega} B_j\Big) &= \bigcup_{i,j\in\omega} (A_i \cap B_j) \text{ und}\\ \Big(\bigcap_{i\in\omega} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{j\in\omega} B_j\Big) &= \bigcap_{i,j\in\omega} (A_i \cup B_j)\end{aligned}$$
für beliebige Mengen $A_i, B_j$ $(i, j \in \omega)$ folgt, daß die Familien $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ $(\alpha \in \omega_1)$ jeweils abgeschlossen unter der Bildung endlicher Schnitte sowie endlicher Vereinigungen sind.

- Aus Definition 1.14 folgt induktiv, daß das stetige Urbild einer $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Menge wieder eine solche und das einer $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$- wieder eine $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-Menge ist.

- 1905 zeigte Lebesgue [20] für die Borel–Hierachie von $\mathbb{R}$:
$$\forall\, \alpha \in \omega_1 : \quad \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbb{R}) \;\not\subseteq\; \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathbb{R}).$$
Es handelt sich also bei der Borel–Hierarchie um eine echte Hierarchie:
$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}^0_1(\mathbb{R}) \;\subset\; \mathbf{\Sigma}^0_2(\mathbb{R}) \;\subset\; \ldots \subset\; \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathbb{R}) \;\subset\; \ldots\\ \mathbf{\Pi}^0_1(\mathbb{R}) \;\subset\; \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{R}) \;\subset\; \ldots \subset\; \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathbb{R}) \;\subset\; \ldots\end{aligned}$$
Diese Aussage ist für jeden überabzählbaren polnischen Raum gültig (vgl. Kechris [17, Theorem 22.4]).

In derselben Arbeit erwähnt Lebesgue, daß die Projektion einer Borel–Menge wieder eine solche ist. Michail Suslin bemerkte den Fehler. Er nannte Projektionen von Borel–Megen „ensembles (A)“. Damit lieferte er die Basis für eine neue Hierarchie, welche durch Projektion und Komplementbildung entsteht.

**Definition 1.15** Seien $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$, $\mathfrak{Y} = \langle Y, \mathcal{O}'\rangle$ polnische Räume, $B \subseteq X \times Y$. Die *Projektion von $B$* ist die Menge
$$pB = \{x \in X;\; \exists\, y \in Y :\; \langle x, y\rangle \in B\}.$$

**Definition 1.16** Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ ein polnischer Raum.
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$, falls $A = pB$ für eine Borel–Menge $B \subseteq X \times X$.

**Bemerkung:** $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen werden auch analytische Mengen genannt. Da jedoch im nächsten Abschnitt die sogenannte analytische Hierarchie eingeführt wird, soll, um Verwechslungen zu vermeiden, in dieser Arbeit ausschließlich von $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen gesprochen werden und den Begriff analytische Menge für die Mengen der analytischen Hierarchie verwendet werden.
Suslin selbst zeigte folgenden Zusammenhang zwischen $\mathbf{\Sigma}^1_1$ und Borel–Mengen:

**Satz 1.17** (Suslin, 1917)
*Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ ein polnischer Raum. Sei $A \subseteq X$.*
*$A$ ist Borel–Menge $\iff$ $A$ und $X - A$ sind $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$.*

Die Beweise für diesen Satz und die folgende Bemerkung finden sich bei Jech [13, Theorem 93 bzw. Lemma 39.2].

**Bemerkung 1.18** Seien $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$, $\mathfrak{Y} = \langle Y, \mathcal{O}'\rangle$ polnische Räume.
Äquivalent sind:

(i) $A$ ist eine $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$-Menge.

(ii) $A = pB$ für eine abgeschlossene Menge $B \subseteq X \times \omega^\omega$.

(iii) Es existiert eine stetige Abbildung $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ und eine Borel–Menge $B$ in $\mathfrak{Y}$ mit $A = f(B)$.

(iv) Es existiert eine stetige Abbildung $f : \omega^\omega \to \mathfrak{X}$ mit $A = \mathrm{Im}(f)$.

Mit Hilfe von Projektionen und Komplementbildung können wir nun die projektive Hierarchie definieren:

**Definition 1.19** Sei $\mathfrak{X} = \langle X, \mathcal{O}\rangle$ ein polnischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $n \in \omega$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathbf{\Sigma}^1_0(X) &\iff A \text{ offen.}\\
A \in \mathbf{\Pi}^1_0(X) &\iff A \text{ abgeschlossen.}\\
A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) &\iff A = pB \text{ , wobei } B \subseteq X \times \omega^\omega \text{ eine } \mathbf{\Pi}^1_n(X)\text{-Menge.}\\
A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X) &\iff X - A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X).\\
A \in \mathbf{\Delta}^1_n(X) &\iff A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(X).
\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

- Wie bei der Borel–Hierarchie wird der Zusatz $(X)$ weggelassen, wenn der betrachtete Raum aus dem Zusammenhang klar ist.

- Für die Stufen der projektiven Hierarchie sind auch die folgenden älteren Bezeichnungen im Gebrauch:

  **A** für $\mathbf{\Sigma}^1_1$, **CA** für $\mathbf{\Pi}^1_1$, **PCA** für $\mathbf{\Sigma}^1_2$, **CPCA** für $\mathbf{\Pi}^1_2$ etc.

- Da abgeschlossene Mengen offensichtlich $\mathbf{\Pi}^1_1$ sind, ist $\mathbf{\Sigma}^1_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_2$ und es folgt induktiv für alle $n \in \omega$:

  $\mathbf{\Sigma}^1_n \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ , $\mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ , $\mathbf{\Sigma}^1_n \subseteq \mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ , $\mathbf{\Pi}^1_n \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ .

Damit erhält man:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{\Sigma}^1_0 & & & & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & & & \mathbf{\Sigma}^1_2 \\
& \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
& & \mathbf{\Delta}^1_1 & & & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & \ldots \\
& \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \\
\mathbf{\Pi}^1_0 & & & & \mathbf{\Pi}^1_1 & & & & \mathbf{\Pi}^1_2
\end{array}
$$

- Die Elemente der Klasse $\bigcup_{n\in\omega} \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{n\in\omega} \mathbf{\Pi}^1_n$ heißen *projektive Mengen.*

- Aus dem Satz von Suslin 1.17 folgt, daß die Borel-Mengen gerade die $\mathbf{\Delta}^1_1$-Mengen sind.

- Für jedes $n \geq 1$ ist $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \not\subseteq \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, falls der zugrundeliegende polnische Raum $\langle X, \mathcal{O}\rangle$ überabzählbar ist. Dann ist auch die projektive Hierarchie eine echte Hierarchie.

- Die Klassen $\mathbf{\Sigma}^1_n$ für $n \in \omega$ sind abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Schnitte, abzählbarer Vereinigungen, stetiger Urbilder und stetiger Bilder.

- Die Klassen $\mathbf{\Pi}^1_n$ für $n \in \omega$ sind abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Schnitte, abzählbarer Vereinigungen und stetiger Urbilder.

  [Für die letzten drei Punkte vgl. Kechris [17, Prop. 37.1 bzw. Theorem 37.7].]

# Kapitel 2

# Das Axiom der Determiniertheit

In diesem Kapitel führe ich das Axiom der Determiniertheit (AD) ein und ziehe erste Folgerungen daraus. Dabei zeige ich, daß AD dem Auswahlaxiom widerspricht, jedoch eine gewisse Form von Auswahl erlaubt.
Damit wird schließlich bewiesen, daß $\aleph_1$ unter der Annahme von AD eine reguläre Kardinalzahl ist.
Die in diesem Kapitel verwendeten Begriffe und Notationen entsprechend denen der Standardliteratur und finden sich zum Beispiel bei Jech [13, §43] und Kanamori [14, §27]. Für den historischen Überblick zu Spielen vgl. Kanamori [14, §27; S.371] und Fenstadt [9, S.44f.].

## 2.1 Determiniertheit von Mengen

Ernst Zermelo, Johann von Neumann, Dénes König und andere betrachteten zu Beginn dieses Jahrhunderts Spiele unter mathematischen Gesichtspunkten. Ihr Interesse fand dabei vor allem das Schachspiel, das sie auf mögliche Gewinnstrategien untersuchten.
In einer berühmt gewordenen Arbeit von Zermelo aus dem Jahr 1913 beschäftigt sich dieser mit der Frage, ob „der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Partien sowie der bestmögliche Zug mathematisch–objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden“ kann (Zermelo [33, S.501]).
Zermelo und von Neumann bewiesen 1927 bzw. 1928, daß in endlichen Zwei–Personen–Nullsummenspielen mit perfekter Information immer einer der Spieler

eine Gewinnstrategie besitzt.
Dies trifft somit auch für das Schachspiel zu. Allerdings ist bis heute bekanntlich offen, welcher der Spieler eine Gewinnstrategie bzw. eine Nicht–Verlust–Strategie, da auch ein Unentschieden möglich ist, hat.
Unendliche Spiele wurden dann in den 20er und 30er Jahren in Polen von Mathematikern wie Stefan Banach, Hugo Steinhaus und Stanisław Mazur untersucht. Sie entdeckten auch, daß bestimmte Spiele in einem engen Zusammenhang mit interessanten Eigenschaften von Teilmengen der reellen Zahlen stehen. Es wurden allerdings nur wenige Resultate in diesem Gebiet veröffentlicht.
David Gale und Frank Stewart publizierten 1953 einen Artikel, der sich erstmals umfassender mit dem Typ von Spiel beschäftigt, der auch in dieser Arbeit betrachtet wird.[1]

**Definition 2.1**
Sei $A \subseteq \omega^\omega$. Zwei Spieler I und II spielen das *Spiel* $G(A)$ wie folgt:
Zunächst spielt Spieler I eine natürliche Zahl $x(0)$, dann spielt Spieler II eine natürliche Zahl $x(1)$. Danach ist wieder I an der Reihe und spielt $x(2)$ usw.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $x(0)$ | | $x(2)$ | | $x(4)$ | $\ldots$ | |
| **II** | | $x(1)$ | | $x(3)$ | | $x(5)$ | $\ldots$ |

Jeder Zug wird dem Mitspieler mitgeteilt. Das Spiel endet nach $\omega$ Zügen.
Falls die resultierende Folge $x := \langle x(i);\ i \in \omega \rangle \ \in \omega^\omega$ in $A$ liegt, so gewinnt Spieler I; ansonsten gewinnt Spieler II.

Wenn $x \in \omega^\omega$ die resultierende Partie eines Spiels ist, dann hat I die Folge $x_{\mathrm{I}}$ und II entsprechend $x_{\mathrm{II}}$ gespielt.

**Definition 2.2**

(i) Eine *Strategie für Spieler I* ist eine Funktion $\sigma : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \longrightarrow \omega$.

(ii) Eine *Strategie für Spieler II* ist eine Funktion $\tau : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \longrightarrow \omega$.

[1]Einige der Resultate, die Gale und Stewart veröffentlichten, wurden auch von Jan Mycielski und A. Zięba gezeigt (vgl. [29]). Ihr Artikel erschien 1955. Laut Mycielski, Swierczkowski und Zięba war dies bevor der Artikel von Gale und Stewart in Polen erhältlich war (vgl. [28, S.485]).

(iii) Spieler I *spielt gemäß der Strategie* $\sigma$, falls

$x(0) = \sigma(\varnothing)$ und $x(2n) = \sigma(\langle x(0), x(1), \ldots, x(2n-1)\rangle) \quad \forall\, 0 < n \in \omega.$

Analog für Spieler II.

**Bemerkung 2.3**

- Eine Strategie kann man also als eine Regel auffassen, die dem Spieler den nächsten Zug vorgibt, abhängig von den bisherigen Zügen beider Spieler.
- Falls Spieler I gemäß seiner Strategie $\sigma$ und II die Folge $y \in \omega^\omega$ spielt, so ist die resultierende Partie dadurch eindeutig bestimmt und wird mit $\sigma * y$ bezeichnet.
  Falls Spieler II gemäß seiner Strategie $\tau$ und I die Folge $x \in \omega^\omega$ spielt, so wird die resultierende Partie mit $x * \tau$ bezeichnet.
- Man kann Strategien wie folgt als Elemente von $\omega^\omega$ auffassen:
  Sei $\sigma : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \longrightarrow \omega$ eine Strategie für I.
  $\sigma$ wird zuerst als Abbildung von $\omega^{<\omega}$ nach $\omega$ aufgefaßt durch
  $\sigma(s) = 0$ für $s \in \omega^{<\omega} - \left(\bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n}\right)$.
  Mit Hilfe der bijektiven Abzählung $\Phi : \omega^{<\omega} \to \omega$ von $\omega^{<\omega}$ kann man nun wie folgt $\sigma$ als Element $\sigma'$ von $\omega^\omega$ beschreiben:
  $\sigma' : \omega \longrightarrow \omega,\ n \mapsto \sigma\big(\Phi^{-1}(n)\big)$.
  Dann gilt für alle $s \in \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n}$ : $\sigma'\big(\Phi(s)\big) = \sigma\big(\Phi^{-1}\big(\Phi(s)\big)\big) = \sigma(s)$.

**Definition 2.4**

(i) Eine Strategie $\sigma$ für Spieler I heißt *Gewinnstrategie*, falls Spieler I immer gewinnt, wenn er gemäß $\sigma$ spielt, d.h. falls

$$\{\sigma * y;\ y \in \omega^\omega\} \subseteq A.$$

(ii) Analog heißt eine Strategie $\tau$ für Spieler II *Gewinnstrategie*, falls

$$\{x * \tau;\ x \in \omega^\omega\} \subseteq \omega^\omega - A.$$

(iii) Das Spiel $G(A)$ heißt *determiniert*, wenn einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

(iv) Die Menge $A$ heißt *determiniert*, wenn das Spiel $G(A)$ determiniert ist.

## 2.2 Das Axiom der Determiniertheit

David Gale und Frank Stewart zeigten in ihrem Artikel von 1953 [10], daß offene und abgeschlossene Teilmengen von $\omega^\omega$ determiniert sind.
Für sie gilt, daß es für einen der Spieler bereits zu einem endlichen Zeitpunkt feststeht, wenn er verliert, und diese Rückführung auf einen endlichen Sachverhalt macht die Determiniertheit beweisbar.
Außerdem zeigten Gale und Stewart in dem Artikel mit Hilfe des Auswahlaxioms die Existenz einer nicht determinierten Menge.
Damit war klar, daß „vollständige Determiniertheit" nicht bewiesen werden kann.
Philip Wolfe zeigte 1955, daß auch abzählbare Vereinigungen abgeschlossener und abzählbare Schnitte offener Mengen, also $\mathbf{\Sigma}^0_2$- und $\mathbf{\Pi}^0_2$-Mengen, determiniert sind.
Anstatt in dieser Richtung weiter zu gehen und zu fragen, welche Teilmengen von $\omega^\omega$ determiniert sind, wählten die polnischen Mathematiker Jan Mycielski und Hugo Steinhaus einen diametral anderen Ansatz:
Sie schlugen 1962 [26] vor, die Determiniertheit aller Teilmengen von $\omega^\omega$ als Axiom zu formulieren und nannten es *Axiom der Determiniertheit*.

AD: Für jedes $A \subseteq \omega^\omega$ ist das Spiel $G(A)$ determiniert.

Mycielski und Steinhaus war die Unvereinbarkeit von AD mit dem Auswahlaxiom bekannt. Ihr Artikel [26] trägt sogar den Titel: „A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice".
Sie schlugen AD als eine Alternative zu AC vor, die man zur Mengenlehre von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF) hinzunehmen kann.
Als Motivation gaben sie an, daß AD eine Reihe von interessanten und insbesondere für die Analysis auch wünschenswerten Konsequenzen für Teilmengen von $\mathbb{R}$ hat.

**Satz 2.5** [ZSF + AD]
*Jede Menge reeller Zahlen*

*(i) ist Lebesgue–meßbar,*

*(ii) hat die Baire–Eigenschaft und*

*(iii) ist entweder abzählbar oder besitzt eine perfekte Teilmenge.*

**Beweis:** (*i*) Vgl. Jan Mycielski und Stanisław Swierczkowski 1964 [27].
(*ii*) Die Idee für das Spiel, mit dem man diese Aussage zeigen kann, stammt von Stanisław Mazur. Stefan Banach hat 1935 einen Beweis gefunden, ihn aber nie veröffentlicht. Der erste publizierte Beweis stammt aus dem Jahr 1957 von John Oxtoby [30] (vgl. auch Mycielski [25, S.208]).
(*iii*) Vgl. Morton Davis 1964 [2, Theorem 2.1].

Mycielski und Steinhaus erwähnten, daß viele wichtige Sätze der reellen Analysis auch in ZSF + AD beweisbar sind, weil dafür eine aus AD folgende schwache Version des Auswahlaxioms ausreicht.
Weitere interessante Resultate im Zusammenhang mit dem Axiom der Determiniertheit enthält ein Artikel, der 1964 von Mycielski publiziert wurde [25]. Dort werden auch einige Überlegungen zum Problem, ob AD überhaupt mit den ZSF–Axiomen konsistent sein kann, angestellt. Mycielski konnte jedoch keine befriedigende Antwort auf diese Frage geben. Eine solche wurde erst in den 80er Jahren im Zusammenhang mit der Theorie großer Kardinalzahlen gefunden. Ein Theorem von Hugh Woodin besagt, daß „ZSF + AD“ und „ZSF + AC + Es gibt unendlich viele Woodin–Kardinalzahlen“ äquikonsistent sind.[2]
Wenn Mycielski und Steinhaus das Konsistenzproblem auch nicht lösen konnten, so geben sie doch bereits in ihrer ersten Publikation zu AD [26, S.1] eine, wie sie es nennen, „intuitive Rechtfertigung“ für das Axiom. Sie erinnern an das Resultat von Zermelo und von Neumann, daß endliche Versionen der Spiele des hier betrachteten Typs determiniert sind, und argumentieren, daß bei zwei unendlich klugen Spielern, welche die Menge $A \subseteq \omega^\omega$ vollständig kennen und zu jedem Zeitpunkt einer Partie über alle das Spiel betreffende Informationen verfügen, der Ausgang der Partie nicht dem Zufall überlassen sein kann. Aufgrund des Satzes von Zermelo und von Neumann kann man also AD als die Verallgemeinerung eines im Endlichen gültigen Sachverhalts auf das Unendliche sehen, genauso wie auch das Auswahlaxiom die Verallgemeinerung eines im Endlichen beweisbaren Resultats ist.
Bei diesem Vergleich ist es jedoch wichtig zu sagen, daß die Art der Verallgemeinerung beim Axiom der Determiniertheit eine grundlegend andere ist als bei AC. Dies diskutieren Ulrich Felgner und Klaus Schulz in einem Artikel von 1984 über

[2]Dieses Ergebnis ist bis heute nicht veröffentlicht. Es ist jedoch eine Monographie in Arbeit, die diesen Satz sowie die für den Beweis notwendige Theorie ausführlich behandeln wird: [11].

algebraische Konsequenzen aus AD [8].
Betrachtet man ein endliches Spiel, so bekommt man eine Gewinnstrategie für einen der Spieler, indem man die Menge aller möglichen Partien des Spiels in der Form eines Baumes notiert, diesen dann rückwärts durchläuft und die Elemente des Baumes entsprechend „einfärbt“, je nachdem, welcher Spieler ab da eine Gewinnstrategie besitzt. Das ist möglich, da der Baum eine endliche Höhe hat, jedoch ist diese Überlegung nicht auf Spiele, die aus $\omega$ vielen Zügen bestehen, verallgemeinerbar. Die Menge der natürlichen Zahlen kann nicht der Reihe nach rückwärts durchlaufen werden.
Das Auswahlaxiom hingegen verlangt, daß man einen im Endlichen möglichen Prozeß ins Unendliche ausdehnt, wobei er seine Richtung „längs transfiniter Skalen“ (ebda. S.563) beibehält.
Somit besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Verallgemeinerungen bei AD und AC.

## 2.3 Determiniertheit und Auswahl

Zunächst werden die zitierten Ergebnisse ausgeführt, daß AD und AC unvereinbar sind und daß AD andererseits eine gewisse Auswahlmöglichkeit impliziert.
Danach zeige ich, daß diese Form des Auswahlaxioms ausreicht, um die Regularität der Kardinalzahl $\aleph_1$ zu zeigen.

**Satz 2.6** (Gale–Stewart, 1953) [ZSF + AC]
*Es gibt eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$, die nicht determiniert ist.*

**Beweis:** Nach 2.2 ist eine Strategie für Spieler I eine Funktion $\sigma : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \longrightarrow \omega$.
Wegen $\left|\bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n}\right| = \aleph_0$ gibt es $|\omega^\omega| = 2^{\aleph_0}$ viele verschiedene Strategien für Spieler I und analog auch für Spieler II.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms konstruieren wir eine $2^{\aleph_0}$-mächtige Menge $A \subseteq \omega^\omega$ so, daß

- für jede Strategie $\tau$ von Spieler II ein $x \in \omega^\omega$ mit $x * \tau \in A$ und
- für jede Strategie $\sigma$ von Spieler I ein $y \in \omega^\omega$ mit $\sigma * y \in \omega^\omega - A$ existiert.

Damit kann für keinen der Spieler eine Gewinnstrategie existieren, d.h. das Spiel $G(A)$ ist nicht determiniert.

Seien $\{\sigma_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $\{\tau_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ die Mengen der möglichen Strategien für Spieler I bzw. II.
Seien $x_0,\, y_0 \in \omega^\omega$ so gewählt, daß gilt:

$$b_0 \ := \ \sigma_0 * y_0 \ \neq \ x_0 * \tau_0 \ =: \ a_0.$$

Seien nun $\{a_\beta;\ \beta < \alpha\}$ und $\{b_\beta;\ \beta < \alpha\}$ für $1 \leq \alpha < 2^{\aleph_0}$ gegeben.
Wir wählen mit AC $y_\alpha,\ x_\alpha \in \omega^\omega$ so, daß gilt:

$$\begin{aligned} b_\alpha \ &:= \ \sigma_\alpha * y_\alpha \ \notin \ \{a_\beta;\ \beta < \alpha\} \ \text{ und} \\ a_\alpha \ &:= \ x_\alpha * \tau_\alpha \ \notin \ \{b_\beta;\ \beta \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Wegen $|\{\sigma_\alpha * y;\ y \in \omega^\omega\}| = 2^{\aleph_0} \ > \ |\{a_\beta;\ \beta < \alpha\}|$ existieren solche $y_\alpha \in \omega^\omega$. Aus den gleichen Gründen existieren solche $x_\alpha$.

Offensichtlich sind die auf diese Weise konstruierten Mengen $A = \{a_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $B = \{b_\alpha;\ \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ disjunkt.
Das Spiel $G(A)$ ist nicht determiniert, denn es gilt:

- Zu jeder Strategie $\sigma$ für Spieler I existiert ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$ mit $\sigma = \sigma_\alpha$ und ein $y_\alpha \in \omega^\omega$, das Spieler II spielen kann, so daß $\sigma_\alpha * y_\alpha \ \notin A$ gilt. Also ist $\sigma$ keine Gewinnstrategie.

- Zu jeder Strategie $\tau$ für Spieler II existiert ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$ mit $\tau = \tau_\alpha$ und ein $x_\alpha \in \omega^\omega$, das Spieler I spielen kann, so daß $x_\alpha * \tau_\alpha \ \in A$ gilt. Also ist $\tau$ keine Gewinnstrategie.

$\square$

Die folgende Implikation von AD beweist Mycielski in seinem Artikel zu AD von 1964 [25, (7.2)]. Er bemerkt dazu, daß sie auch von Stanisław Swierczkowski und unabhängig davon von Dana Scott gefunden wurde (vgl. ebda. S.207).

**Satz 2.7** [ZSF + AD]
*Es gilt* $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$, *d.h. jede abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von* $\omega^\omega$ *besitzt eine Auswahlfunktion.*

**Beweis:** Wir betrachten ein Spiel, in dem Spieler I im ersten Zug die Menge nennt, aus der ausgewählt werden soll, und Spieler II dann versuchen muß, ein Element dieser Menge zu konstruieren. Aus der Determiniertheit des Spiels folgt dann sofort, daß Spieler II eine Gewinnstrategie hat, und diese leistet dann die gewünschte Auswahl.

Sei $\mathfrak{X} := \{X_n;\ n \in \omega\}$ eine Familie nichtleerer Teilmengen von $\omega^\omega$.
Sei $A := \{x \in \omega^\omega;\ x_{\mathrm{II}} \notin X_{x(0)}\}$.
Dann hat Spieler I im Spiel $G(A)$ keine Gewinnstrategie. Denn wenn Spieler I als ersten Zug $x(0)$ gespielt und damit die Menge $X_{x(0)}$ festgelegt hat, kann II nach und nach ein Element dieser nichtleeren Menge spielen und gewinnt die Partie.
Weil AD angenommen wurde, besitzt also Spieler II eine Gewinnstrategie $\tau$, d.h. für alle $y \in \omega^\omega$ gilt: $(y * \tau)_{\mathrm{II}} \in X_{y(0)}$. Mit der Strategie $\tau$ definiert man nun wie folgt eine Auswahlfunktion:

$$f : \mathfrak{X} \longrightarrow \bigcup_{n \in \omega} X_n, \quad X_n \mapsto \big(\langle\, n, 0, 0, 0, \dots \rangle * \tau\big)_{\mathrm{II}}.$$

□

Um die Regularität von $\aleph_1$ beweisen zu können, muß man abzählbar oft aus Teilmengen von $\aleph_1$ auswählen. Ich zeige nun, daß das unter der Annahme von $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ möglich ist.

**Proposition 2.8** *Äquivalent sind:*

*(i)* $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$

*(ii) Für jede Menge $X$, für die eine surjektive Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ existiert, gilt* $\mathrm{AC}_\omega(X)$.

**Beweis:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $X$ eine Menge und $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ surjektiv.
Sei $\{X_n;\ n \in \omega\}$ eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von $X$.
Wegen der Surjektivität von $f$ ist $\{f^{-1}[X_n];\ n \in \omega\}$ eine abzählbare Familie von nichtleeren Teilmengen von $\omega^\omega$. Also existiert mit $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ eine Auswahlfunktion $g : \{f^{-1}[X_n];\ n \in \omega\} \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}[X_n]$, mit $g(f^{-1}[X_n]) \in f^{-1}[X_n]$ für alle $n \in \omega$. Es folgt:

$$f\big(g(f^{-1}[X_n])\big) \in f\big[\, f^{-1}[X_n]\big] \subseteq X_n \quad \forall\, n \in \omega.$$

Mit $h : \{X_n;\ n \in \omega\} \longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n, \quad h(X_n) := f\big(g(f^{-1}[X_n])\big)$ haben wir also die gesuchte Auswahlfunktion gefunden.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Klar mit $f = Id_{\omega^\omega}$.

□

**Proposition 2.9** [ZSF + $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$]
*Es existiert eine surjektive Abbildung* $f : \omega^\omega \longrightarrow {\omega_1}^\omega$.

**Beweis:** Nach 1.2 existieren Surjektionen
$f_1 : \omega^\omega \longrightarrow (\omega^\omega)^\omega\,,\ x \mapsto \langle (x)_i;\ i \in \omega\rangle$ und
$f_2 : \omega^\omega \longrightarrow \omega_1\,,\ x \mapsto \begin{cases} \|x\| & , \text{ falls } E_x \text{ fundiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
Sei $f : \omega^\omega \longrightarrow {\omega_1}^\omega\,,\ x \mapsto \langle f_2((x)_i);\ i \in \omega\rangle$.

Es bleibt zu zeigen: $f$ ist surjektiv.
Sei $\langle \alpha_i;\ i \in \omega\rangle \in {\omega_1}^\omega$. Da $f_2$ surjektiv ist, ist $\big\{f_2^{-1}[\{\alpha_i\}];\ i \in \omega\big\}$ eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von $\omega^\omega$.
Mit $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ wählen wir nun für alle $i \in \omega$ ein $x_i \in f_2^{-1}[\{\alpha_i\}]$ aus.
Da $f_1$ surjektiv ist, existiert zu $\langle x_i;\ i \in \omega\rangle$ ein $x \in \omega^\omega$ mit $(x)_i = x_i$ für alle $i \in \omega$ und es gilt:

$$f(x) = \langle f_2((x)_i);\ i \in \omega\rangle = \langle f_2(x_i);\ i \in \omega\rangle = \langle \alpha_i;\ i \in \omega\rangle.$$

Also ist $f$ surjektiv.

□

**Korollar 2.10** $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega) \Longrightarrow \mathrm{AC}_\omega({\omega_1}^\omega)$.

□

Damit können wir nun die Regularität von $\aleph_1$ in ZSF + AD zeigen:

**Korollar 2.11** [ZSF + AD]
$\aleph_1$ *ist regulär.*

**Beweis:** Angenommen $\aleph_1$ wäre singulär.
Dann existieren $A_n \subseteq \omega_1$ mit $|A_n| \leq \aleph_0$ für alle $n \in \omega$ und $\aleph_1 = \bigcup_{n \in \omega} A_n$.
Für $n \in \omega$ ist die Menge der Abzählungen von $A_n$ eine Teilmenge von ${A_n}^\omega$ und somit auch von ${\omega_1}^\omega$.
Mit $\mathrm{AC}_\omega({\omega_1}^\omega)$ wählen wir für alle $n \in \omega$ eine Abzählung von $A_n$. Damit ist $\aleph_1 = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ abzählbar, Widerspruch!

$\square$

# Kapitel 3

# Filter

In diesem Kapitel führe ich Filter und Ultrafilter ein und beweise eine Reihe von grundlegenden Resultaten (vgl. dazu Jech [13, §7]). Dabei wird an einigen Stellen darauf eingegangen, was unter Verwendung des Auswahlaxioms gezeigt werden kann.
Ausgehend von Ultrafiltern auf $\omega$ stellt sich die Frage nach der Existenz von Ultrafiltern auf überabzählbaren Kardinalzahlen, was zum Begriff der meßbaren Kardinalzahl führt.
Im zweiten Abschnitt erkläre ich den Bildfilter eines Filters unter einer Abbildung und betrachte anschließend den club–Filter, der von den Teilmengen einer Kardinalzahl erzeugt wird, die abgeschlossen und konfinal sind.
Im letzten Abschnitt wird dann auf die Resultate unter AC Bezug genommen und gezeigt, wie die Annahme von AD sich auf die Existenz bestimmter Ultrafilter auf $\omega$ auswirkt.

## 3.1 Filter und Ultrafilter

Der Begriff des Filters entstammt ursprünglich der Topologie. Er wurde 1937 von Henri Cartan eingeführt.

**Definition 3.1** Sei $M$ eine nicht leere Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
$\mathcal{F}$ heißt *Filter* auf $M$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F},\ M \in \mathcal{F}$,

(ii) $\forall\, X, Y \in \mathcal{F}:\ X \cap Y \in \mathcal{F}$,

(iii) $\forall\, X \in \mathcal{F} \;\; \forall\, Y \; (X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow Y \in \mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, falls zusätzlich gilt:

(iv) $\forall\, X \subseteq M : \quad X \in \mathcal{F}$ oder $M - X \in \mathcal{F}$.

**Definition 3.2** Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit $\varnothing \notin \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ heißt *Filterbasis*, wenn für alle $X, Y \in \mathcal{B}$ ein $Z \in \mathcal{B}$ existiert mit: $Z \subseteq X \cap Y$.
Der *von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter* ist dann $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{Y \subseteq M;\; \exists\, X \in \mathcal{B} : \; X \subseteq Y\}$.

**Beispiele:**

(i) $\mathcal{F} = \{M\}$ ist ein Filter, der sogenannte *triviale Filter.*

(ii) Wenn $M$ eine unendliche Menge ist, dann ist
$\mathcal{F} := \{X \subseteq M;\; M - X$ ist endlich$\}$ ein Filter auf $M$.
$\mathcal{F}$ heißt *Fréchet–Filter.*

**Definition 3.3** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$.

(i) $\mathcal{F}$ heißt *Hauptfilter*, falls ein $X_0 \subseteq M$ existiert, das $\mathcal{F}$ erzeugt, d.h.

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq M;\; X_0 \subseteq X\}.$$

(ii) $\mathcal{F}$ heißt *frei*, falls gilt: $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$.

(iii) $\mathcal{F}$ heißt *fixiert*, falls $\mathcal{F}$ nicht frei ist.

**Proposition 3.4** *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$.*

*(i) $\mathcal{F}$ ist frei $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist kein Hauptfilter.*

*(ii) $\mathcal{F}$ ist Ultrafilter und kein Hauptfilter $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist frei.*

**Beweis:** $(i)$ Klar, da $\varnothing \notin \mathcal{F}$.
$(ii)$ Angenommen $S := \bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Dann ist $S \notin \mathcal{F}$, weil $\mathcal{F}$ kein Hauptfilter ist. Wegen der Ultrafiltereigenschaft von $\mathcal{F}$ ist somit $M - S \in \mathcal{F}$. Damit wäre $S = \bigcap\limits_{X \in \mathcal{F}} X \subseteq M - S$, Widerspruch!

$\square$

Somit sind für Ultrafilter die Begriffe „Hauptfilter“ und „fixiert“ äquivalent. Es gibt jedoch Filter, die fixiert, aber keine Hauptfilter sind.

**Beispiel:** $\mathcal{F} = \{X \subseteq \omega;\ \omega - X \text{ ist endlich} \quad \& \quad 0 \in X\}$ ist fixiert, da $0 \in \bigcap \mathcal{F}$. Jedoch ist $\mathcal{F}$ kein Hauptfilter, denn für alle $X \in \mathcal{F}$ und für ein beliebiges $x_0 \in X - \{0\}$ gilt: $X - \{x_0\} \in \mathcal{F}$.

**Proposition 3.5** *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$. Dann sind äquivalent:*

*(i) $\mathcal{F}$ ist ein fixierter Ultrafilter.*

*(ii) Es existiert ein $x_0 \in M$ mit $\{x_0\} \in \mathcal{F}$.*

*(iii) $\mathcal{F} = \{X \subseteq M;\ x_0 \in X\}$ für ein $x_0 \in M$.*

**Beweis:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Wenn $\mathcal{F}$ ein fixierter Ultrafilter ist, so ist $\mathcal{F}$ wegen Proposition 3.4 $(ii)$ ein Hauptfilter, und es folgt, daß $\mathcal{F}$ aus allen Obermengen von $S = \bigcap \mathcal{F}$ besteht.
Angenommen, $|S| \geq 2$. Wähle $x_0 \in S$. Da weder $S \subseteq \{x_0\}$ noch $S \subseteq M - \{x_0\}$ gilt, ist $\{x_0\} \notin \mathcal{F}$ und $M - \{x_0\} \notin \mathcal{F}$, im Widerspruch zur Ultrafiltereigenschaft!

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Angenommen, es existiert ein $X \in \mathcal{F}$ mit $x_0 \notin X$. Weil $\{x_0\} \in \mathcal{F}$ ist, wäre dann auch $\varnothing = X \cap \{x_0\} \in \mathcal{F}$, im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{F}$ ein Filter ist! Umgekehrt folgt aus $\{x_0\} \in \mathcal{F}$, daß jedes $X \subseteq M$ mit $x_0 \in X$ ebenfalls im Filter liegt.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\mathcal{F}$ ist ein fixierter Filter. Da für $X \subseteq M$ entweder $x_0 \in X$ oder $x_0 \in M - X$ gilt, ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

$\square$

Ultrafilter sind gerade die maximalen Filter, d.h. diejenigen, zu denen man keine Mengen mehr hinzunehmen kann, ohne die Filtereigenschaft zu zerstören.

**Proposition 3.6** *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$.*
*$\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn $\mathcal{F}$ maximal ist, d.h. wenn für jeden Filter $\mathcal{G}$ auf $M$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt: $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Angenommen es existiert ein Filter $\mathcal{G}$ auf $M$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Wähle $X \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt

$M - X \in \mathcal{F}$ und somit auch $M - X \in \mathcal{G}$, woraus $\varnothing = X \cap (M - X) \in \mathcal{G}$ folgt, Widerspruch!

„ $\Leftarrow$ “ Sei $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter und $X_0 \subseteq M$ mit $X_0 \notin \mathcal{F}$ und $(M - X_0) \notin \mathcal{F}$. Betrachte die Menge

$$\mathcal{G} = \{X \subseteq M;\ \exists Y \in \mathcal{F}:\ Y \cap X_0 \subseteq X\}.$$

Dann ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, und wegen $X_0 \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{G},\ \mathcal{F} \neq \mathcal{G}$.
Beh.: $\mathcal{G}$ ist Filter auf $M$.
Beweis:

- Klar ist, daß $M \in \mathcal{G}$ gilt und $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist unter der Bildung von Obermengen.
- $\varnothing \notin \mathcal{G}$. Sonst würde ein $Y \in \mathcal{F}$ existieren mit $Y \cap X_0 = \varnothing$. Das heißt $Y \subseteq M - X_0$, im Widerspruch zu $M - X_0 \notin \mathcal{F}$!
- Seien $X, X' \in \mathcal{G}$. Dann existieren $Y, Y' \in \mathcal{F}$ mit $Y \cap X_0 \subseteq X$ und $Y' \cap X_0 \subseteq X'$. Somit folgt: $Y \cap Y' \cap X_0 \subseteq X \cap X' \in \mathcal{G}$.

□

Mit dem Auswahlaxiom folgt aus diesem Resultat, daß jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitert werden kann. Dieser Satz wurde 1930 von Alfred Tarski bewiesen.

**Satz 3.7** (Tarski, 1930) [ZSF + AC]
*Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

**Beweis:** Die Menge $\mathfrak{X} := \{\mathcal{G};\ \mathcal{G}$ ist Filter auf $M$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ ist durch Inklusion $\subseteq$ partiell geordnet. Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{X}$ eine Kette in $\mathfrak{X}$. Dann ist $\bigcup \mathcal{K}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$.
Beh.: $\bigcup \mathcal{K}$ ist ein Filter auf $M$.
Beweis: Offensichtlich gelten: $\varnothing \notin \mathcal{K},\ M \in \mathcal{K}$ und
$\big(X \in \bigcup \mathcal{K}\ \ \&\ \ X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow Y \in \bigcup \mathcal{K}\big)$.
Seien $X, Y \in \bigcup \mathcal{K}$. Dann existieren $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \mathcal{K}$ mit $X \in \mathcal{G}$ und $Y \in \mathcal{G}'$.
Da $\mathcal{K}$ eine Kette ist, gilt oBdA $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$. Dann ist $X \cap Y \in \mathcal{G}' \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.
Also ist $\bigcup \mathcal{K} \in \mathfrak{X}$ und somit $\langle \mathfrak{X}, \subseteq \rangle$ induktiv-geordnet. Nach dem Lemma von Kuratowski–Zorn existiert ein maximales Element $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}$.

Wegen Proposition 3.6 ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und es gilt: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

□

**Bemerkung 3.8** Aus diesem Satz kann man schließen, daß unter der Annahme von AC auf jeder unendlichen Menge freie Ultrafilter existieren.
So ist ein Ultrafilter $\mathcal{U}$, der den Fréchet–Filter $\mathcal{F} = \{X \subseteq M;\ M - X \text{ ist endlich}\}$ auf einer unendlichen Menge $M$ erweitert, notwendigerweise frei, denn für jedes $x \in M$ ist $M - \{x\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ und somit $\{x\} \notin \mathcal{U}$.

Für jeden Filter gilt, daß er abgeschlossen ist unter der Bildung von endlichen Schnitten. Für abzählbare Schnitte gilt dies im allgemeinen nicht.
Denn sei $\mathcal{F} = \{X \subseteq \omega;\ \omega - X \text{ ist endlich}\}$ der Fréchet–Filter auf $\omega$. Dann ist für jedes $n \in \omega$ die Menge $X_n := \omega - \{n\} \in \mathcal{F}$, jedoch $\bigcap X_n = \varnothing \notin \mathcal{F}$.

**Definition 3.9** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$.
Wenn $\kappa$ eine Kardinalzahl ist, so heißt $\mathcal{F}$ *$\kappa$-vollständig*, falls für $\gamma < \kappa$ und $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{F}$ auch $\bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} X_\alpha \in \mathcal{F}$ ist.

**Bemerkung:** Offensichtlich ist jeder Filter $\aleph_0$-vollständig, und ein Hauptfilter $\kappa$-vollständig für jede Kardinalzahl $\kappa$.
Anstatt $\aleph_1$-vollständig verwendet man auch die Bezeichnung $\sigma$-vollständig.

Wenn $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl $\kappa$ ist, so kann $\mathcal{U}$ nicht $\kappa^+$-vollständig sein. Denn weil keine der Mengen $\{\alpha\}$ für ein $\alpha \in \kappa$ in $\mathcal{U}$ sein kann, würde dann $\varnothing = \bigcap\limits_{\alpha \in \kappa} (\kappa - \{\alpha\}) \in \mathcal{U}$ gelten.
Es ist allerdings möglich, daß der Diagonalschnitt von $\kappa$ vielen Filterelementen wieder in $\mathcal{U}$ liegt. Solche Filter heißen normale Filter.

**Definition 3.10** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Kardinalzahl $\kappa$.
Dann heißt $\mathcal{F}$ *normal*, falls gilt:
Wenn $\{X_\alpha;\ \alpha \in \kappa\} \subseteq \mathcal{F}$ ist, so ist auch $\Delta_{\alpha \in \kappa} X_\alpha = \{\beta \in \kappa;\ \beta \in \bigcap\limits_{\alpha \in \beta} X_\alpha\} \in \mathcal{F}$.

Der folgende Hilfssatz folgt sofort aus der Definition der $\kappa$-Vollständigkeit:

**Hilfssatz 3.11** *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer Menge $M$ und $\kappa$ eine Kardinalzahl. Dann ist $\mathcal{U}$ genau dann $\kappa$-vollständig, wenn für jedes $\gamma < \kappa$ und für $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit $\bigcup\limits_{\alpha \in \gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$ ein $\nu \in \gamma$ existiert, so daß $X_\nu \in \mathcal{U}$ ist.*

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “ Sei $\mathcal{U}$ $\kappa$-vollständig, $\gamma < \kappa$ und $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit $\bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}$.
Angenommen $X_\nu \notin \mathcal{U}$ für alle $\nu \in \gamma$. Dann gilt, weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist: $M - X_\nu \in \mathcal{U}$ für alle $\nu \in \gamma$. Wegen der $\kappa$-Vollständigkeit ist dann $M - \bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\gamma} (M - X_\alpha) \in \mathcal{U}$ und somit auch $\varnothing = \big(\bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} X_\alpha\big) \cap \big(M - \bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} X_\alpha\big) \in \mathcal{U}$, Widerspruch!

„ $\Leftarrow$ “ Seien $\gamma < \kappa$ und $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{U}$. Damit ist für jedes $\alpha \in \gamma$ die Menge $M - X_\alpha \notin \mathcal{U}$. Also ist nach Voraussetzung $\bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} (M - X_\alpha) \notin \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt daraus, daß $\bigcap\limits_{\alpha\in\gamma} X_\alpha = M - \bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} (M - X_\alpha) \in \mathcal{U}$ ist.

$\square$

**Korollar 3.12** *Es existiert kein $\aleph_1$-vollständiger, freier Ultrafilter auf einer abzählbaren Menge.*

**Beweis:** Sei $\mathcal{U}$ ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter auf $M$ und $|M| \leq \aleph_0$. Dann folgt aus Hilfssatz 3.11, weil $M = \bigcup\limits_{x\in M} \{x\} \in \mathcal{U}$ ist, daß ein $x_0 \in M$ existiert mit $\{x_0\} \in \mathcal{U}$. Dann ist aber $\mathcal{U}$ nach Proposition 3.5 fixiert.

$\square$

Insbesondere besagt obiges Korollar, daß ein Ultrafilter, der den Fréchet–Filter auf $\omega$ erweitert nicht $\aleph_1$-vollständig sein kann.

Offensichtlich ist jeder freie Ultrafilter auf $\omega$ $\aleph_0$-vollständig aber nicht $\aleph_1$-vollständig.
Die Frage, ob es $\aleph_1$-vollständige, freie Ultrafilter auf überabzählbaren Mengen gibt, führt zum Begriff der meßbaren Kardinalzahl.

**Definition 3.13** Eine überabzählbare Kardinalzahl $\kappa$ heist *meßbar*, falls ein $\kappa$-vollständiger, freier Ultrafilter auf $\kappa$ existiert.

Man kann zeigen, daß eine meßbare Kardinalzahl auch unerreichbar ist. Damit kann die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl nicht in ZSF + AC bewiesen werden (vgl. Felgner [6, Satz 3.9]).

Mit Hilfe des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes folgt sogar, daß auch die Konsistenz von „ZSF + AC + Es existiert eine meßbare Kardinalzahl“ nicht bewiesen werden kann.
Die Annahme der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl gehört zu den Axiomen über große Kardinalzahlen.

## 3.2 Bildfilter

**Definition 3.14** Seien $M$ und $N$ Mengen.
Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$ und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.
Dann heißt $f_*(\mathcal{F}) := \{X \subseteq N;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{F}\}$ *Bildfilter von* $\mathcal{F}$ *(unter der Abbildung* $f$*)*.

**Proposition 3.15**

*(i)* $f_*(\mathcal{F})$ *ist ein Filter auf* $N$.

*(ii) Falls* $\mathcal{F}$ *ein Ultrafilter auf* $M$ *ist, so ist* $f_*(\mathcal{F})$ *ein Ultrafilter auf* $N$.

*(iii) Falls* $\kappa$ *eine Kardinalzahl und* $\mathcal{F}$ $\kappa$*-vollständig ist, so ist* $f_*(\mathcal{F})$ *ebenfalls* $\kappa$*-vollständig.*

**Beweis:**

(*i*)
- $N \in f_*(\mathcal{F})$, denn $f^{-1}[N] = M \in \mathcal{F}$.
- $\varnothing \notin f_*(\mathcal{F})$, denn $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing \notin \mathcal{F}$.
- Für $X \in f_*(\mathcal{F})$ und $X \subseteq Y \subseteq N$ gilt: $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$. Also ist $f^{-1}[Y] \in \mathcal{F}$ und somit $Y \in f_*(\mathcal{F})$.
- Für $X, Y \in f_*(\mathcal{F})$ gilt: $f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y] \in \mathcal{F}$. Also ist $X \cap Y \in f_*(\mathcal{F})$.

(*ii*) Sei $X \subseteq N$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $M$ ist, gilt $f^{-1}[X] \in \mathcal{F}$ oder es gilt $f^{-1}[N - X] = M - f^{-1}[X] \in \mathcal{F}$. Also ist $X \in f_*(\mathcal{F})$ oder $N - X \in f_*(\mathcal{F})$.

(*iii*) Sei $\lambda \in \kappa$ und $X_\alpha \in f_*(\mathcal{F})$ für alle $\alpha \in \lambda$.
Dann ist $f^{-1}[X_\alpha] \in \mathcal{F}$ für jedes $\alpha \in \lambda$. Wegen der $\kappa$-Vollständigkeit von $\mathcal{F}$ ist auch $f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha\in\lambda} X_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in\lambda} f^{-1}[X_\alpha] \in \mathcal{F}$ und somit $\bigcap_{\alpha\in\lambda} \in f_*(\mathcal{F})$.

$\square$

Auch wenn $\mathcal{F}$ frei ist, muß dies für $f_*(\mathcal{F})$ nicht gelten:

**Bemerkung 3.16** Seien $M$ und $N$ Mengen, $f : M \to N$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $M$. Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist auf einem Element von $\mathcal{F}$ konstant.

(ii) $\exists\, x \in N : \quad \{x\} \in f_*(\mathcal{F})$.

**Beweis:** „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Angenommen es existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $f[F] = \{x\}$. Dann folgt aus der Definition von $f_*(\mathcal{F})$ und $F \subseteq f^{-1}[f[F]] = f^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{F}$ sofort $\{x\} \in f_*(\mathcal{F})$.
„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Angenommen $\{x\} \in f_*(\mathcal{F})$. Dann folgt $\varnothing \neq f^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{F}$ und $f[f^{-1}[\{x\}]] = \{x\}$.

□

**Bemerkung 3.17** $f_*(\mathcal{F})$ wird von der Filterbasis $\{f[Y];\ Y \in \mathcal{F}\}$ erzeugt.

**Beweis:** Sei $\mathcal{E}$ der von $\{f[Y];\ Y \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter.
Z.z.: $f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$.

„$\subseteq$" Sei $X \in f_*(\mathcal{F})$. Dann ist $f^{-1}[X] \in \mathcal{F}$ und somit $f\big[f^{-1}[X]\big] \in \mathcal{E}$. Es folgt $X \in \mathcal{E}$ wegen $f\big[f^{-1}[X]\big] \subseteq X$.

„$\supseteq$" Sei $X \in \mathcal{E}$. Dann existiert ein $Y \in \mathcal{F}$ mit $f[Y] \subseteq X$. Da $Y \subseteq f^{-1}\big[f[Y]\big]$ ist, gilt $f^{-1}\big[f[Y]\big] \in \mathcal{F}$, also $f[Y] \in f_*(\mathcal{F})$ und somit $X \in f_*(\mathcal{F})$.

□

## 3.3 Club–Mengen und club–Filter

Für diesen Abschnitt siehe auch Felgner [7].

**Definition 3.18** Sei $\lambda$ eine Limesordinalzahl. Sei $C \subseteq \lambda$.

(i) $C$ ist *abgeschlossen in* $\lambda$, falls $\forall\, \alpha \in \lambda\ \big(\alpha \cap C \neq \varnothing \ \Rightarrow\ \bigcup(\alpha \cap C) \in C\big)$.

(ii) $C$ ist *konfinal in* $\lambda$, falls $\forall\, \gamma \in \lambda\ \ \exists\, \alpha \in C : \ \gamma \leq \alpha$.

(iii) $C$ heißt *club–Menge*[1] *in* $\lambda$, falls $C$ abgeschlossen und konfinal in $\lambda$ ist.

- Bedingung $(i)$ bedeutet, daß für jede Folge $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \gamma \rangle$ von Elementen aus $C$ mit $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ und $\gamma < \lambda$ der Limes $\bigcup\limits_{\nu \in \gamma} \alpha_\nu \in C$ ist.

- Club–Mengen sind sehr große Teilmengen von $\lambda$. Die Kardinalität einer club–Menge in $\lambda$ ist offensichtlich mindestens die Konfinalität von $\lambda$.

**Proposition 3.19** *Sei* $\lambda$ *Limesordinalzahl mit* $\omega < cf(\lambda) =: \gamma$.
*Dann ist der Schnitt von weniger als* $\gamma$ *club–Mengen in* $\lambda$ *wieder eine club–Menge in* $\lambda$.

**Beweis:** Siehe Felgner [7, Prop.3.1].

**Bemerkung 3.20** Sei $\kappa$ eine überabzählbare Kardinalzahl.

- Die club–Teilmengen von $\kappa$ bilden eine Filterbasis, denn:
  Die Menge der club–Mengen ist nicht leer, z.B. ist $\{\alpha \in \kappa;\ \alpha \text{ ist Limeszahl}\}$ club in $\kappa$. $\varnothing$ ist keine club–Menge, und der Schnitt zweier club–Mengen ist wieder club.
  Der von den club–Mengen erzeugte Filter
  $\mathcal{C}_\kappa = \{X \subseteq \kappa;\ \exists C \subseteq \kappa\ \big(C \text{ ist club–Menge} \ \ \& \ \ C \subseteq X\big)\}$ heißt *club–Filter auf* $\kappa$.

- Der club–Filter $\mathcal{C}_\kappa$ auf $\kappa$ ist frei. Denn für jedes $\alpha \in \kappa$ ist das Endsegment $C_\alpha := \{\gamma \in \kappa;\ \alpha \leq \gamma \in \kappa\}$ offensichtlich club in $\kappa$, das heißt ein Element von $\mathcal{C}_\kappa$.
  Also ist $\bigcap\limits_{X \in \mathcal{C}_\kappa} X \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \kappa} C_\alpha = \varnothing$.

- Der club–Filter $\mathcal{C}_\kappa$ ist $cf(\kappa)$-vollständig.
  Denn: Sei $\gamma < cf(\kappa)$ und $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{C}_\kappa$. Dann existiert für alle $\alpha \in \gamma$ eine club–Menge $C_\alpha \subseteq X_\alpha$. Somit ist $\bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} C_\alpha$ nach Proposition 3.19 eine club–Menge und aus $\bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} C_\alpha \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} X_\alpha$ folgt, daß auch $\bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} X_\alpha \in \mathcal{C}_\kappa$ ist.

[1]Der Begriff „club“ ist eine Abkürzung für „closed and unbounded“. Er wird inzwischen auch häufig in deutschen Texten verwendet.

- Unter der Annahme, daß $\aleph_1$ regulär ist, gilt für eine reguläre Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_2$ : $\mathcal{C}_\kappa$ ist kein Ultrafilter.
  Beweis: (Vgl. Jech [13, S.59]) Die Mengen $A := \{\alpha \in \kappa;\ cf(\alpha) = \aleph_0\}$ und $B := \{\alpha \in \kappa;\ cf(\alpha) = \aleph_1\}$ sind stationär in $\kappa$, d.h. für jede club–Menge $C \subseteq \kappa$ ist $A \cap C \neq \varnothing \neq B \cap C$.
  Denn sei $C \subseteq \kappa$ eine club–Menge. Dann existiert eine echt aufsteigende Folge $\langle \alpha_n;\ n \in \omega \rangle$ in $C$ und da $C$ abgeschlossen ist, folgt: $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n \in C$.
  Doch $cf(\alpha) = \aleph_0$, und somit ist $\alpha \in A$, d.h. $A \cap C \neq \varnothing$.
  Analog existiert eine Folge $\langle \beta_\nu;\ \nu \in \omega_1 \rangle$ in $C$ mit $\beta := \bigcup_{\nu \in \omega_1} \beta_\nu \in C$. Weil $\aleph_1$ regulär ist, gilt $cf(\beta) = \aleph_1$, d.h. $B \cap C \neq \varnothing$.
  Wäre nun $\mathcal{C}_\kappa$ ein Ultrafilter, so würde entweder $A \in C_\kappa$ oder $\kappa - A \in C_\kappa$ gelten. Falls $A \in C_\kappa$ wäre, existiert eine club–Menge $D \subseteq \kappa$ mit $D \subseteq A$. Wegen $B \subseteq \kappa - A$ wäre somit $B \cap D = \varnothing$, im Widerspruch zur Stationarität von $B$! Analog führt die Annahme $\kappa - A \in \mathcal{C}_\kappa$ zum Widerspruch.

□

Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man nach einen Satz von Bloch, Fodor und Solovay (vgl. Felgner [7] Satz 3.7) jede reguläre überabzählbare Kardinalzahl $\kappa$ in $\kappa$ paarweise disjunkte stationäre Teilmengen zerlegen.
Somit existieren in diesem Fall auch zwei disjunkte stationäre Teilmengen von $\omega_1$, und $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ ist mit obiger Argumentation kein Ultrafilter.
Das Auswahlaxiom ist für dieses Resultat notwendig, denn Robert Solovay bewies 1967, daß $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ unter der Annahme von AD ein Ultrafilter ist (vgl. Satz 5.1).

## 3.4 Filter unter AD

Der folgende Satz zeigt, daß AD interessante Auswirkungen auf Ultrafilter hat, die sich grundlegend von dem unterscheiden, was in ZSF + AC gilt.

**Satz 3.21** [ZSF + AD]
*(a) Jeder Ultrafilter auf $\omega$ ist fixiert.*
*(b) Jeder Ultrafilter $U$ auf einer beliebigen Menge $S$ ist $\aleph_1$-vollständig.*

**Beweis:** (Vgl. Kanamori [14, Proposition 28.1])

(a) Angenommen es gäbe einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\omega$.

Wir betrachten das folgende Spiel $G^*(\mathcal{U})$:
Beide Spieler wählen Elemente $s_i \in P_{<\omega}(\omega)$ $(i \in \omega)$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $s_0$ | | $s_2$ | | $s_4$ | $\ldots$ | |
| **II** | | $s_1$ | | $s_3$ | | $s_5$ | $\ldots$ |

Dabei ist folgende Regel einzuhalten:

$$s_n \cap \bigcup_{i<n} s_i = \varnothing \qquad \forall\, n \in \omega.$$

Beide Spieler spielen also abwechselnd endliche Mengen natürlicher Zahlen, wobei jede gespielte Menge disjunkt zu den vorherigen sein muß.
Wer diese Regel als erster verletzt, hat verloren. Wird sie eingehalten, so gewinnt I, falls $\bigcup_{i\in\omega} s_{2i} \in \mathcal{U}$ , ansonsten gewinnt II.
Spieler I muß folglich versuchen, endliche Teilmengen von $\omega$ zu spielen, deren Vereinigung im Ultrafilter $\mathcal{U}$ liegt. II kann dabei mit seinen Zügen die Wahlmöglichkeiten von I einschränken.
Das hier beschrieben Spiel $G^*(\mathcal{U})$ kann mit Hilfe der in 1.2 gewählten Abzählung für $\omega^{<\omega}$ auf die Form eines Spiels $G(A)$ für eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$ gebracht werden.

Wir zeigen nun, daß keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie im Spiel $G^*(\mathcal{U})$ besitzt, indem wir aus einer Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie für seinen Mitspieler konstruieren.
Damit ist dann ein Widerspruch zu AD erreicht und die Behauptung bewiesen.

**Fall 1:** Angenommen Spieler I hätte eine Gewinnstrategie $\sigma$:
Wir definieren eine Strategie $\tau_\sigma$ für Spieler II wie folgt:

$$\tau_\sigma(\langle s_0\rangle) = \sigma(\varnothing) - s_0 \text{ und}$$

$$\tau_\sigma(\langle s_0, \ldots, s_{2i}\rangle) = \sigma(\langle s_1, \ldots, s_{2i}\rangle) - s_0 \text{ für alle } 1 \le i \in \omega.$$

Das bedeutet: In der Partie $\langle s_0, s_1, s_2, \ldots\rangle$ , in der II gemäß $\tau_\sigma$ spielt, „ignoriert“ II den Zug $s_0$ und spielt dann wie I, wenn dieser gemäß $\sigma$ spielt, mit der Einschränkung, daß bei jedem Zug von II der erste Zug $s_0$ von Spieler I abgezogen wird, um die erforderliche Disjunktheit zu gewährleisten.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **I** | $s_0$ | $s_2$ | $s_4$ | $\dots$ |
| **II** | $s_1 = \sigma(\varnothing) - s_0$ | $s_3 = \sigma(\langle s_1, s_2 \rangle) - s_0$ | | $\dots$ |

Sei also $\langle s_0, s_1, s_2, \dots \rangle$ eine Partie, in der Spieler II gemäß $\tau_\sigma$ spielt. Dann sind alle Züge von II Teilmengen von $s_0 \cup \bigcup\limits_{i \in \omega} s_{2i+1}$.

$s_0 \cup \bigcup\limits_{i \in \omega} s_{2i+1}$ ist aber eine Obermenge der Züge von I in einer Partie, in der dieser gemäß seiner Gewinnstrategie $\sigma$ spielt. Es folgt:

$$s_0 \cup \bigcup_{i \in \omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}.$$

Da $s_0$ eine endliche Teilmenge von $\omega$ und $\mathcal{U}$ frei ist, gilt ferner $\omega - s_0 \in \mathcal{U}$. Denn für alle $n \in s_0$ gilt, weil $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist, mit 3.5: $\omega - \{n\} \in \mathcal{U}$. Aus der Endlichkeit von $s_0$ folgt dann: $\omega - s_0 = \bigcap\limits_{n \in s_0} (\omega - \{n\}) \in \mathcal{U}$.

Es folgt:

$$(\star) \qquad \bigcup_{i \in \omega} s_{2i+1} = (\omega - s_0) \cap \left( s_0 \cup \bigcup_{i \in \omega} s_{2i+1} \right) \in \mathcal{U}.$$

Wenn Spieler I die Regel eingehalten hat, ist $\left( \bigcup\limits_{i \in \omega} s_{2i} \right) \cap \left( \bigcup\limits_{i \in \omega} s_{2i+1} \right) = \varnothing$. Somit gilt:

$$\bigcup_{i \in \omega} s_{2i} \ \subseteq \ \omega - \bigcup_{i \in \omega} s_{2i+1}.$$

Also kann die Vereinigung der Mengen, die Spieler I spielte, nicht im Filter liegen

$$\bigcup_{i \in \omega} s_{2i} \notin \mathcal{U}.$$

Angenommen doch, dann wäre auch $\omega - \bigcup\limits_{i \in \omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}$ und damit wegen $(\star)$ auch $\varnothing \in \mathcal{U}$, Widerspruch!

Also ist $\tau_\sigma$ eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel $G^*(\mathcal{U})$, was im Widerspruch zur Annahme steht, daß I eine Gewinnstrategie im Spiel G hat!

**Fall 2:** Nun nehmen wir an, II hätte in diesem Spiel eine Gewinnstrategie $\tau$.
Wir ändern zunächst $\tau$ in eine Strategie $\bar{\tau}$ für II so ab, daß in einer Partie, in der II gemäß $\bar{\tau}$ spielt, jedes Element von $\omega$ gespielt wird.
Es sei $s'_1 = \tau(s_0), \quad s'_{2i+1} = \tau(\langle s_0, s'_1, s_2, \dots, s'_{2i-1}, s_{2i} \rangle)$.

$\bar{\tau}(\langle s_0, s_1, \dots, s_{2i}\rangle) =$

$$= \begin{cases} \big(\tau(\langle s_0, s_1', s_2, s_3', \dots, s_{2i-1}', s_{2i}\rangle) & \\ \quad -\{0, \dots, i-1\}\big) \cup \{i\} & \text{, falls } i \notin \left(\bigcup\limits_{0 \le j \le i} s_{2j}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{0 \le j < i} s_{2j+1}'\right) \\ & \\ \tau(\langle s_0, s_1', s_2, s_3', \dots, s_{2i-1}', s_{2i}\rangle) & \\ \quad -\{0, \dots, i-1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\bar{\tau}$ reagiert auf die Züge von I wie $\tau$, wobei zusätzlich sichergestellt wird, daß jedes Element aus $\omega$ gespielt wird, indem Spieler II jeweils im $i$-ten Zug $i$ zur Teilmenge, die er spielen wird, hinzunimmt, soweit es in den vorherigen Zügen beider Spieler nicht bereits vorhanden ist.
Von der Menge, die gemäß $\tau$ zu spielen wäre, muß $\{0, 1, \dots, i-1\}$ abgezogen werden, um die Disjunktheit der Züge zu gewährleisten.
($\tau$ reagiert ja nur auf die $s_{2i}$ bzw. $s_{2i+1}'$, d.h. $\tau$ könnte in einem späteren Zug angeben, eine Teilmenge von $\omega$ zu spielen, die ein $i$ enthält, welches nach $\bar{\tau}$ bereits früher gespielt wurde.)

$\bar{\tau}$ ist eine Gewinnstrategie für II, denn $\bar{\tau}$ hält die Regel ein und angenommen, es gäbe eine Partie $\langle s_0, s_1, \dots\rangle$ in der II nach $\bar{\tau}$ spielt und verliert, d.h. $\bigcup\limits_{i\in\omega} s_{2i} \in \mathcal{U}$, dann könnte I diese $s_0, s_2, \dots, s_{2i} \dots$ auch in einem Spiel spielen, in dem II gemäß $\tau$ spielt, und gewinnen. Denn wenn II nach $\tau$ spielt, so bestehen seine Züge aus Teilmengen der Mengen, die er nach $\bar{\tau}$ spielen würde, d.h. Spieler II schränkt, wenn er sich an $\tau$ anstatt an $\bar{\tau}$ hält, die Spielmöglichkeiten für I nicht zusätzlich ein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß $\tau$ eine Gewinnstrategie für II ist!

Da $\bar{\tau}$ eine Gewinnstrategie ist, gilt für jede Partie $\langle s_0, s_1, \dots\rangle$, in der II gemäß $\bar{\tau}$ spielt: $\bigcup\limits_{i\in\omega} s_{2i} \notin \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter und $\bigcup\limits_{i\in\omega} s_i = \omega$ ist, folgt:

$$\bigcup_{i\in\omega} s_{2i+1} \in \mathcal{U}.$$

Wir definieren ausgehend von $\bar{\tau}$ eine Strategie $\sigma_\tau$ für Spieler I wie folgt:

$$\sigma_\tau(\varnothing) = \bar{\tau}(\langle\varnothing\rangle) \text{ und}$$

$$\sigma_\tau(\langle s_0, \dots, s_{2i-1}\rangle) = \bar{\tau}(\langle\varnothing, s_0, \dots, s_{2i-1}\rangle) \text{ für alle } 1 \le i \in \omega.$$

Auf diese Weise entspricht ein Spiel, in dem I gemäß $\sigma_\tau$ spielt, einem Spiel, in dem II mit $\varnothing$ beginnt und I nach $\bar{\tau}$ spielt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $s_0 = \bar{\tau}(\langle\varnothing\rangle)$ | | $s_2 = \bar{\tau}(\langle\varnothing, s_0, s_1\rangle)$ | | $s_4 = \bar{\tau}(\langle\varnothing, s_0, s_1, s_2, s_3\rangle)$ ... |
| **II** | | $s_1$ | | $s_3$ | ... |

Sei nun $\langle s_0, s_1, \dots\rangle$ eine Partie, in der I gemäß $\sigma_\tau$ spielt. Dann ist $\langle\varnothing, s_0, s_1, \dots\rangle$ eine Partie, in der II gemäß seiner Gewinnstrategie $\bar{\tau}$ spielt. Also ist

$$\bigcup_{i\in\omega} s_{2i} \in \mathcal{U}.$$

Somit ist $\sigma_\tau$ eine Gewinnstrategie für I in $G^*(\mathcal{U})$, was im Widerspruch zur Annahme steht, daß II eine Gewinnstrategie hat!

(b) Angenommen es gäbe einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf einer Menge $S$, der nicht $\aleph_1$-vollständig ist.

Durch die Wahl einer geeigneten Funktion $f : S \to \omega$ erhalten wir einen Bildfilter von $\mathcal{U}$, der ein freier Ultrafilter auf $\omega$ ist.

Da $\mathcal{U}$ nicht $\aleph_1$-vollständig ist, existiert $(Y_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{U}$ mit $\bigcap_{n\in\omega} Y_n \notin \mathcal{U}$. $(\star\star)$
Folglich gilt für alle $n \in \omega$ : $S - Y_n \notin \mathcal{U}$, aber da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt aus $(\star\star)$:

$$\bigcup_{n\in\omega} (S - Y_n) \;=\; S - \bigcap_{n\in\omega} Y_n \;\in\; \mathcal{U}.$$

Wir definieren die Funktion $f$ wie folgt:

$$f : S \to \omega, \quad s \mapsto \begin{cases} n+1 & , \text{ falls } s \in (S - Y_n) - \left(\bigcup_{i<n} (S - Y_i)\right) \\ 0 & , \text{ falls } s \notin \left(\bigcup_{n\in\omega} (S - Y_n).\right) \end{cases}$$

Es sei $f_*(\mathcal{U}) := \{X \subseteq \omega;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$.
Nach 3.15 ist $f_*(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter auf $\omega$.

<u>Beh.:</u> $f_*(\mathcal{U})$ ist frei.
Beweis: Nach Proposition 3.5 und Bemerkung 3.16 genügt es zu zeigen, daß $f$ auf keinem Element von $\mathcal{U}$ konstant ist.

Angenommen es existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $f[U] = \{n\}$. Dann ist $n \neq 0$, denn sonst wäre

$$U \subseteq f^{-1}(\{0\}) \;=\; S - \bigcup_{n\in\omega}(S - Y_n) \;=\; \bigcap_{n\in\omega} Y_n \notin \mathcal{U},$$

Widerspruch! Dann gilt aber nach Definition von $f$:

$$U \subseteq S - Y_{n-1} \notin \mathcal{U},\ \text{Widerspruch!}$$

$\square$

**Bemerkung:** Die beiden Aussagen des Satzes sind falsch, wenn man ZSF mit Auswahlaxiom zugrundelegt.
Wir betrachten dazu den Fréchet–Filter $\mathcal{F} = \{X \subseteq \omega;\ \omega - X \text{ ist endlich}\}$ auf $\omega$.
In ZSF + AC ist Tarskis Satz 3.7 beweisbar. Wie in Bemerkung 3.8 gezeigt, ist der Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ erweitert, frei.
Dieser kann nach Korollar 3.12 auch nicht $\aleph_1$-vollständig sein.

# Kapitel 4

# Effektive Deskriptive Mengenlehre

Die natürliche Klassifikation von Formeln ist die nach ihrer Komplexität. Der Vorteil solcher Betrachtungen für die Mengenlehre besteht insbesondere darin, daß Formeln bis zu einer bestimmten Komplexität absolut für Modelle von ZSF sind.
1965 hat Azriel Lévy eine Hierarchie von Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ der Mengenlehre eingeführt. Er klassifizierte die Formeln nach der Anzahl ihrer unbeschränkten Quantoren in die Stufen $\Sigma_n^{\mathrm{ZSF}}$, $\Pi_n^{\mathrm{ZSF}}$, $\Delta_n^{\mathrm{ZSF}}$ $(n \in \omega)$. Die Hierarchie trägt den Namen *Lévy–Hierarchie* (vgl. Felgner [6, § 9]).
Die arithmetische und die analytische Hierarchie, welche ich in den ersten beiden Abschnitten einführe, klassifizieren ebenfalls Formeln nach ihrer Quantorenkomplexität, jedoch nur solche, deren Variable für Elemente oder Teilmengen von $\omega$ stehen.
Die Hierarchien haben ihre Grundlage in den Arbeiten von Stephen Kleene. Zwar beschäftigten sich diese nicht direkt mit Mengenlehre, doch John Addison, Alfred Tarski und andere entdeckten Zusammenhänge mit der klassischen Deskriptiven Mengenlehre. In Gegenüberstellung zu dieser wird die auf den Ideen von Kleene basierende Theorie auch als *effektive Deskriptive Mengenlehre* bezeichnet.[1]
Für die klassische Theorie wird eine Menge umso komplizierter, je mehr Operationen wie Vereinigung, Schnittbildung, Komplementbildung oder Projektion

[1]Der Begriff kommt daher, daß $\Sigma_1^0$-Mengen „rekursiv aufzählbar“ sind, d.h. es ist möglich, einen Algorithmus anzugeben, der (in unendlicher Zeit) alle Elemente von $\Sigma_1^0$ berechnet.

man ausgehend von offenen Mengen anwenden muß, um sie zu konstruieren. In der effektiven Deskriptiven Mengenlehre ist eine Menge umso komplizierter, je mehr unbeschränkte Quantoren man zu ihrer Definition benötigt.
Es zeigt sich jedoch, daß beide Konzepte in einem sehr engen Zusammenhang stehen. Dieser erlaubt es, von vielen Sätzen der klassischen Deskriptiven Mengenlehre eine „effektive Version“ zu beweisen. Die Möglichkeit, dieselben Dinge aus zwei Blickwinkeln zu betrachten, liefert dabei oftmals ein genaueres Bild.
Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werde ich vorher Gezeigtes verwenden, um die Menge derjenigen Elemente von $\omega^\omega$ zu untersuchen, die Wohlordnungen kodieren.
Doch zunächst führe ich die arithmetische und die analytische Hierarchie ein und danach die beiden Hierarchien relativiert zu einem Element von $\omega^\omega$. Anschließend wird der bereits erwähnte Zusammenhang mit den Hierarchien der klassischen Deskriptiven Mengenlehre aus Kapitel 1 erläutert.
Die folgenden Ausführungen basieren im wesentlichen auf Kanamori [14, § 12] und Moschovakis [24, 3D u. 3E].

Für die Definition der arithmetischen und der analytischen Hierarchie nehmen wir als zugrundeliegende Struktur

$$\mathcal{A}^2 = \langle \omega, \omega^\omega, \pi, +, \cdot, \exp, <, 0, 1 \rangle.$$

Dabei sind $\omega$ und $\omega^\omega$ die zwei verschiedenen Domänen der Struktur. $\omega^\omega$ wird dabei als die Potenzmenge von $\omega$ betrachtet.
$\pi : \omega^\omega \times \omega \longrightarrow \omega,\ \langle x, m \rangle \mapsto x(m)$ ist die binäre Operation zwischen natürlichen Zahlen und Elementen von $\omega^\omega$, die einem Paar $\langle x, m \rangle$ die $m$-te Komponente von $x$ zuordnet.
$+, \cdot, \exp, <, 0, 1$ soll die übliche arithmetische Struktur auf $\omega$ darstellen.
Da $\mathcal{A}^2$ zwei unterschiedliche Domänen hat, unterscheiden wir zwischen je zwei Arten von Variablen und Quantoren. In der gesamten Arbeit wird in dieser Hinsicht die folgende Notation verwendet:
$v_0^0, v_1^0, v_2^0, \ldots$ sollen Variable für Elemente von $\omega$ bezeichnen und $v_0^1, v_1^1, v_2^1, \ldots$ solche für Elemente von $\omega^\omega$. Entsprechend unterscheiden wir zwischen *Zahlquantoren* $\forall^0$, $\exists^0$, die über $\omega$ quantifizieren, und *Funktionsquantoren* über Elemente von $\omega^\omega$ : $\forall^1$, $\exists^1$.

Ein Term ist ein Ausdruck, der durch Abschluß von $0, 1, v_0^0, v_1^0, v_2^0, \ldots$ unter $+, \cdot, \exp, \pi(v_1^1, \cdot)$ entsteht. Falls $t$ ein Term und $\varphi$ eine Formel ist, so schreiben wir kurz $(\exists^0\ v_1^0 < t)\ \varphi$ statt $\exists^0 v_1^0\ (v_1^0 < t\ \wedge\ \varphi)$, analog für $\forall^0$. Solche Quantoren heißen *beschränkte Quantoren.*
Elemente von $\omega$ werden in diesem Kapitel meistens mit $m$ und Elemente von $\omega^\omega$ mit $x$ bezeichnet.
Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die arithmetische und die analytische Hierarchie definieren.

Sei im folgenden immer $A \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^k$ mit $r, k \in \omega$.
Wir fassen $A$ sowohl als Menge als auch als Relation auf und schreiben wahlweise $A(m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k)$ oder $\langle m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k\rangle \in A$.

**Definition 4.1** $A$ heißt *durch eine Formel* $\varphi(v_1^0, \ldots, v_r^0, v_1^1, \ldots, v_k^1)$ *in* $\mathcal{A}^2$ *definierbar*, falls

$$\langle m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k\rangle \in A \iff \mathcal{A}^2 \models \varphi[m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_k]$$

für $m_1, \ldots, m_r \in \omega$ und $x_1, \ldots, x_k \in \omega^\omega$ gilt.

**Definition 4.2** $A \in \Delta_0^0 \iff$ *A ist in* $\mathcal{A}^2$ *definierbar durch eine Formel, die nur beschränkte Quantoren enthält.*

**Bemerkung 4.3** Die Abbildungen $\Phi$ und $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ sowie die darauf beruhenden Kodierungen aus Abschnitt 1.2 sind $\Delta_0^0$.

## 4.1 Die arithmetische Hierarchie

**Definition 4.4** Sei $0 < n \in \omega$.

$$\begin{aligned}
A \in \Sigma_0^0 \ &\Leftrightarrow\ A \in \Pi_0^0 \ \Leftrightarrow\ A \in \Delta_0^0.\\
A \in \Sigma_1^0 \ &\Leftrightarrow\ \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \left(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^0 m_1\ R(m_1, \mathbf{w})\right)\\
&\qquad \text{wobei } R \subseteq \omega^{r+1} \times (\omega^\omega)^k \text{ eine } \Delta_0^0\text{-Relation ist.}\\
A \in \Pi_1^0 \ &\Leftrightarrow\ \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \left(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \forall^0 m_1\ R(m_1, \mathbf{w})\right)\\
&\qquad \text{wobei } R \subseteq \omega^{r+1} \times (\omega^\omega)^k \text{ eine } \Delta_0^0\text{-Relation ist.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A \in \Sigma_n^0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \left(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^0 m_1 \, \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w})\right) \\
&\qquad \text{wobei } Q = \exists^0 \text{ für } n \text{ ungerade, } Q = \forall^0 \text{ für } n \text{ gerade und} \\
&\qquad R \subseteq \omega^{r+n} \times (\omega^\omega)^k \text{ eine } \Delta_0^0\text{-Relation ist.} \\
A \in \Pi_n^0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \left(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \forall^0 m_1 \, \exists^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w})\right) \\
&\qquad \text{wobei } Q = \exists^0 \text{ für } n \text{ gerade, } Q = \forall^0 \text{ für } n \text{ ungerade und} \\
&\qquad R \subseteq \omega^{r+n} \times (\omega^\omega)^k \text{ eine } \Delta_0^0\text{-Relation ist.} \\
A \in \Delta_n^0 \quad &\Leftrightarrow \quad A \in \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0.
\end{aligned}
$$

**Bemerkung:** Um die Hierarchie der effektiven Deskriptiven Mengenlehre von denen der klassischen Deskriptiven Mengenlehre typographisch zu unterscheiden, werden erstere in Normal- und letztere in Fettdruck geschrieben.

**Definition 4.5** $A$ heißt *arithmetisch*, falls $A$ in $\mathcal{A}^2$ durch eine Formel definierbar ist, die keine Funktionsquantoren enthält.

**Bemerkung 4.6**

(i) $\Sigma_n^0$ und $\Pi_n^0$ sind dual, d.h. für $0 < n \in \omega$ gilt:

$$A \in \Sigma_n^0 \iff \omega^r \times (\omega^\omega)^k - A \in \Pi_n^0.$$

(ii) $\Sigma_n^0 \cup \Pi_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0 \quad \forall \, 0 < n \in \omega.$

(iii) Sei $A \in \Sigma_{n+1}^0$ für $0 < n \in \omega$.
Dann existiert $A' \subseteq \omega^{r+1} \times (\omega^\omega)^k \in \Pi_n^0$, so daß gilt:

$$\mathbf{w} \in A \iff \exists^0 \, m_1 \, \langle m_1, \mathbf{w} \rangle \in A'.$$

Ein entsprechendes Resultat gilt für $A \in \Pi_{n+1}^0$.

**Beweis:** (i) Es gelte für $\mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k$:
$\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^0 m_1 \, \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w})$, wobei $Q$ wie in 4.4 definiert ist.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k - A \quad &\iff \quad \mathbf{w} \notin A \\
&\iff \quad \neg\left(\exists^0 \, m_1 \, \forall^0 \, m_2 \ldots Q m_n \; R(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{w})\right).
\end{aligned}
$$

(ii) Klar nach Definition. Man fügt einfach einen zusätzlichen, „überflüssigen“ Quantor hinzu.
(iii) Es gilt für $\mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \in A \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists^0\, m_1\ \forall^0\, m_2 \ldots Q m_{n+1}\ R(m_1, \ldots, m_{n+1}, \mathbf{w}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists^0\, m_1\ \langle m_1, \mathbf{w}\rangle \in A', \text{ wobei} \\
\langle \ell, \mathbf{w}\rangle \in A' \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall^0\, m_2\ \exists^0\, m_3 \ldots Q m_{n+1}\ R(\ell, m_2, \ldots, m_{n+1}, \mathbf{w}), \\
&\qquad \text{dabei sind } Q \text{ und } R \text{ wie in 4.4 definiert.}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $A' \in \Pi^0_n$.
Analog für $A \in \Pi^0_{n+1}$.

□

Wir erhalten also für die arithmetische Hierarchie ein ähnliches Bild wie für die klassischen Hierarchien:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & & & \Sigma^0_3 \\
 & \subseteq & & \supseteq & & \subseteq & & \supseteq & & \subseteq & \\
\Delta^0_1 & & & & \Delta^0_2 & & & & \Delta^0_3 & & & \ldots \\
 & \supseteq & & \subseteq & & \supseteq & & \subseteq & & \supseteq & \\
 & & \Pi^0_1 & & & & \Pi^0_2 & & & & \Pi^0_3
\end{array}$$

Die folgende Proposition zeigt, daß in einer arithmetischen Formel beschränkte Quantoren „nach rechts geschoben“ und gleichartige Quantoren zu einem zusammengefaßt werden können.

**Proposition 4.7**
*Sei* $R \subseteq \omega^{r+3} \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *eine arithmetische Relation und* $\mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *mit* $r, k \in \omega$.
*Es gelten:*

*(i)* $\forall^0\, a < b\ \exists^0\, m\ R(a, b, m, \mathbf{w}) \iff \exists^0\, n\ \forall^0\, a < b\ R(a, b, (n)_a, \mathbf{w})$

*(ii)* $\exists^0\, a < b\ \forall^0\, m\ R(a, b, m, \mathbf{w}) \iff \forall^0\, n\ \exists^0\, a < b\ R(a, b, (n)_a, \mathbf{w})$

*(iii)* $\exists^0\, m\ \exists^0\, n\ R(m, n, \mathbf{w}) \iff \exists^0\, a\ R((a)_0, (a)_1, \mathbf{w})$

*(iv)* $\forall^0\, m\ \forall^0\, n\ R(m, n, \mathbf{w}) \iff \forall^0\, a\ R((a)_0, (a)_1, \mathbf{w})$

**Beweis:** $(i)$ „ $\Rightarrow$ “ Es gelte $\forall^0\, a < b\ \exists^0\, m_a\ R(a, b, m_a, \mathbf{w})$. Wir können nun diese endlich vielen $m_a$ ($a < b \in \omega$) durch ein $n \in \omega$ kodieren, indem wir sie als endliche Folge auffassen und die $\Delta^0_0$-Abzählung $\Phi$ aus 1.2 benutzen:
Sei $n = 2^{m_0+1} \cdot 3^{m_1+1} \cdot \ldots \cdot p_{b-1}^{m_{b-1}+1}$.
Dann gilt für alle $a < b :\ (n)_a = m_a$, also $\exists^0\, n\ \forall^0\, a < b\ R(a, b, (n)_a, \mathbf{w})$,
dabei ist $(n)_a$ wie in Bemerkung 1.6 definiert.
„ $\Leftarrow$ “ klar.
$(ii)$ folgt aus $(i)$ durch Negation.
$(iii)$ Analog zu $(i)$ werden $m$ und $n$ z.B. durch $a = 2^{m+1} \cdot 3^{n+1}$ kodiert.
Es gilt $(a)_0 = m$ und $(a)_1 = n$. Damit folgt sofort die Behauptung.
$(iv)$ folgt aus $(iii)$ durch Negation.

□

Da die in obiger Proposition verwendeten Kodierungen $\Delta^0_0$ sind, werden alle arithmetischen Relationen durch die Klassifikation in 4.4 erfaßt.

**Korollar 4.8** $\bigcup\limits_{n\in\omega} \Sigma^0_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} \Pi^0_n$ *ist die Klasse aller arithmetischen Mengen.*

□

**Korollar 4.9** *Sei* $A \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *und* $\mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *mit* $r, k \in \omega$.

*(i) Sei* $A \in \Sigma^0_n$ *für* $0 < n \in \omega$.
*Sei* $B$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in B \Leftrightarrow \exists^0\, m\ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$.
*Sei* $C$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in C \Leftrightarrow \forall^0\, m < n\ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$.
*Dann sind auch* $B$ *und* $C$ *in* $\Sigma^0_n$.

*(ii) Sei* $A \in \Pi^0_n$ *für* $0 < n \in \omega$.
*Sei* $B$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in B \Leftrightarrow \forall^0\, m\ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$.
*Sei* $C$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in C \Leftrightarrow \exists^0\, m < n\ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$.
*Dann sind auch* $B$ *und* $C$ *in* $\Pi^0_n$.

**Beweis:** $(i)$ Es existiert $R \in \Delta^0_0$, so daß gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} \in B \quad &\Leftrightarrow \quad \exists^0\, m\ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A \\
&\Leftrightarrow \quad \exists^0\, m\ \exists^0 m_1\ \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R(m_1, m_2, \ldots, m_n, m, \mathbf{w}) \\
&\overset{4.7(iii)}{\Leftrightarrow} \quad \exists^0\, a\ \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R((a)_0, m_2, \ldots, m_n, (a)_1, \mathbf{w}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists^0\, a\ \forall^0 m_2 \ldots Q m_n R'(a, m_2, \ldots, m_n, \mathbf{w}),
\end{aligned}
$$

wobei $Q$ wie in 4.4 definiert ist, und $R'$ durch:
$R'(a, m_2, \dots, m_n, \mathbf{w})$
$\Leftrightarrow \ \big(c = (a)_0 \ \wedge \ d = (a)_1\big) \ \Rightarrow \ R(c, m_2, \dots, m_n, d, \mathbf{w})$
$\Leftrightarrow \ \neg c = (a)_0 \ \vee \ \neg d = (a)_1 \ \vee \ R(c, m_2, \dots, m_n, d, \mathbf{w})$.
$R'$ ist ebenfalls $\Delta^0_0$, da die verwendete Kodierung $\Delta^0_0$ ist.
Die Behauptung für $C$ folgt analog mit 4.7 $(i)$, und $(ii)$ folgt mit 4.7 $(ii)$ und $(iv)$ oder durch Negation von $(i)$.

□

**Korollar 4.10** *Seien* $A, B \subseteq \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k$, $A, B \in \Sigma^0_n$ *für* $k, r \in \omega$ *und* $0 < n \in \omega$.
*Dann sind auch* $A \cap B$ *und* $A \cup B \in \Sigma^0_n$.
*Analog für* $\Pi^0_n$.

**Beweis:** Induktion nach $n$.
IA $n = 1:$ Seien $A, B \in \Sigma^0_1$. Dann existieren $\Delta^0_0$-Relationen $R, R' \subseteq \omega^{r+1} \times \big(\omega^\omega\big)^k$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in A &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 m\ R(m, \mathbf{w}), \\ \mathbf{w} \in B &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 n\ R'(n, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in A \cap B &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 m\ \exists^0 n\ \big(R(m, \mathbf{w}) \ \wedge\ R'(n, \mathbf{w})\big) \\ &\overset{4.7(iii)}{\Leftrightarrow}\ \exists^0 a\ \big(R((a)_0, \mathbf{w}) \ \wedge\ R'((a)_1, \mathbf{w})\big) \\ &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 a\ S(a, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

wobei $S \subseteq \omega^{r+1} \times \big(\omega^\omega\big)^k$ definiert ist durch:

$$S(a, \mathbf{w}) \ \Leftrightarrow\ R((a)_0, \mathbf{w}) \ \wedge R'((a)_1, \mathbf{w}).$$

Also ist $S$ ebenfalls $\Delta^0_0$ und $A \cap B \in \Sigma^0_1$.
Für $A, B \in \Pi^0_1$ analog.

IS $n \to n + 1:$ Die Behauptung gelte für $\Pi^0_n$- und $\Sigma^0_n$-Relationen.
Seien $A, B \in \Sigma^0_{n+1}$. Dann existieren nach Bemerkung 4.6 $\Pi^0_n$-Relationen $A', B' \subseteq \omega^{r+1} \times \big(\omega^\omega\big)^k$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in A &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 m\ A'(m, \mathbf{w}), \\ \mathbf{w} \in B &\ \Leftrightarrow\ \exists^0 n\ B'(n, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \in A \cap B &\Leftrightarrow \exists^0 m\, \exists^0 n\, \big(A'(m, \mathbf{w}) \ \wedge \ B'(n, \mathbf{w})\big) \\
&\Leftrightarrow \exists^0 a\, \big(A'((a)_0, \mathbf{w}) \ \wedge \ B'((a)_1, \mathbf{w})\big) \\
&\Leftrightarrow \exists^0 a\, S(a, \mathbf{w}),
\end{aligned}$$

wobei $S$ analog wie im Induktionsanfang definiert ist.
$S$ ist nach der Induktionsvoraussetzung ebenfalls $\Pi^0_n$ und somit $A \cap B \in \Sigma^0_{n+1}$.
Für $A, B \in \Pi^0_{n+1}$ analog.

Der Beweis für $A \cup B$ folgt mit einer analogen Induktion.

□

## 4.2 Die analytische Hierarchie

**Definition 4.11** Sei $A \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^k$ für $r, k \in \omega$ und $0 < n \in \omega$.

$$\begin{aligned}
A \in \Sigma^1_0 &\Leftrightarrow A \in \Sigma^0_1. \\
A \in \Pi^1_0 &\Leftrightarrow A \in \Pi^0_1. \\
A \in \Sigma^1_1 &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^1 x_1\ R(\mathbf{w}, x_1)\big) \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ \text{wobei } R \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^{k+1} \text{ eine arithmetische Relation ist.} \\
A \in \Pi^1_1 &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \forall^1 x_1\ R(\mathbf{w}, x_1)\big) \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ \text{wobei } R \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^{k+1} \text{ eine arithmetische Relation ist.} \\
A \in \Sigma^1_n &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^1 x_1\ \forall^1 x_2 \ldots Q x_n R(\mathbf{w}, x_1, \ldots x_n)\big) \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ \text{wobei } Q = \exists^1 \text{ für } n \text{ ungerade, } Q = \forall^1 \text{ für } n \text{ gerade und} \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ R \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^{k+n} \text{ eine arithmetische Relation ist.} \\
A \in \Pi^1_n &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \forall^1 x_1\ \exists^1 x_2 \ldots Q x_n R(\mathbf{w}, x_1, \ldots x_n)\big) \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ \text{wobei } Q = \exists^1 \text{ für } n \text{ gerade, } Q = \forall^1 \text{ für } n \text{ ungerade und} \\
&\phantom{\Leftrightarrow}\ R \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^{k+n} \text{ eine arithmetische Relation ist.} \\
A \in \Delta^1_n &\Leftrightarrow A \in \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n.
\end{aligned}$$

**Definition 4.12** $A$ heißt *analytisch*, falls $A$ in $\mathcal{A}^2$ durch eine Formel definierbar ist.

Der Begriff kommt daher, daß $\mathcal{A}^2$ das Standardmodell für die Analysis mit Formeln erster Stufe ist.
Die grundlegenden Resultate, die wir für die arithmetische Hierarchie gezeigt haben, gelten auch für die analytische.

**Bemerkung 4.13**

(i) $\Sigma_n^1$ und $\Pi_n^1$ sind dual, d.h. für $0 < n \in \omega$ gilt:

$$A \in \Sigma_n^1 \iff \omega^r \times (\omega^\omega)^k - A \in \Pi_n^1.$$

(ii) $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1 \subseteq \Delta_{n+1}^1$.

(iii) Sei $A \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^k \in \Sigma_{n+1}^1$.
Dann existiert $A' \subseteq \omega^r \times (\omega^\omega)^{k+1} \in \Pi_n^1$, so daß gilt:

$$\mathbf{w} \in A \iff \exists^1 x_1 \ \langle \mathbf{w}, x_1 \rangle \in A'.$$

Ein entsprechendes Resultat gilt für $A \in \Pi_{n+1}^1$.

**Beweis:** (i) Es gelte für alle $\mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k$:

$$\mathbf{w} \in A \iff \big(\exists^1 x_1 \ \forall^1 x_2 \ldots Qx_n \ R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)\big),$$

wobei $Q$ wie in 4.11 definiert ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k - A &\iff \mathbf{w} \notin A \\ &\iff \neg\big(\exists^1 x_1 \ \forall^1 x_2 \ldots Qx_n \ R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)\big). \end{aligned}$$

(ii) Klar nach Definition
(iii) Es gilt für alle $\mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in A &\iff \exists^1 x_1 \ \forall^1 x_2 \ldots Qx_{n+1} \ R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ &\iff \exists^1 x_1 \ \langle \mathbf{w}, x_1 \rangle \in A', \text{ wobei} \\ \langle \mathbf{w}, y \rangle \in A' &:\iff \forall^1 x_2 \ \exists^1 x_3 \ldots Qx_{n+1} \ R(\mathbf{w}, y, x_2, \ldots, x_{n+1}), \\ &\qquad \text{dabei sind } Q, R \text{ wie in 4.11 definiert.} \end{aligned}$$

Analog für $A \in \Pi_{n+1}^1$.

□

Wir erhalten das gewohnte Bild:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Sigma^1_1 & & & & \Sigma^1_2 & & & & \Sigma^1_3 & & \\
 & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & & \\
\Delta^1_1 & & & & \Delta^1_2 & & & & \Delta^1_3 & & & & \dots \\
 & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & & \\
 & & \Pi^1_1 & & & & \Pi^1_2 & & & & \Pi^1_3 & &
\end{array}$$

Auch gleichartige Funktionsquantoren lassen sich zusammenfassen. Außerdem können Zahl- und Funktionsquantoren vertauscht werden. Somit zeigt die folgende Proposition, daß jede analytische Menge zu einer der Klassen $\Sigma^1_n$ bzw. $\Pi^1_n$ für ein $n \in \omega$ gehört.

**Proposition 4.14** [ZSF + $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$]
*Sei* $\mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *mit* $r, k \in \omega$.
*Sei* $R \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ *eine analytische Relation.*
*Es gelten:*

*(i)* $\forall^0 m\ \exists^1 x\ R(m, \mathbf{w}, x) \iff \exists^1 x\ \forall^0 m\ R(m, \mathbf{w}, (x)_m)$

*(ii)* $\exists^0 m\ \forall^1 x\ R(m, \mathbf{w}, x) \iff \forall^1 x\ \exists^0 m\ R(m, \mathbf{w}, (x)_m)$

*(iii)* $\exists^0 m\ \exists^1 x\ R(m, \mathbf{w}, x) \iff \exists^1 x\ R((x)_0(0), \mathbf{w}, (x)_1)$

*(iv)* $\forall^0 m\ \forall^1 x\ R(m, \mathbf{w}, x) \iff \forall^1 x\ R((x)_0(0), \mathbf{w}, (x)_1)$

*Sei* $R \subseteq \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^{k+2}$ *eine analytische Relation. Dann gelten:*

*(v)* $\exists^1 x\ \exists^1 y\ R(\mathbf{w}, x, y) \iff \exists^1 x\ R(\mathbf{w}, (x)_0, (x)_1)$

*(vi)* $\forall^1 x\ \forall^1 y\ R(\mathbf{w}, x, y) \iff \forall^1 x\ R(\mathbf{w}, (x)_0, (x)_1)$

**Beweis:** $(i)$ „ $\Rightarrow$ “ Wir wählen für jedes $m \in \omega$ ein $x_m \in \omega^\omega$ mit $R(m, \mathbf{w}, x_m)$. Dann existiert nach 1.8 ein $x \in \omega^\omega$ mit $(x)_m = x_m$ für alle $m \in \omega$, und es gilt: $\exists^1 x\ \forall^0 m\ R(m, \mathbf{w}, (x)_m)$.
„ $\Leftarrow$ “ Klar.
$(ii)$ folgt aus $(i)$ durch Negation.
$(iii)$ Sei $y \in \omega^\omega$ so gewählt, daß gilt: $(y)_0(0) = m$ und $(y)_1 = x$. Damit folgt sofort „ $\Rightarrow$ “. Die Umkehrung ist offensichtlich.

$(iv)$ folgt aus $(iii)$ durch Negation.
$(v)$ und $(vi)$ folgen durch ähnliche Kodierung bzw. Negation.

□

Durch dieses Resultat lassen sich zu Korollar 4.9 und Korollar 4.10 analoge Resultate zeigen, wobei die Beweise direkt übertragbar sind.

**Korollar 4.15** *Sei* $\mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *mit* $r, k \in \omega$.

*(i)* *Sei* $A \in \Sigma^1_n$ *für* $0 < n \in \omega$.
*Sei* $B$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in B \Leftrightarrow \exists^1 x \ \langle \mathbf{w}, x\rangle \in A\big)$.
*Sei* $C$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in C \Leftrightarrow Q^0 m \ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$,
*wobei* $Q^0 = \exists^0$ *oder* $Q^0 = \forall^0$ *ist.*
*Dann sind auch* $B$ *und* $C$ *in* $\Sigma^1_n$.
*Dabei ist* $A \subseteq \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ *im ersten und* $A \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *im zweiten Fall.*

*(ii)* *Sei* $A \in \Pi^1_n$ *für* $0 < n \in \omega$.
*Sei* $B$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in B \Leftrightarrow \forall^1 x \ \langle \mathbf{w}, x\rangle \in A\big)$.
*Sei* $C$ *definiert durch* $\big(\mathbf{w} \in C \Leftrightarrow Q^0 m \ \langle m, \mathbf{w}\rangle \in A\big)$,
*wobei* $Q^0 = \exists^0$ *oder* $Q^0 = \forall^0$ *ist.*
*Dann sind auch* $B$ *und* $C$ *in* $\Pi^1_n$.
*Dabei ist* $A \subseteq \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ *im ersten und* $A \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *im zweiten Fall.*

□

**Korollar 4.16** *Seien* $A, B \subseteq \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$, $A, B \in \Sigma^1_n$ *für* $k, r, n \in \omega$.
*Dann sind auch* $A \cap B$ *und* $A \cup B \in \Sigma^1_n$.
*Analog für* $\Pi^1_n$.

□

**Hilfssatz 4.17** *Sei* $A \subseteq \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ *eine* $\Sigma^1_n$*-Menge für* $k, r \in \omega$ *und* $0 < n \in \omega$.

*(i)* *Falls* $n$ *gerade ist, so existiert eine* $\Delta^0_0$*-Relation* $\hat{R} \subseteq \omega^{r+k+n+1}$, *so daß gilt:*

$$\forall \mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k \ \Big(\mathbf{w} \in A \ \Leftrightarrow \ \exists^1 x_1 \ldots \forall^1 x_n \exists^0 m \quad \hat{R}\big(m, \bar{\mathbf{w}}(m), \bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_n(m)\big)\Big).$$

*(ii) Falls $n$ ungerade ist, so existiert eine $\Delta_0^0$-Relation $\hat{R} \subseteq \omega^{r+k+n+1}$, so daß gilt:*

$$\forall\, \mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k \Big(\mathbf{w} \in A \;\;\Leftrightarrow\;\; \exists^1 x_1 \ldots \exists^1 x_n \forall^0 m \\ \hat{R}\big(m, \bar{\mathbf{w}}(m), \bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_n(m)\big)\Big).$$

*Eine analoge Behauptung gilt für $A \in \Pi_n^1$.*

**Beweis:** $(i)$ Sei $n$ gerade. Wegen $A \in \Sigma_n^1$ existiert eine arithmetische Relation $R$ mit: $\forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^1 x_1\, \forall^1 x_2 \ldots \forall^1 x_n R(\mathbf{w}, x_1, \ldots x_n)\big)$.
Da $R$ arithmetisch ist, existiert eine $\Delta_0^0$-Relation $R^0$ mit

$$\forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \;\;\Leftrightarrow\;\; \exists^1 x_1\, \forall^1 x_2 \ldots \forall^1 x_n Q_1 m_1\, Q_2 m_2 \ldots Q_\ell m_\ell \\ R^0(m_1, \ldots, m_\ell, \mathbf{w}, x_1, \ldots x_n)\big),$$

wobei $Q_i \in \{\exists^0, \forall^0\}$ für alle $1 \leq i \leq \ell$.
Mit Hilfe von Kodierungen und durch sukzessive Anwendung von Proposition 4.14 können wir diesen Ausdruck in die gewünschte Form bringen:
Diejenigen der $Q_i$, welche die Form $\forall^0$ haben, werden durch einen Funktionsquantor $\forall^1$ ersetzt:

$$\forall^0\, m \text{ wird zu } \forall^1\, y \text{ mit } y(0) = m.$$

Gemäß 4.14 $(ii)$ und $(vi)$ werden diese neue Quantoren alle „nach links geschoben", wo sie mit $\forall^1 x_n$ zu einem $\forall^1$-Quantor zusammengefaßt werden.
Die verbleibenden $Q_i$ sind $\exists^0$-Quantoren und können mit Proposition 4.7 $(iii)$ zu einem einzigen $\exists^0$ zusammengefaßt werden.
Somit haben wir die Formel reduziert auf die Gestalt:

$$\forall \mathbf{w} \in \omega^r \times (\omega^\omega)^k \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^1 x_1\, \forall^1 x_2 \ldots \forall^1 x_n\, \exists^0 p\; R_1(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots x_n)\big), \qquad (\star)$$

wobei $R_1$ eine $\Delta_0^0$-Relation ist. D.h. $R_1$ ist in $\mathcal{A}^2$ durch eine Formel, die nur beschränkte Quantoren enthält, definierbar. Somit kann diese Formel von den Elementen von $\omega^\omega$ unter den Variablen von $R_1$ jeweils nur endlich viel an „Information" benutzen, d.h. für ein genügend großes $q \in \omega$ ist $R_1$ nur abhängig von $\mathbf{w}{\restriction}q$ , $x_1{\restriction}q$ , … , $x_n{\restriction}q$. Diese endlichen Folgen natürlicher Zahlen können wir durch je eine einzige natürliche Zahl kodieren und erhalten eine $\Delta_0^0$-Relation $R_2$ mit:

$$R_1(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n) \iff \exists^0\, q\; R_2(p, \bar{\mathbf{w}}(q), \bar{x}_1(q), \ldots, \bar{x}_n(q)).$$

In $(\star)$ können wir nun mit Proposition 4.7 $(iii)$ $\exists^0\, p$ und $\exists^0\, q$ zu einem $\exists^0$ zusammenziehen, d.h. es existiert eine $\Delta^0_0$-Relation $\hat{R}$ mit der gewünschten Gestalt.

$(ii)$ folgt analog.

Die Behauptung für $\Pi^1_n$ läßt sich ebenso zeigen, folgt aber auch durch Negation.

$\square$

## 4.3 Die relativen Hierarchien

Wir definieren nun die arithmetische und die analytische Hierarchie relativ zu einem $a \in \omega^\omega$.

Als zugrundeliegende Struktur dient uns nun

$$\mathcal{A}^2(a) = \langle \omega, \omega^\omega, \pi, +, \cdot, \exp, <, 0, 1, a \rangle,$$

d.h. $\mathcal{A}^2$ erweitert um das Prädikat $a \in \omega^\omega$.

**Definition 4.18** Eine Relation heißt $\Delta^0_0(a)$, falls sie in $\mathcal{A}^2(a)$ durch eine Formel, die keine unbeschränkten Quantoren enthält, definierbar ist.

Ausgehend von $\Delta^0_0(a)$ werden analog zu den Definitionen 4.4 und 4.11 die Begriffe *arithmetisch in a* bzw. *analytisch in a* sowie die Klassen $\Sigma^0_n(a)$, $\Pi^0_n(a)$, $\Delta^0_n(a)$ bzw. $\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$ und $\Delta^1_n(a)$ für alle $(n \in \omega)$ definiert.

**Bemerkung:** Für die auf diese Weise erhaltenen Hierarchien gelten Analoga zu den in den Abschnitten 4.1 und 4.2 gezeigten Resultaten. Die Beweise können direkt übertragen werden, indem $\Delta^0_0$ durch $\Delta^0_0(a)$, $\Sigma^0_n$ durch $\Sigma^0_n(a)$ usw. ersetzt wird.

Der nachfolgende Hilfssatz liefert eine andere Charakterisierung für die Mengen der relativen Hierarchien.

**Hilfssatz 4.19** *Sei* $a \in \omega^\omega, A \subseteq \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k$.

$$A \text{ ist } \Sigma^0_1(a) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es existiert eine } \Sigma^0_1\text{-Menge } B \subseteq \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^{k+1} \text{ mit } \forall\, \mathbf{w} \in \omega^r \times \big(\omega^\omega\big)^k \ \big(\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \langle \mathbf{w}, a \rangle \in B\big).$$

*Analoge Aussagen gelten für* $\Sigma^0_n(a)$, $\Pi^0_n(a)$ , $\Sigma^1_n(a)$ *und* $\Pi^1_n(a)$.

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung exemplarisch für $\Sigma_1^0(a)$.
„ $\Rightarrow$ “ Sei $A \in \Sigma_1^0(a)$, d.h. es existiert eine $\Delta_0^0(a)$-Relation $R \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^k$, so daß gilt:

$$\forall\, \mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k \ \left(\mathbf{w} \in A \ \Leftrightarrow \ \exists^0\, m\ R(m, \mathbf{w})\right).$$

Somit ist $R$ im Modell $\mathcal{A}^2(a)$ durch eine Formel $\varphi(v_1^0, \ldots, v_{r+1}^0, v_1^1, \ldots, v_k^1)$ definierbar, die nur beschränkte Quantoren enthält.
Die Formel $\psi(v_1^0, \ldots, v_{r+1}^0, v_1^1, \ldots, v_k^1, v_{k+1}^1)$ entspreche $\varphi$ mit der Ausnahme, daß das Prädikat $a$ durch $v_{k+1}^1$ ersetzt wird.
Die $\Delta_0^0$-Relation $S \subseteq \omega^{r+1} \times \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ wird nun definiert durch:

$$S(m, \mathbf{w}, y) \ \Leftrightarrow \ \mathcal{A}^2 \models \psi[m, \mathbf{w}, y].$$

für alle $m \in \omega$, $\mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k$ und $y \in \omega^\omega$.
Mit Hilfe von $S$ wird nun die $\Sigma_1^0$-Menge $B$ so definiert, daß gilt:

$$\begin{aligned}\forall\, \mathbf{w} \in \omega^r \times \left(\omega^\omega\right)^k \ \Big(\mathbf{w} \in A \quad &\Leftrightarrow \quad \exists^0\, m\ R(m, \mathbf{w}) \ \Leftrightarrow \ \exists^0\, m\ S(m, \mathbf{w}, a) \\ &:\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{w}, a \rangle \in B\Big).\end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ Folgt mit derselben Argumentation.

$\square$

**Bemerkung:** Für $\Delta_n^1$-Relationen gilt eine solche Aussage nicht (vgl.Moschovakis [24, S.173]).

## 4.4 Der Zusammenhang zwischen effektiver und klassischer Deskriptiver Mengenlehre

In diesem Abschnitt wird bewiesen, daß die Mengen, die arithmetisch in einem $a \in \omega^\omega$ sind, gerade die Mengen der endlichen Stufen der Borel–Hierarchie auf $\omega^\omega$ sind, und daß die Mengen, welche analytisch in einem $a \in \omega^\omega$ sind, gerade den projektiven Mengen auf $\omega^\omega$ entsprechen.
Damit ist dann die Verbindung zur klassischen Deskriptiven Mengenlehre hergestellt. Bevor wir dies beweisen können, benötigen wir jedoch einen Hilfssatz:

**Hilfssatz 4.20** *Sei $0 < n \in \omega$, $k \in \omega$. Es existiert eine $\Sigma_n^0$-Menge $W_n \subseteq (\omega^\omega)^{k+1}$, so daß für jede Menge $A \subseteq (\omega^\omega)^k$ gilt:*

$$A \in \mathbf{\Sigma}_n^0 \implies \exists\, a \in \omega^\omega \textit{ mit: } A = \{\mathbf{w} \in (\omega^\omega)^k\,;\ \langle a, \mathbf{w}\rangle \in W_n\},$$

$$A \in \mathbf{\Pi}_n^0 \implies \exists\, a \in \omega^\omega \textit{ mit: } A = \{\mathbf{w} \in (\omega^\omega)^k\,;\ \langle a, \mathbf{w}\rangle \notin W_n\}.$$

**Beweis:** durch Induktion nach $n$.
<u>IA</u> $n = 1$ :
Sei $A \in \mathbf{\Sigma}_1^0$. Dann ist $A$ offen und somit darstellbar als abzählbare Vereinigung offener Basismengen aus $(\omega^\omega)^k$, denn die Basis ist nach Hilfssatz 1.13 abzählbar:

$$A = \bigcup_{m \in \omega} U_{s_{m_1}} \times \ldots \times U_{s_{m_k}},$$

wobei für $\omega^{<\omega}$ die $\Delta_0^0$-Abzählung aus 1.2 gewählt ist.
Wir definieren nun $a \in \omega^\omega$ wie folgt:

$$a(m \cdot k + i - 1) := m_i \quad \forall\, m \in \omega \ \ \forall\, 1 \leq i \leq k.$$

Dann gilt für $\mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k$:

$$\mathbf{w} \in A \iff \exists^0\, m\ \left(\mathbf{w} \in U_{s_{a(mk)}} \times \ldots \times U_{s_{a(mk+k-1)}}\right).$$

$W_1 \subseteq \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ sei durch

$$\langle x, \mathbf{w}\rangle \in W_1 \iff \exists^0 m\ (\mathbf{w} \in U_{s_{x(mk)}} \times \ldots \times U_{s_{x(mk+k-1)}})$$

definiert.
Sei $s \in \omega^{<\omega}$ und $y \in \omega^\omega$. Da

$$y \in U_s \iff \forall\, p < |s| : \quad y(p) = s(p)$$

gilt, ist $U_{s_{x(mk)}} \times \ldots \times U_{s_{x(mk+k-1)}}$ eine $\Delta_0^0(x)$-Menge.
Somit ist $W_1 \in \Sigma_1^0$.
Sei nun $A \subseteq \left(\omega^\omega\right)^k$ eine $\mathbf{\Sigma}_1^0$-Menge. Dann folgt aus obiger Argumentation, daß ein $a \in \omega^\omega$ existiert, so daß für alle $\mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k$ gilt:

$$\mathbf{w} \in A \iff \langle a, \mathbf{w}\rangle \in W_1.$$

<u>IS</u> $n \to n+1$:
Nach der Induktionsvoraussetzung existiert eine $\Sigma^0_n$-Menge $W_n$ mit der geforderten Eigenschaft für $\mathbf{\Sigma}^0_n$-Mengen.
Sei $W_{n+1}$ definiert durch:

$$\langle x, \mathbf{w}\rangle \in W_{n+1} \iff \exists^0 m: \ \langle (x)_m, \mathbf{w}\rangle \notin W_n.$$

Somit ist $W_{n+1} \in \Sigma^0_{n+1}$.
Sei $A \subseteq \left(\omega^\omega\right)^k$ eine $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$-Menge. Dann existieren $A_m \in \mathbf{\Pi}^0_n$ $(m \in \omega)$ mit:

$$A = \bigcup_{m\in\omega} A_m.$$

Für $m \in \omega$ gilt also $\left(\omega^\omega\right)^k - A_m \in \mathbf{\Sigma}^0_n$, d.h. es existiert ein $a_m \in \omega^\omega$, so daß

$$\mathbf{w} \in A_m \iff \langle a_m, \mathbf{w}\rangle \notin W_n.$$

Mit $a \in \omega^\omega$ derart, daß $(a)_m = a_m$ für jedes $m \in \omega$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in A &\iff \exists^0 m: \ \mathbf{w} \in A_m \\ &\iff \exists^0 m: \ \langle (a)_m, \mathbf{w}\rangle \notin W_n \\ &\iff \langle a, \mathbf{w}\rangle \in W_{n+1}. \end{aligned}$$

Die Behauptung für $\mathbf{\Pi}^0_n$-Mengen folgt durch Komplementbildung.

□

**Satz 4.21** *Sei* $A \subseteq \left(\omega^\omega\right)^k$, $0 < n \in \omega$.

*(i)* $\mathbf{\Sigma}^0_n = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \Sigma^0_n(a)$

*(ii)* $\mathbf{\Pi}^0_n = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \Pi^0_n(a)$

*(iii)* $\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \Sigma^1_n(a)$

*(iv)* $\mathbf{\Pi}^1_n = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \Pi^1_n(a)$

**Beweis:** $(i), (ii)$ Beweis durch Induktion nach $n$.
IA $n = 1$ :
„ $\subseteq$ “ Sei $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. Dann existiert nach Hilfssatz 4.20 eine $\Sigma^0_1$-Menge $W_1$ sowie ein $a \in \omega^\omega$ mit

$$\mathbf{w} \in A \iff \langle a, \mathbf{w} \rangle \in W_1.$$

Somit ist $A$ nach Hilfssatz 4.19 eine $\Sigma^0_1(a)$-Menge.
„ $\supseteq$ “ Sei $A \in \Sigma^0_1(a)$ für ein $a \in \omega^\omega$. Dann gilt für alle $\mathbf{w} \in \big(\omega^\omega\big)^k$ :

$$\mathbf{w} \in A \;\Leftrightarrow\; \exists^0 m \; \big(R(m, \mathbf{w})\big),$$

wobei $R$ eine $\Delta^0_0(a)$-Relation ist.
Da $R$ durch eine Formel definierbar ist, die nur beschränkte Quantoren enthält, hängt dieser Ausdruck für festes $m$ nur von einem endlichen Anfangsstück von $\mathbf{w}$ ab.
Somit existiert ein $q \in \omega$, so daß für alle $\mathbf{w} \in \big(\omega^\omega\big)^k$ gilt:

$$R(m, \mathbf{w}') \iff \mathbf{w}' \upharpoonright q = \mathbf{w} \upharpoonright q.$$

Folglich gilt für festes $m \in \omega$ und für alle $\mathbf{w} \in \big(\omega^\omega\big)^k$:

$$\{\mathbf{w}' \in \big(\omega^\omega\big)^k;\; \mathbf{w}' \upharpoonright q = \mathbf{w} \upharpoonright q\} \subseteq \{\mathbf{w}' \in \big(\omega^\omega\big)^k;\; R(m, \mathbf{w}')\} =: R_m.$$

Also ist für jedes $m \in \omega$ die Menge $R_m$ offen und somit auch $A = \bigcup\limits_{m \in \omega} R_m$.
Immer wenn wir die Behauptung für die Klasse $\mathbf{\Sigma}^0_n$ gezeigt haben $(n \in \omega)$, dann folgt mittels Komplementbildung die Behauptung für die Klasse $\mathbf{\Pi}^0_n$. Daher erhalten wir unmittelbar die Behauptung für $\mathbf{\Pi}^0_1$ aus dem eben gezeigten.

Für den Induktionsschritt möge die Behauptung nun sowohl für die Klasse $\mathbf{\Sigma}^0_n$ als auch für die Klasse $\mathbf{\Pi}^0_n$ gezeigt sein.
IS $\mathbf{\Pi}^0_n \to \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$ :
„ $\subseteq$ “ Sei $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$. Dann existiert nach Hilfssatz 4.20 eine $\Sigma^0_{n+1}$-Menge $W_{n+1} \subseteq \big(\omega^\omega\big)^{k+1}$ sowie ein $a \in \omega^\omega$ mit

$$\mathbf{w} \in A \iff \langle a, \mathbf{w} \rangle \in W_{n+1}.$$

Also ist $A$ nach Hilfssatz 4.19 eine $\Sigma^0_{n+1}(a)$-Menge.

„ $\supseteq$ “ Sei $A \in \Sigma^0_{n+1}(a)$ für $a \in \omega^\omega$. Dann gilt für $\mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k$ nach 4.6:

$$\mathbf{w} \in A \iff \exists^0\, m\ \big(R(m, \mathbf{w})\big),$$

wobei $R \in \Pi^0_n(a)$.
Definiere $R_m$ für $m \in \omega$ durch:

$$\forall \mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k\ \Big(\mathbf{w} \in R_m\ \Leftrightarrow\ R(m, \mathbf{w})\Big).$$

$R_m$ ist ebenfalls $\Pi^0_n(a)$ und damit nach der Induktionsvoraussetzung eine $\mathbf{\Pi}^0_n$-Menge. Folglich ist $A = \bigcup\limits_{m \in \omega} R_m \in \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$.

$(iii), (iv)$ Beweis durch Induktion nach $n$.
IA $n = 1$ :
„ $\subseteq$ “ Sei $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $B \subseteq \left(\omega^\omega\right)^{k+1}$ mit $A = pB = \{\mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k;\ \exists y \in \omega^\omega :\ \langle \mathbf{w}, y\rangle \in B\}$.
Nach $(ii)$ ist $B \in \Pi^0_1(a)$ für ein $a \in \omega^\omega$ und es gilt:

$$\forall \mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k\ \Big(\mathbf{w} \in A\ \Leftrightarrow\ \exists^1\, y\ \langle \mathbf{w}, y\rangle \in B\Big).$$

Also ist $A \in \Sigma^1_1(a)$.
„ $\supseteq$ “ Sei $A \in \Sigma^1_1(a)$ für ein $a \in \omega^\omega$. Dann gilt für $\mathbf{w} \in \left(\omega^\omega\right)^k$ :

$$\mathbf{w} \in A\ \Leftrightarrow\ \exists^1\, x\ \big(R(\mathbf{w}, x)\big),$$

wobei die Relation $R$ arithmetisch in $a$ ist. Damit ist $A$ nach $(i)$ die Projektion einer Borel–Menge und es folgt: $A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$.

Wie oben folgt die Behauptung für $\mathbf{\Pi}^1_n$-Mengen jeweils aus der für $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Mengen durch Komplementbildung.
IS $\mathbf{\Pi}^1_n \to \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ wird mit derselben Argumentation wie im Induktionsanfang bewiesen.

$\square$

## 4.5 Die Mengen WF und WO

Die Verfahren aus 1.2 ermöglichen es, binäre Relationen auf der Menge der natürlichen Zahlen durch Elemente von $\omega^\omega$ zu kodieren.

In diesem Abschnitt werden Mengen derjeniger Elemente von $\omega^\omega$ betrachtet, die fundierte Relationen bzw. Wohlordnungen kodieren. Die Aussagen, die in diesem Zusammenhang bewiesen werden, gehen an zentraler Stelle sowohl in den ersten Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_1$ als auch in den Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_2$ (jeweils in ZSF + AD) ein.

**Definition 4.22**

$$\begin{aligned}
\mathrm{WF} &:= \{x \in \omega^\omega;\ E_x \text{ ist fundiert}\} \\
\mathrm{WO} &:= \{x \in \omega^\omega;\ E_x \text{ ist Wohlordnung}\} \\
\mathrm{WF}_\alpha &:= \{x \in \mathrm{WF};\ \|x\| \le \alpha\} \\
\mathrm{WO}_\alpha &:= \{x \in \mathrm{WO};\ \|x\| \le \alpha\}
\end{aligned}$$

**Proposition 4.23** *Sei $\alpha \in \omega_1$.*
*Dann ist* $\mathrm{WO}_\alpha$ *eine $\Sigma^1_1(z)$-Menge für $z \in WO$ mit $\|z\| = \alpha$.*

**Beweis:** Sei $z \in \mathrm{WO}$ mit $\|z\| = \alpha$. Sei $x \in \omega^\omega$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{WO}_\alpha &\Leftrightarrow E_x \text{ ist Wohlordnung vom Ordnungstyp } \le \alpha \\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert eine ordnungserhaltende Injektion } h : \langle \omega, E_x \rangle \to \langle \omega, E_z \rangle \\
&\Leftrightarrow \exists^1 h\ \ \forall^0 m\ \ \forall^0 n\ \ (m\ E_x\ n \ \Leftrightarrow\ h(m)\, E_z\, h(n)) \\
&\Leftrightarrow \exists^1 h\ \ \forall^0 m\ \ \forall^0 n\ \ (x(\langle\!\langle m, n \rangle\!\rangle)\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ z\,(\langle\!\langle h(m), h(n) \rangle\!\rangle) = 0)\,.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist $\Sigma^1_1(z)$.

□

$\mathrm{WO}_\alpha$ ist sogar eine Borel–Menge (vgl. Jech [13, Lemma 40.3]).

**Proposition 4.24** WF *und* WO *sind $\Pi^1_1$-Mengen.*

**Beweis:** Es gilt für $x \in \omega^\omega$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{WF} &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \neg\, \exists^1\, z\ \ \forall^0\, k\ \big(z(k+1)\, E_x\, z(k)\big) \\
&\Longleftrightarrow \forall^1\, z\ \ \exists^0\, k\ \big(\neg\, z(k+1)\, E_x\, z(k)\big) \\
&\Longleftrightarrow \forall^1\, z\ \ \exists^0\, k\ \Big(x\big(\langle\!\langle z(k+1), z(k) \rangle\!\rangle\big) \ne 0\Big).
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz $(*)$ gilt in ZSF, da $\omega$ wohlgeordnet ist.
Somit ist WF $\Pi^1_1$.
Sei LO $:= \{x \in \omega^\omega;\ E_x \text{ ist eine lineare Ordnung auf } \omega\}$.

Es gilt für $x \in \omega^\omega$ :

$$x \in \mathrm{LO} \;\Leftrightarrow\; \big(\forall^0 m\, \forall^0 n\ \ (m\, E_x\, n \;\vee\; n\, E_x\, m \;\vee\; m = n) \\ \&\ E_x \text{ ist eine partielle Ordnung}\big).$$

Damit ist $\mathrm{LO} \in \Delta^0_0$.
Wegen $x \in \mathrm{WO} \Leftrightarrow (x \in \mathrm{WF} \;\;\&\;\; x \in \mathrm{LO})$ folgt, daß WO auch $\Pi^1_1$ ist.

□

**Proposition 4.25** *Sei $A$ eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge. Dann existieren stetige Funktionen $f, g :\ \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ mit*

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(\mathrm{WF}), \\ A &= g^{-1}(\mathrm{WO}). \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei $A$ eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge. Dann existiert ein Baum $B$ auf $\omega \times \omega$, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$x \in A \iff \supset \text{ ist eine fundierte Relation auf } B_x,$$

wobei $B_x = \{u \in \omega^{<\omega};\ \exists m \in \omega :\ \langle x\!\restriction\! m,\, u\rangle \in B\}$.
Jedem Baum $B_x$ werden wir nun eine Relation auf $\omega$ und damit auch ein Element $y$ von $\omega^\omega$ so zuordnen, daß für $x \in A$ die Relation fundiert, also $y$ Element von WF ist.
Die Funktion $f :\ \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ sei wie folgt definiert:
Sei $x \in \omega^\omega$. Setze $f(x) = y \in \omega^\omega$, wobei für alle $k \in \omega$:

$$y(k) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } k = \langle\!\langle m, n\rangle\!\rangle \;\;\&\;\; s_m, s_n \in B_x \;\;\&\;\; s_m \supset s_n \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei seien die $s_i \in \omega^{<\omega}$ wie in 1.2 abgezählt.
Damit ist für $m, n \in \omega$: $m\, E_y\, n \;\Leftrightarrow\; (s_m, s_n \in B_x \;\;\&\;\; s_m \supset s_n)$, und somit gilt für alle $x \in \omega^\omega$:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \supset \text{ ist eine fundierte Relation auf } B_x \\ &\iff y = f(x) \in \mathrm{WF}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: $f^{-1}(\mathrm{WF}) = \{x \in \omega^\omega;\ f(x) \in \mathrm{WF}\} = A$.

Nun bleibt noch die Stetigkeit von $f$ zu zeigen.
Seien $x, x' \in \omega^\omega$ und $m \in \omega$ mit $x \upharpoonright m = x' \upharpoonright m$. Seien $y = f(x),\ y' = f(x')$.
Die Bäume $B_x$ und $B_{x'}$ sind nach Definition bis zur Höhe $m$ identisch sind. Da die Abzählung von $\omega^{<\omega}$ die Eigenschaft hat, daß $|s_i| \leq i$ für alle $i \in \omega$ ist, gilt

$$y(k) = 0 \iff y'(k) = 0$$

für alle $k \in \omega$ mit $k = \langle\!\langle i, j \rangle\!\rangle$ für $i, j \leq m$.
Somit gilt wegen der Definition von $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ (vgl. Felgner [6, Prop. 5.7]) für $\ell = \sum_{i=1}^{m+1} i$:

$$y \upharpoonright \ell \ = \ y' \upharpoonright \ell.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $f$.

Nimmt man in obigem Beweis anstatt $\langle B_x, \supset \rangle$ den Baum $B_x >$ mit der Kleene–Brouwer–Ordnung $\langle B_x, <_{\mathrm{KB}} \rangle$ (vgl. Kanamori [14, § 13, S.162])und definiert $g(x) = y$ analog, dann gilt für alle $x \in \omega^\omega$:

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad B_x \text{ ist wohlgeordnet bzgl. } <_{\mathrm{KB}} \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) \in \mathrm{WO},$$

das heißt $g^{-1}(\mathrm{WO}) = \{x \in \omega^\omega;\ g(x) \in \mathrm{WO}\} = A$.
Die Stetigkeit von $g$ folgt analog.

□

**Korollar 4.26** [ZSF + $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$] *Für die Teilmengen* WF, WO $\subseteq \omega^\omega$ *gilt:*
WF *ist keine* $\mathbf{\Sigma}^1_1$*-Menge.*
WO *ist keine* $\mathbf{\Sigma}^1_1$*-Menge.*

**Beweis:** Angenommen, WF oder WO wäre $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Wegen Proposition 4.25 wäre dann jede $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge das Urbild einer $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge unter einer stetigen Funktion, also selbst auch $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge. Doch es gilt: $\mathbf{\Pi}^1_1 \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1$, (vgl. Jech [13, Korollar zu Lemma 39.4], Widerspruch!

□

Das folgende Resultat wurde bereits von Nikolai Lusin und Wacław Sierpiński bewiesen [22]. Es besagt, daß zu einer $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge von Elementen von $\omega^\omega$, die Wohlordnungen kodieren, eine abzählbare Ordinalzahl existiert, die eine obere Schranke für die Ordnungstypen dieser Wohlordnungen bildet.
Diese Aussage wird in den folgenden Kapiteln an entscheidenden Stellen benutzt.

**Korollar 4.27 (Boundedness Lemma)** [ZSF + $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$]
*Sei* $A \subseteq \mathrm{WO}$ *eine* $\mathbf{\Sigma}^1_1$*-Menge. Dann existiert ein* $\alpha \in \omega_1$ *mit:* $A \subseteq \mathrm{WO}_\alpha$.

**Beweis:** Sei $A \subseteq \mathrm{WO}$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge. Angenommen es existiert kein $\alpha \in \omega_1$ mit: $A \subseteq \mathrm{WO}_\alpha$. Dann existiert für jedes Element von WO ein Element von $A$, das eine Wohlordnung von gleichem oder größerem Ordnungstyp kodiert, d.h. für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{WO} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, z \in A : \; E_x \text{ ist Wohlordnung vom Ordnungstyp } \leq \|z\| \\ &\Leftrightarrow \quad \exists^1 z\, \exists^1 h\, \forall^0 m\, \forall^0 n\, \big(z \in A \;\; \& \;\; (m\, E_x\, n \;\Leftrightarrow\; h(m)\, E_z\, h(n))\big), \end{aligned}$$

und weil $A$ $\mathbf{\Sigma}^1_1$ ist, ist dieser Ausdruck ebenfalls $\mathbf{\Sigma}^1_1$ im Widerspruch zu Korollar 4.26!

$\square$

# Kapitel 5

# AD impliziert die Meßbarkeit von $\aleph_1$

Wenige Jahre nachdem Mycielski und Steinhaus das Axiom der Determiniertheit vorgestellt hatten, bewies Robert Solovay die Meßbarkeit von $\aleph_1$ aus dem System ZSF + AD.

**Satz 5.1** (Solovay, 1967) [ZSF + AD]
$\aleph_1$ *ist eine meßbare Kardinalzahl.*

Daß aus der Annahme von AD geschlossen werden kann, daß die kleinste überabzählbare Kardinalzahl meßbar ist, war ein unerwartetes Resultat, denn weder die Aussage des Axioms, noch der mathematische Zusammenhang, in dem AD zuerst auftauchte, haben etwas mit der Theorie großer Kardinalzahlen zu tun.
Damit war erstmals ein Zusammenhang zwischen dem von Mycielski und Steinhaus formulierten Axiom und dem Gebiet der großen Kardinalzahlen, das von vielen als eines der bedeutendsten innerhalb der Mengenlehre gesehen wurde, hergestellt.
In der darauffolgenden Zeit wurden weitere Zusammenhänge zwischen Determiniertheit von Mengen und großen Kardinalzahlen gesucht und auch gefunden.

In diesem Kapitel gebe ich drei Beweise für die Meßbarkeit von $\aleph_1$ unter der Annahme von AD an.
Zunächst wird der Beweis von Solovay selbst vorgestellt. Er zeigt, daß der club–Filter auf $\aleph_1$ unter AD ein Ultrafilter ist. Diese Aussage ist, wie am Ende von Abschnitt 3.3 vermerkt wurde, in ZSF + AC falsch.

Als Grundlage für die beiden anderen Beweise dient ein Filter auf einer Partition von $\omega^\omega$, der auf Donald Martin zurückgeht, und von dem wir beweisen werden, daß er in ZSF + AD ein Ultrafilter ist.
Der gewünschte Ultrafilter auf $\aleph_1$ wird dann als Bildfilter unter einer geeigneten Abbildung konstruiert.
Diese wird im einen Beweis mit Hilfe der Modelle der Mengenlehre $\mathbf{L}[x]$ für ein $x \in \omega$ definiert, die ich im Abschnitt 5.3 betrachte.
Man kann jedoch auf die Beschäftigung mit diesen Modellen verzichten, denn ich habe eine Abbildung formuliert, mit der sich die Existenz des Ultrafilters auf $\aleph_1$ allein mit Hilfe von Kodierungen zeigen läßt. Diesen Beweis gebe ich in Abschnitt 5.2 an. Am Ende des Kapitels folgen einige Überlegungen zu den Beweisen sowie zur Aussage, daß $\aleph_1$ unter Annahme von AD meßbar ist, selbst.

## 5.1 Der Beweis von Solovay

Der Originalbeweis von Solovay wurde von ihm selbst niemals publiziert. Die Darstellung hier beruht auf Kanamori [14, Theorem 28.2, First Proof].

**1. Beweis:**
Nach Korollar 2.11 ist $\aleph_1$ unter der Annahme von AD eine reguläre Kardinalzahl. Somit ist $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ wegen Bemerkung 3.20 ein $\aleph_1$-vollständiger, freier Filter auf $\aleph_1$.
Wir zeigen: Für jede Teilmenge $Y \subseteq \omega_1$ gilt:

$$Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1} \text{ oder } \omega_1 - Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1}.$$

Damit ist $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ auch ein Ultrafilter auf $\aleph_1$ und $\aleph_1$ folglich eine meßbare Kardinalzahl.

Wir betrachten zu $Y \subseteq \omega_1$ ein Spiel $G(Y)$. Aus der Determiniertheit von $G(Y)$ wird folgen, daß entweder eine club-Menge $C$ existiert mit $C \subseteq Y$ oder eine club-Menge $C'$ mit $C' \subseteq \omega_1 - Y$. Da Obermengen von Filterelementen wieder im Filter liegen, wäre damit die Behauptung bewiesen.

Bevor wir das Spiel $G(Y)$ beschreiben, werden wir die zugrundeliegende Idee zunächst an einem „einfacheren“ Spiel aufzeigen:

Sei also $Y \subseteq \omega_1$. Das Spiel $G^*(Y)$ sei wie folgt definiert: Die Spieler I und II wählen abzählbare Ordinalzahlen $\omega \leq \alpha_i \in \omega_1 \quad , \; i \in \omega$.

**I** $\alpha_0$ $\alpha_2$ $\alpha_4$ ...
**II** $\alpha_1$ $\alpha_3$ $\alpha_5$ ...

I gewinnt, falls $\alpha := \bigcup_{i\in\omega} \alpha_i \in Y$, also deren Supremum in $Y$ liegt, ansonsten gewinnt II.

Angenommen $G^*(Y)$ wäre determiniert.

<u>**1. Fall:**</u> I hat eine Gewinnstrategie $\sigma$ in $G^*(Y)$.
Wir schätzen die Spielzüge von I gemäß $\sigma$ nach oben ab und konstruieren damit eine club-Menge, die Teilmenge von $Y$ ist.

Die Abbildung $\varphi : \omega_1 \to \omega_1$ werde wie folgt definiert:
Für $\eta \in \omega_1$ sei

$$\varphi(\eta) = \min\left\{\beta \in \omega_1;\ \ \forall\ s \in \bigcup_{n\in\omega} \eta^{2n}:\quad \sigma(s) < \beta\ \right\}.$$

D.h. wenn in einer Partie von $G^*(Y)$ die bisherigen Züge beider Spieler Elemente von $\eta$ sind, dann ist die Antwort von I gemäß $\sigma$ ein Element von $\varphi(\eta)$, und $\varphi(\eta)$ ist die kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft.

<u>Beh. 1:</u> $\varphi(\eta)$ ist für alle $\eta \in \omega_1$ selbst ein Element von $\omega_1$.
Beweis: Wegen $|\eta| = \aleph_0$ ist $\eta^{2n}$ für jedes $n \in \omega$ abzählbar und somit auch $\{\sigma(s);\ s \in \eta^{2n}\} \subseteq \omega_1$.
Mit der Regularität von $\aleph_1$ in ZSF + AD (vgl. Korollar 2.11), folgt:

$$\bigcup_{n\in\omega}\{\sigma(s);\ s \in \eta^{2n}\} < \aleph_1.$$

Da also das Supremum aller möglichen Antworten von I gemäß $\sigma$ echt kleiner als $\aleph_1$ ist, gilt das auch für $\varphi(\eta)$.

Sei

$$C := \{\lambda \in \omega_1;\ \lambda \text{ ist Limesordinalzahl und } \forall\ \eta < \lambda:\ \varphi(\eta) < \lambda\}$$

<u>Beh. 2:</u> $C$ ist club-Menge.
Beweis: Dazu genügt es zu zeigen: $D := \{\alpha \in \omega_1;\ \forall\ \eta < \alpha:\quad \varphi(\eta) < \alpha\}$ ist club.

Denn $C = \{\alpha \in \omega_1;\ \alpha \text{ ist Limesordinalzahlzahl}\} \cap D$ ist somit als Schnitt zweier club-Mengen selbst club-Menge.

- $D$ ist abgeschlossen in $\omega_1$:

  Sei $\gamma \in \omega_1$ mit $D \cap \gamma \neq \varnothing$. Sei $\delta := \bigcup(\gamma \cap D)$.

  Dann ist $\delta \in \omega_1$, und zu jedem $\eta \in \delta$ existiert ein $\alpha \in \gamma \cap D$ mit $\eta \in \alpha$.

  Da $\alpha \in D$ ist, folgt $\varphi(\eta) \in \alpha$, also $\varphi(\eta) \in \delta$. Damit gilt $\delta \in D$.

- $D$ ist konfinal in $\omega_1$ :

  Sei $\gamma \in \omega_1$. Dann ist zu zeigen: $\exists\, \delta \in D$ mit $\gamma \leq \delta$.

  Setze $\gamma_0 := \gamma$, $\gamma_{n+1} := \bigcup\limits_{\alpha \in \gamma_n} (\varphi(\alpha) + 1)$ für $n \in \omega$.

  Setze $\delta := \bigcup\limits_{n \in \omega} \gamma_n$. Damit ist $\gamma = \gamma_0 \leq \delta$. Da $\omega_1$ regulär ist, folgt induktiv $\gamma_n \in \omega_1$ für alle $n \in \omega$ und damit ist auch

  $\delta = \bigcup\limits_{n \in \omega} \gamma_n \in \omega_1$.

  Es gilt: $\delta \in D$, denn für $\eta \in \delta$ existiert ein $n \in \omega$ mit $\eta \in \gamma_n$ und somit ist $\varphi(\eta) < \varphi(\eta) + 1 \leq \gamma_{n+1} \leq \delta$.

<u>Beh. 3:</u> Es ist $C \subseteq Y$.
Beweis: Wir konstruieren für jedes $\lambda \in C$ eine Partie in $G^*(Y)$, in der I gemäß $\sigma$ spielt und deren Spielzüge $\lambda$ als Supremum haben.
Sei $\lambda \in C$ . Damit ist $\lambda$ eine abzählbare Limesordinalzahl, und es existiert eine Folge $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \lambda$ mit $\lambda = \bigcup\limits_{i \in \omega} \eta_i$. Wir betrachten das Spiel $\sigma * \langle \eta_i;\ i \in \omega \rangle$.
Die Züge von II sind kleiner als $\lambda$, und wegen $\lambda \in C$ folgt induktiv, daß auch die Züge von I kleiner als $\lambda$ sind. Da die $\eta_i$ konfinal in $\lambda$ liegen, ist $\lambda$ das Supremum der Züge.
$\sigma$ ist eine Gewinnstrategie für I, also ist $\lambda \in Y$.

Insgesamt folgt aus $C \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$ und $C \subseteq Y$: $Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$.

<u>**2. Fall:**</u> II hat eine Gewinnstrategie $\tau$ in $G^*(Y)$.
Analog dem ersten Fall definiert man eine Abbildung $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ durch:

$$\psi(\eta) := \min \left\{ \beta \in \omega_1;\ \forall s \in \bigcup_{n \in \omega} \eta^{2n+1} :\ \tau(s) < \beta \right\}.$$

Mit Hilfe von $\psi$ erhalten wir wieder eine club-Menge $C'$:

$$C' := \{\lambda \in \omega_1;\ \lambda \text{ ist Limesordinalzahl und } \forall\, \eta < \lambda :\ \psi(\eta) < \lambda\}\,.$$

Es gilt $C' \subseteq \omega_1 - Y$, denn:
Sei $\lambda \in C'$. Dann existiert eine Folge $\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \lambda$ mit $\lambda = \bigcup_{i \in \omega} \eta_i$.
Und im Spiel $\langle \eta_i;\ i \in \omega\rangle * \tau$ ist das Supremum der Züge gleich $\lambda$. Da $\tau$ eine Gewinnstrategie für II ist, folgt: $\lambda \in \omega_1 - Y$.
Insgesamt folgt: $\omega_1 - Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$.

Wäre das Spiel $G^*(Y)$ determiniert, so hätten wir den gewünschten $\aleph_1$-vollständigen Ultrafilter auf $\aleph_1$ und wären fertig.
Auf dieses Spiel können wir AD aber nicht anwenden. In $G^*(Y)$ sind die Züge der Spieler Elemente von $\omega_1$, und AD liefert nur die Determiniertheit von Spielen, deren Züge Elemente von $\omega$ sind.

Solovay gelang es, das Spiel $G^*(Y)$ so zu modifizieren, daß beide Spieler natürliche Zahlen spielen, aber im Endeffekt trotzdem abzählbare Ordinalzahlen gewählt haben.
Die Idee ist, das Verfahren aus Abschnitt 1.2 anzuwenden, welches jedem $x \in \omega^\omega$ eine binäre Relation $E_x \subseteq \omega \times \omega$ zuordnet.
$E_x$ muß keine Wohlordnung auf $\omega$ sein. Allerdings existiert nach Hilfssatz 1.11 zu jedem $\alpha$ mit $\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$ ein $x \in \omega^\omega$, so daß $E_x$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha$ ist.

Somit können wir nun zu $Y \subseteq \omega_1$ das Spiel $G(Y)$ definieren:
Beide Spieler wählen natürliche Zahlen $x(i) \in \omega$ $(i \in \omega)$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $x(0)$ | | $x(2)$ | | $x(4)$ | | $\ldots$ |
| **II** | | $x(1)$ | | $x(3)$ | | $x(5)$ | $\ldots$ |

Es seien $x_{\mathrm{I}} := \langle x(2i);\ i \in \omega\rangle$ und $x_{\mathrm{II}} := \langle x(2i+1);\ i \in \omega\rangle$ die Folgen, die I und II konstruieren.
Durch

$$(x_{\mathrm{A}})_i(m) = x_{\mathrm{A}}(\langle\!\langle i, m\rangle\!\rangle) \text{ für alle } i, m \in \omega \text{ und } A \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$$

kodieren $x_{\mathrm{I}}$ und $x_{\mathrm{II}}$ Folgen von Relationen $\left\langle E_{(x_{\mathrm{I}})_i};\ i \in \omega\right\rangle$ und $\left\langle E_{(x_{\mathrm{II}})_i};\ i \in \omega\right\rangle$.

Die $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ bzw. $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ müssen keine Wohlordnungen sein, wenn sie es aber sind, so ist ihr Ordnungstyp eine abzählbare Ordinalzahl.
Falls ein $i \in \omega$ existiert, für das $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ oder $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ keine Wohlordnung ist, so gewinnt II, falls für das kleinste solche $i$ gilt, daß $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ keine Wohlordnung ist, ansonsten gewinnt I.
Wenn nur Wohlordnungen gespielt werden, so gewinnt I, falls

$$\sup\Big(\{\ \|(x_{\mathrm{I}})_i\|\ ;\ i \in \omega\} \cup \{\ \|(x_{\mathrm{II}})_i\|\ ;\ i \in \omega\}\Big) \in Y,$$

ansonsten gewinnt II.

Damit haben wir das Ziel erreicht. AD liefert die Determiniertheit von $G(Y)$. Trotzdem können wir dieses Spiel auffassen als eines, in dem I und II abzählbare Ordinalzahlen spielen (falls alle gespielten Relationen Wohlordnungen sind), und I gewinnt, wenn deren Supremum ein Element von der Menge $Y$ ist.

Mit Hilfe der Determiniertheit von $G(Y)$ und der in der Beweisidee dargestellten Argumentation soll nun gezeigt werden, daß $Y$ oder $\omega_1 - Y$ im Filter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ liegt.

**1. Fall:** Spieler I hat eine Gewinnstrategie $\sigma$ in $G(Y)$.
Wir wollen $\varphi : \omega_1 \to \omega_1$ wie oben definieren.
Damit das möglich ist, muß folgende Bedingung erfüllt sein:

> Sei $\eta \in \omega_1$ beliebig, und I spiele gemäß seiner Gewinnstrategie $\sigma$. Dann existiert eine Ordinalzahl $\beta \in \omega_1$ mit der Eigenschaft:
>
> Falls für ein $n \in \omega$ gilt, daß für alle $i$ mit $0 \leq i < n$ die $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ und die $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ sämtlich Wohlordnungen mit Ordnungstypen $< \eta$ sind, so ist die Antwort $E_{(x_{\mathrm{I}})_n}$ von I eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $< \beta$.

Wir lassen zu, daß die $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ und $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ für $i < n$ Wohlordnungen mit Ordnungstypen $\leq \eta$ sind und zeigen die etwas stärkere Aussage:
Für alle $\eta \in \omega_1$ existiert ein $\beta \in \omega_1$, so daß für alle $n \in \omega$ und für alle $y \in \omega^\omega$ gilt:

(∗) Wenn für alle $i < n$ gilt, daß $((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i \in \mathrm{WO}$ mit $\|((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i\| \leq \eta$ und $(y)_i = ((\sigma * y)_{\mathrm{II}})_i \in \mathrm{WO}$ mit $\|(y)_i\| \leq \eta$, dann ist $((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_n \in \mathrm{WO}$ mit $\|\,((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_n\,\| < \beta$.

Diese obere Schranke $\beta$ können wir mit Korollar 4.27 bekommen. Dazu müssen wir zeigen, daß die möglichen Antworten $E_{(x_{\mathrm{I}})_n}$ von Spieler I eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Teilmenge von WO bilden.
Sei also $\eta \in \omega_1$.
Setze $A_\eta := \{z \in \omega^\omega;\ z = ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_n$ mit $n \in \omega\ \&\ y \in \omega^\omega\ \&\ \forall\, i < n$
$\big(\ ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i \in \mathrm{WO}_\eta\ \&\ (y)_i \in \mathrm{WO}_\eta\big)\ \}$.

<u>Beh.:</u> $A_\eta$ ist $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge.
Beweis:
Nach Proposition 4.23 ist $\mathrm{WO}_\eta$ eine $\Sigma^1_1(a)$-Menge für ein $a \in \omega^\omega$.
Nach der Definition von $A_\eta$ gilt:

$$z \in A_\eta \ \Leftrightarrow\ \exists^0 n\ \exists^1 y\ \ \forall\, i < n \\ \big(\ ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i \in \mathrm{WO}_\eta\ \ \wedge\ \ (y)_i \in \mathrm{WO}_\eta\ \ \wedge\ \ z = ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_n\ \big).$$

„$z = ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_n$" ist $\Delta^0_0(\sigma)$, dabei wird $\sigma$ als Element von $\omega^\omega$ aufgefaßt. Weil $\mathrm{WO}_\eta \in \Sigma^1_1(a)$ ist, ist $\{y \in \omega^\omega;\ ((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i \in \mathrm{WO}_\eta\}$ eine $\Sigma^1_1(b)$-Menge für ein $b \in \omega^\omega$, welches $a$ und $\sigma$ kodiert. Die beschränkten Quantoren sowie der $\exists^1$-Quantor erhöhen nach Korollar 4.15 die Komplexität nicht. Deshalb ist $A_\eta$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge.

Für jedes $z \in A_\eta$ gilt: $E_z$ ist eine der von Spieler I gemäß $\sigma$ gespielten Relationen. Da $\sigma$ eine Gewinnstrategie ist, muß $E_z$ eine Wohlordnung sein.
Damit gilt: $A_\eta \subseteq \mathrm{WO}$ und $A_\eta$ ist eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge.
Aus Korollar 4.27 folgt: $\exists\, \gamma \in \omega_1$ mit $A_\eta \subseteq \mathrm{WO}_\gamma$.
Setzt man $\beta := \gamma + 1$ , so gilt $\forall\, z \in A_\eta :\ E_z$ ist WO mit $\|z\| < \beta$.
Damit ist zu $\eta$ ein $\beta \in \omega_1$ gefunden, so daß $(*)$ für alle $n \in \omega$ und für alle $y \in \omega^\omega$ gilt.

Wir können also die Abbildung $\varphi : \omega_1 \to \omega_1$ so definieren, daß sie jedem $\eta \in \omega_1$ das kleinste derartige $\beta$ zuordnet.

Man beachte, daß für $\eta < \omega$ gilt: $\varphi(\eta) = 0$.
Denn wenn $E_z$ für ein $z \in \omega^\omega$ eine Wohlordnung von $\omega$ ist, so ist ihr Ordnungstyp eine abzählbare Ordinalzahl, d.h. er kann nicht kleiner als $\omega$ sein. Also erfüllt jedes $\beta \in \omega_1$ die Bedingung $(*)$.

Es sei $C := \{\lambda \in \omega_1;\ \lambda$ ist Limesordinalzahl und $\forall \eta < \lambda :\ \varphi(\eta) < \lambda\}$.
Wie bei der Betrachtung des Spiels $G^*(Y)$ folgt, daß $C$ eine club-Menge ist und ebenso gilt:

<u>Beh.:</u> $C \subseteq Y$.
Beweis: Sei $\lambda \in C$ und $\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \lambda$ eine abzählbare Folge von Ordinalzahlen mit $\lambda = \bigcup_{i \in \omega} \eta_i$.
Für jedes $i \in \omega$ sei $A_i := \{y \in \omega^\omega;\ y \in \mathrm{WO}\ \&\ \|y\| = \eta_i\} \subseteq \omega^\omega$.
Wir wählen mit $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ für jedes $i \in \omega$ ein $y_i \in A_i$. Damit haben wir dann zu jedem $\eta_i$ eine Wohlordnung $E_{y_i}$ mit $\|y_i\| = \eta_i$.
Nach 1.8 existiert ein $y \in \omega^\omega$, welches sämtliche $y_i$ kodiert.

Für eine Partie, in der I nach seiner Gewinnstrategie $\sigma$ und II diese Folge $y$ spielt, gilt:
Die $E_{(y)_i}$ sind für alle $i \in \omega$ Wohlordnungen vom Ordnungstyp $\eta_i < \lambda$ und, wegen $\lambda \in C$, sieht man induktiv, daß auch die $E_{((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i}$ für alle $i \in \omega$ Wohlordnungen mit Ordnungstypen kleiner als $\lambda$ sind. Da $\lambda$ das Supremum der $\eta_i$ $(i \in \omega)$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
&\sup(\{\ \|(x_{\mathrm{I}})_i\|\ ;\ i \in \omega\} \cup \{\ \|(x_{\mathrm{II}})_i\|\ ;\ i \in \omega\}) \\
&\qquad = \sup\big(\{\ \|((\sigma * y)_{\mathrm{I}})_i\|\ ;\ i \in \omega\} \cup \{\ \|(y)_i\|\ ;\ i \in \omega\}\big) \\
&\qquad = \lambda\,.
\end{aligned}$$

Da $\sigma$ eine Gewinnstrategie ist, gilt $\lambda \in Y$.
Insgesamt folgt also: $Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$.

<u>**2. Fall**</u> Spieler II besitzt eine Gewinnstrategie $\tau$ in $G(Y)$.
Um eine Abbildung $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ wie in der Beweisidee angegeben definieren zu können, muß folgendes erfüllt sein:

> Wenn $\eta \in \omega_1$ ist und II gemäß seiner Gewinnstrategie $\tau$ spielt, so existiert eine Ordinalzahl $\beta \in \omega_1$ mit der Eigenschaft:
>
> Für alle $n \in \omega$ gilt: Falls die $E_{(x_{\mathrm{I}})_i}$ für alle $i \leq n$ und die $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ für alle $i < n$ Wohlordnungen mit Ordnungstypen $< \eta$ sind, so ist die Antwort $E_{(x_{\mathrm{II}})_n}$ von II gemäß $\tau$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $< \beta$.

Wie im ersten Fall folgt, daß ein solches $\beta \in \omega_1$ existiert.
Somit kann man $\psi$ wie gewünscht definieren. Mit $C'$ wie in der Beweisidee folgt dann mit der dortigen Argumentation:

$C' \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$ und $C' \subseteq \omega_1 - Y$.
Insgesamt gilt also: $\omega_1 - Y \in \mathcal{C}_{\aleph_1}$.

Damit haben wir gezeigt, daß der club-Filter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ ein Ultrafilter ist.

□

## 5.2 Martins Filter $\mathcal{M}$ und ein zweiter Beweis

1968 publizierte Donald Martin [23] ein Resultat, mit dem sich die Meßbarkeit von $\aleph_1$ auf eine andere Art beweisen läßt. Er definierte einen Filter $\mathcal{M}$ auf einer Partition von $\omega^\omega$ und zeigte, daß dieser unter der Annahme von AD ein Ultrafilter ist.
Der Ultrafilter auf $\aleph_1$, der die Meßbarkeit liefert, kann dann als Bildfilter $f_*(\mathcal{M})$ unter einer geeigneten Abbildung $f$ konstruiert werden.
Für die Darstellung des Filters $\mathcal{M}$ in diesem Abschnitt vgl. Martin [23] und Kanamori [14, Prop. 28.4].

**Definition 5.2** Seien $x, y \in \omega^\omega$.
$x \leq_{\Delta^1_1} y \;:\Longleftrightarrow\; x \in \Delta^1_1(y)$
$x \equiv_{\Delta^1_1} y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq_{\Delta^1_1} y$ und $y \leq_{\Delta^1_1} x$
Die Relation $\leq_{\Delta^1_1}$ ist reflexiv und transitiv und wird $\Delta^1_1$-*Reduzibilität* genannt. Die Relation $\equiv_{\Delta^1_1}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind $[x]_{\Delta^1_1} := \{z \in \omega^\omega;\; z \equiv_{\Delta^1_1} x\}$ und mit $\mathcal{D}$ bezeichnen wir die Quotientenmenge $\omega^\omega/_{\equiv_{\Delta^1_1}} \;=\; \{[x]_{\Delta^1_1};\; x \in \omega^\omega\}$.

**Bemerkung 5.3**

(i) Für jedes $y \in \omega^\omega$ gilt: Die Menge $\{x \in \omega^\omega;\; x \leq_{\Delta^1_1} y\}$ ist abzählbar.

(ii) Die Relation $\leq_{\Delta^1_1}$ ist nach oben gerichtet, d.h. zu $x, y \in \omega^\omega$ existiert ein $z \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta^1_1} z$ und $y \leq_{\Delta^1_1} z$.

**Beweis:** (i) Jedes $x \in \omega^\omega$, welches $\Delta^1_1$-reduzibel in $y$ ist, wird durch eine Formel bestimmt. Diese besteht aus endlich vielen Variablen für Elemente von $\omega$, aus endlich vielen Variablen für Elemente von $\omega^\omega$, aus $+$, $\times$, exp, der Abbildung $f$ und den Konstanten 0 und 1. Außerdem enthält sie endlich viele Terme der

Gestalt $x(m)$ für $m \in \omega$ sowie die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\forall^0$, $\exists^0$, $\forall^1$, $\exists^1$ und $\in$. Da nur abzählbar viele endliche Teilmengen einer abzählbaren Menge existieren, gibt es nur abzählbar viele solche Formeln und damit nur abzählbar viele Vorgänger von $y$ bezüglich $\leq_{\Delta^1_1}$.

(ii) Sei $z = x * y \in \omega^\omega$. Dann ist $x = \langle z(2i);\ i \in \omega \rangle$ und $y = \langle z(2i+1);\ i \in \omega \rangle$, d.h. $x$ und $y$ sind beide $\Delta^1_1$-reduzibel in $z$.

□

**Bemerkung:** Die folgenden Ausführungen lassen sich mit jeder reflexiven und transitiven Relation $R$ auf $\omega^\omega$ durchführen, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $R$ ist eine nach oben gerichtete Relation.

(ii) $\forall x \in \omega^\omega : \ \{y \in \omega^\omega;\ y\, R\, x\}$ ist abzählbar.

(iii) $\forall x, y \in \omega^\omega \ (x\, R\, y \Rightarrow (x * y)\, R\, y \ \ \& \ \ y\, R\, (x * y))$.

Martin definiert in seinem Beweis den Filter $\mathcal{M}$ mit Hilfe einer Relation, die *Turing-Reduzibilität* genannt wird und aus der Rekursionstheorie stammt.

Mit Hilfe der Relation $\leq_{\Delta^1_1}$ kann man auf $\mathcal{D} = \{[x]_{\Delta^1_1};\ x \in \omega^\omega\}$ wie folgt eine Ordnung erklären.

**Definition 5.4**

- Seien $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$

$$d_1 \leq d_2 \ :\Longleftrightarrow \ \exists\, x, y \in \omega^\omega \ \Big(d_1 = [x]_{\Delta^1_1} \ \ \& \ \ d_2 = [y]_{\Delta^1_1} \ \ \& \ \ x \leq_{\Delta^1_1} y\Big)$$

  Die Relation ist offensichtlich wohldefiniert. Sie ist jedoch keine lineare Ordnung, da $\leq_{\Delta^1_1}$ nicht linear ist.

- Der Filter $\mathcal{M}$ soll nun gerade aus den Teilmengen von $\mathcal{D}$ bestehen, die ein Endsegment bezüglich $\leq$ enthalten. Für $X \subseteq \mathcal{D}$ sei also:

$$X \in \mathcal{M} \ :\Longleftrightarrow \ \exists\, d_0 \in \mathcal{D} \ \big(\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq d\} \subseteq X\big).$$

**Proposition 5.5** [ZSF + AC$_\omega(\omega^\omega)$]
*$\mathcal{M}$ ist ein $\aleph_1$-vollständiger Filter auf $\mathcal{D}$, und $\mathcal{M}$ ist kein Hauptfilter.*

**Beweis:**

- Offensichtlich gelten:

  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$, $\varnothing \notin \mathcal{M}$ und $\forall\, X \in \mathcal{M}: \ \forall\, Y \ \big(X \subseteq Y \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow Y \in \mathcal{M}\big)$.

- Seien $X, Y \in \mathcal{M}$. Dann existieren $d_X, d_Y$ mit $\{d \in \mathcal{D};\ d_X \leq d\} \subseteq X$ und $\{d \in \mathcal{D};\ d_Y \leq d\} \subseteq Y$. Wähle $x, y \in \omega^\omega$ mit $d_X = [x]_{\Delta^1_1}$, $d_Y = [y]_{\Delta^1_1}$ und ein $z \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta^1_1} z$ und $y \leq_{\Delta^1_1} z$. (Ein solches $z$ existiert nach Bemerkung 5.3.) Es folgt $d_X = [x]_{\Delta^1_1} \leq [z]_{\Delta^1_1}$ und $d_Y = [y]_{\Delta^1_1} \leq [z]_{\Delta^1_1}$, also

  $$\{d \in \mathcal{D};\ [z]_{\Delta^1_1} \leq d\} \ \subseteq \ X \cap Y.$$

  Damit ist $X \cap Y \in \mathcal{M}$.

- $\mathcal{M}$ ist kein Hauptfilter.

  Beweis: Angenommen doch, dann existiert ein $X_0 \in \mathcal{M}$, so daß $\forall\, X \in \mathcal{M}$ gilt: $X_0 \subseteq X$. D.h. es existiert $d_0 \in \mathcal{D}$ mit:

  $$\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq d\} \ \subseteq \ X_0 \ \subseteq \ X \qquad \forall X \in \mathcal{M}.$$

  Es folgt:

  $$\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq d\} \ \subseteq \ \{d \in \mathcal{D};\ d' \leq d\} \qquad \forall d' \in \mathcal{D},$$

  also $d' \leq d_0 \quad \forall d' \in \mathcal{D}$.

  Sei $x \in \omega^\omega$ mit $[x]_{\Delta^1_1} = d_0$. Dann folgt für alle $y \in \omega^\omega: \quad [y]_{\Delta^1_1} \leq [x]_{\Delta^1_1}$, also $y \leq_{\Delta^1_1} x$.

  Dies ist ein Widerspruch dazu, daß nach 5.3 die Menge der Vorgänger von $x$ bezüglich $\leq_{\Delta^1_1}$ abzählbar ist!

- $\mathcal{M}$ ist $\aleph_1$-vollständig.

  Beweis: Sei $\{X_n;\ n \in \omega\} \subseteq \mathcal{M}$. Für jedes $n \in \omega$ wählen wir mit $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$ ein $x_n \in \omega^\omega$ mit

  $$\{d \in \mathcal{D};\ [x_n]_{\Delta^1_1} \leq d\} \subseteq X_n\ .$$

  Sei $x \in \omega^\omega$ so definiert, daß es alle diese $x_n$ kodiert. Dann ist $x_n \leq_{\Delta^1_1} x$ für alle $n \in \omega^\omega$ und es folgt:

  $$\begin{aligned} \{d \in \mathcal{D};\ [x]_{\Delta^1_1} \leq d\} \ &\subseteq \ \{d \in \mathcal{D};\ [x_n]_{\Delta^1_1} \leq d\} \\ &\subseteq \ X_n, \end{aligned}$$

und somit: $\{d \in \mathcal{D};\ [x]_{\Delta^1_1} \leq d\} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} X_n$ , d.h. $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{M}$.

$\square$

In ZSF + AC ist beweisbar, daß $\mathcal{M}$ kein Ultrafilter ist (vgl. Kanamori [14, S.386]). Unter Annahme von AD jedoch, so zeigte Martin, ist $\mathcal{M}$ ein Ultrafilter.

**Proposition 5.6** (Martin, 1968) [ZSF + AD]
*$\mathcal{M}$ ist ein Ultrafilter auf $\mathcal{D}$.*

**Beweis:** Sei $X \subseteq \mathcal{D}$. Es ist zu zeigen: $X \in \mathcal{M}$ oder $\mathcal{D} - X \in \mathcal{M}$.
Wegen $d \subseteq \omega^\omega$ für alle $d \in \mathcal{D}$ ist $\bigcup X \subseteq \omega^\omega$.

Wir betrachten das Spiel $G(\bigcup X)$ . Beide Spieler spielen Elemente von $\omega$, und Spieler I gewinnt, falls die resultierende Partie $\langle x(i);\ i \in \omega\rangle \in \bigcup X$ ist.

$$\begin{array}{lllllll} \textbf{I} & x(0) & & x(2) & & x(4) & \ldots \\ \textbf{II} & & x(1) & & x(3) & & x(5) \ \ldots \end{array}$$

Wegen AD ist das Spiel determiniert.

**<u>Fall 1:</u>** Spieler I hat eine Gewinnstrategie $\sigma$ im Spiel $G(\bigcup X)$ .
Wir zeigen $X \in \mathcal{M}$. Dazu bestimmen wir ein geeignetes $d_0 \in \mathcal{D}$ und zeigen, daß alle $d \in \mathcal{D}$ mit $d \geq d_0$ in $X$ liegen.

Wie in 2.3 fassen wir $\sigma$ als ein Element von $\omega^\omega$ auf und setzen $d_0 = [\sigma]_{\Delta^1_1}$.
Da $\sigma$ eine Gewinnstrategie ist, liegt jede Partie, in der I nach $\sigma$ spielt, in $\bigcup X \subseteq \mathcal{D}$, also liegt ihre $\Delta^1_1$-Äquivalenzklasse in $X$ selbst. Wir müssen somit für jedes $d \geq d_0$ eine Partie angeben, in der I nach $\sigma$ spielt und deren $\Delta^1_1$-Äquivalenzklasse gleich $d$ ist.

Sei $d \in \mathcal{D}$ mit $d_0 \leq d$ . Dann existiert $y \in \omega^\omega$ mit $d = [y]_{\Delta^1_1}$.
Es folgt $\sigma \leq_{\Delta^1_1} y$ und somit auch $\sigma * y \ \leq_{\Delta^1_1} \ y$.
Da $y = (\sigma * y)_{\mathrm{II}}$, ist $y$ auch $\Delta^1_1$-reduzibel in $\sigma * y$, also $y \ \equiv_{\Delta^1_1} \ \sigma * y$ .
Somit gilt:

$$[\sigma * y]_{\Delta^1_1} \ = \ [y]_{\Delta^1_1} \ = \ d.$$

Da $\sigma$ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist, folgt $\sigma * y \in \bigcup X$ und daraus

$$d = [\sigma * y]_{\Delta^1_1} \in X.$$

Denn $X$ besteht aus Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_{\Delta^1_1}$.
Insgesamt gilt $\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq d\} \subseteq X$, also $X \in \mathcal{M}$.

<u>**Fall 2:**</u> Spieler II hat eine Gewinnstrategie $\tau$ im Spiel $G(\bigcup X)$ .
Für $d \geq [\tau]_{\Delta^1_1}$ und für $x \in d$ folgt wie im ersten Fall $[x * \tau]_{\Delta^1_1} = d$.
Da $\tau$ eine Gewinnstrategie für II ist, gilt $x * \tau \in \omega^\omega - \bigcup X$, also
$d = [x * \tau]_{\Delta^1_1} \in \mathcal{D} - X$ und somit $\{d \in \mathcal{D};\ [\tau]_{\Delta^1_1} \leq d\} \subseteq \mathcal{D} - X$.

□

**Korollar 5.7** [ZSF + AD]
*$\mathcal{M}$ ist ein $\aleph_1$−vollständiger, freier Ultrafilter auf $\mathcal{D}$.*

□

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, zwei weitere Beweise von Satz 5.1 anzugeben.
Im ersten definiere ich eine Funktion $f : \mathcal{D} \to \aleph_1$ mit Hilfe von Kodierungen duch Elemente von $\omega^\omega$.

**2. Beweis von 5.1:**
Wegen Bemerkung 5.3 ist jeder $\Delta^1_1$-Grad $d \in \mathcal{D}$ eine abzählbare Teilmenge von $\omega^\omega$.
Die Abbildung $f$ sei wie folgt definiert:

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \omega_1 : d \mapsto \sup_{x \in d}\{\ \|x\|_{\mathrm{wo}},\ \|x_{\mathrm{I}}\|_{\mathrm{wo}},\ \|x_{\mathrm{II}}\|_{\mathrm{wo}}\ \}.$$

Dabei sei für $x \in \omega^\omega$

$$\|x\|_{\mathrm{wo}} = \begin{cases} \|x\| & \text{, falls } x \in \mathrm{WO} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $d \in \mathcal{D}$ ist $f(d) \in \omega_1$. Denn $|d| = \aleph_0$, $\|x\|_{\mathrm{wo}} \in \omega_1$ und $\aleph_1$ ist regulär unter der Annahme von AD (vgl. 2.11).

<u>Beh. 1:</u> Sei $d \in \mathcal{D}$ und $\alpha \in \omega_1$. Dann existiert ein $y \in \mathrm{WO}$ mit $\|y\|_{\mathrm{wo}} > \alpha$, so daß für alle $x \in d$ gilt: $y \not\leq_{\Delta^1_1} x$.

Beweis: Sonst wäre

$$\begin{aligned}\{y \in \omega^\omega;\ y \in \text{WO und } \|y\|_{\text{wo}} > \alpha\} &\subseteq \{y \in \omega^\omega;\ \exists x \in d : y \leq_{\Delta^1_1} x\}\\ &= \{y \in \omega^\omega;\ y \leq_{\Delta^1_1} x_0\}\end{aligned}$$

für ein fest gewähltes $x_0 \in d$.

Aber $\{y \in \omega^\omega;\ y \in$ WO und $\|y\|_{\text{wo}} > \alpha\} \subseteq \omega_1$ ist überabzählbar, denn $\forall \beta \in \omega_1\ \ \exists\, y \in \omega^\omega :\ y \in$ WO mit $\|y\|_{\text{wo}} = \beta$ (vgl. 1.11) und $\{\beta \in \omega_1;\ \beta > \alpha\}$ ist überabzählbar.

Doch $\{y \in \omega^\omega;\ y \leq_{\Delta^1_1} x_0\}$ ist nach 5.3 eine abzählbare Menge, Widerspruch!

Wir betrachten nun den Bildfilter $f_*(\mathcal{M}) := \{X \subseteq \omega_1;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{M}\}$.
Nach Proposition 3.15 und Korollar 5.7 ist $f_*(\mathcal{M})$ ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter auf $\aleph_1$.

<u>Beh. 2:</u> $f_*(\mathcal{M})$ ist frei.
Wir zeigen:
$\forall\ \alpha \in \omega_1 :\quad \{\alpha\} \notin f_*(\mathcal{M})$
Daraus folgt mit Proposition 3.5 die Behauptung.

Dazu zeigen wir, daß $f$ auf keinem Endsegment von $\mathcal{D}$ und somit auch auf keinem Filterelement von $\mathcal{M}$ konstant ist (vgl. Bemerkung 3.16).
Angenommen es existiert ein $d_0 \in \mathcal{D}$, so daß für alle $d \in \mathcal{D}$ mit $d_0 \leq d$ gilt $f(d) = \alpha$. $(\star)$
Sei $d \in \mathcal{D}$ mit $d_0 \leq d$ und $x \in d$.
Wegen Beh. 1 existiert ein $y \in$ WO mit $\|y\|_{\text{wo}} > \alpha$, so daß gilt: $y \not\leq_{\Delta^1_1} x$.
Sei $z = x * y \in \omega^\omega$. Dann gilt nach 5.3: $x \leq_{\Delta^1_1} z$ und $y \leq_{\Delta^1_1} z$.
Dann ist $z \not\leq_{\Delta^1_1} x$, denn sonst würde aus $y \leq_{\Delta^1_1} z$ auch $y \leq_{\Delta^1_1} x$ folgen.
Es gilt also: $d_0 \leq d = [x]_{\Delta^1_1} \leq [z]_{\Delta^1_1}$, aber $f([z]_{\Delta^1_1}) \geq \|z_{\text{II}}\|_{\text{wo}} = \|y\|_{\text{wo}} > \alpha$.
Dies ist ein Widerspruch zu $(\star)$.

$\square$

## 5.3 Das Modell L[A] und ein dritter Beweis

Der dritte Beweis von Satz 5.1 beruht auf Kanamori [14, Theorem 28.2 Second Proof]. Er benutzt Kenntnisse über das Modell $\mathbf{L}[A]$, die Klasse der konstruktiblen Mengen relativ zu einer Menge $A$.

Dies ist eine Verallgemeinerung des konstruktiblen Universums von Kurt Gödel (vgl. Felgner [6, §7-13]).
Ich möchte nun $\mathbf{L}[A]$ kurz einführen und zwei Resultate beweisen, die ich später benötige.
Als Grundlage dienten Jech [13, §15] und Moschovakis [24, 8F].

Sei $U$ eine transitive Menge und $A$ eine beliebige Menge.
$\mathrm{Def}_A(U)$ sei die Menge aller Teilmengen von $U$, die in der Struktur $\langle U, \in, A \cap U \rangle$ definierbar sind. Die Sprache $\mathcal{L}'_{\mathrm{ZSF}}$ der Struktur $\langle U, \in, A \cap U \rangle$ ist dabei die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ der Mengenlehre erweitert um das Prädikat $A$. Damit gilt für jedes $x$:

$$x \in \mathrm{Def}_A(U) \iff x \subseteq U \ \ \& \ \text{Es gibt eine Formel } \varphi(v_0, \dots, v_n) \text{ in der Sprache } \mathcal{L}'_{\mathrm{ZSF}} \text{ und } x_0 \dots x_{n-1} \in U \text{, so daß für alle } y \text{ gilt :} \ \big(y \in x \ \Leftrightarrow \ \langle U, \in, A \cap U \rangle \ \vDash \ \varphi[x_0, \dots x_{n-1}, y]\big) \ .$$

Die Klasse der *relativ zu A konstruktiblen Mengen* wird mittels transfiniter Rekursion wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_0[A] = \varnothing, \\
&\mathbf{L}_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}_A(\mathbf{L}_\alpha[A]), \text{ für alle } \alpha \in \Omega, \\
&\mathbf{L}_\lambda[A] = \bigcup_{\alpha \in \lambda} \mathbf{L}_\alpha[A] \quad \text{, falls } \lambda \text{ Limesordinalzahl,} \\
&\mathbf{L}[A] = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathbf{L}_\alpha[A].
\end{aligned}$$

**Satz 5.8** *Sei A eine beliebige Menge.*

*(i)* $\mathbf{L}[A]$ *ist ein inneres Modell von* ZSF, *d.h.* $\mathbf{L}[A]$ *ist ein* $\in$*-transitives Modell von* ZSF *und enthält alle Ordinalzahlen.*

*(ii)* $\mathbf{L}[A]$ *besitzt eine mit Hilfe von A definierbare Wohlordnung. Insbesondere gilt das Auswahlaxiom in* $\mathbf{L}[A]$.

*(iii) Falls* $A \subseteq \omega$, *so gilt in* $\mathbf{L}[A]$ *auch* GCH.

*(iv) Wenn* $\mathfrak{M}$ *ein inneres Modell von* ZSF *ist, so daß* $A \cap \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$, *dann ist* $\mathbf{L}[A \cap \mathfrak{M}]^{\mathfrak{M}} = \mathbf{L}[A]$.

*(v)* $A \cap \mathbf{L}[A] = B \cap \mathbf{L}[A] \implies \mathbf{L}[A] = \mathbf{L}[B]$.

*(vi)* $A \subseteq \mathbf{L} \implies A \in \mathbf{L}[A]$.

**Beweis:** siehe beispielsweise Jech [13, Theorem 37] und Moschovakis [24, 8F. 20-22]. Der Beweis von $(i)$–$(iii)$ ist dem der entsprechenden Aussagen für $\mathbf{L}$ sehr ähnlich.

**Bemerkung 5.9**

- Für $a \in \omega^\omega$ gilt wegen Eigenschaft *(vi)*: $a \in \mathbf{L}[a]$.
- Aus $(iv)$ folgt: Wenn $\mathfrak{M}$ ein inneres Modell ist, das die Menge $A$ enthält, so ist $\mathbf{L}[A]^{\mathfrak{M}} = \mathbf{L}[A]$, also liegt $\mathbf{L}[A]$ in $\mathfrak{M}$.

  Daraus folgt sofort: $A \in \mathbf{L}[B] \implies \mathbf{L}[A] \subseteq \mathbf{L}[B]$.

**Hilfssatz 5.10** *Sei $\alpha$ eine abzählbare Ordinalzahl. Dann existiert eine Teilmenge $A \subseteq \omega$, so daß $\alpha$ in $\mathbf{L}[A]$ abzählbar ist.*

**Beweis:** Für $\alpha \in \omega$ gilt die Behauptung für jede Teilmenge $A \subseteq \omega$.
Sei also oBdA $\omega \leq \alpha < \omega_1$. Wir wählen eine Wohlordnung $R \subseteq \omega \times \omega$ von $\omega$ vom Ordnungstyp $\alpha$. Da $R \subseteq \mathbf{L}$ ist, folgt wegen Satz 5.8$(v)$: $R \in \mathbf{L}[R]$. Also ist $\alpha$ in $\mathbf{L}[R]$ abzählbar.
Sei $A$ das Bild der Menge $R$ unter der Bijektion $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ von $\omega \times \omega$ auf $\omega$, d.h.

$$A := \{\langle\!\langle n, m \rangle\!\rangle \in \omega;\ \langle n, m \rangle \in R\}.$$

Da $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ durch eine $\Delta_0^0$-Formel definiert ist, folgt $A \in \mathbf{L}[R]$. Wegen $A \subseteq \omega$ ist $A \in \mathbf{L}[A]$, also folgt auch $R \in \mathbf{L}[A]$.
Insgesamt gilt, daß $\alpha$ in $\mathbf{L}[R] = \mathbf{L}[A]$ abzählbar ist.

□

**Satz 5.11** *Wenn $\aleph_1$ regulär ist, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(i)* $\forall a \in \omega^\omega: \ \aleph_1^{\mathbf{L}[a]} < \aleph_1$

*(ii)* $\forall a \in \omega^\omega: \ \aleph_1$ *ist stark–unerreichbar in* $\mathbf{L}[a]$.

**Beweis:** Vgl. Kanamori [14, Prop.11.5]
„$(i) \Rightarrow (ii)$“ Angenommen es existiert ein $a \in \omega^\omega$ mit der Eigenschaft, daß $\aleph_1$ in $\mathbf{L}[a]$ nicht stark–unerreichbar ist.

Dann ist $\aleph_1$ keine Limeskardinalzahl in $\mathbf{L}[a]$. Denn $\aleph_1$ ist in $\mathbf{L}[a]$ regulär, weil jede Kardinalzahl, die in $\mathbf{V}$ regulär ist, auch in jedem transitiven ZSF-Modell regulär ist[1]. Als reguläre Limeskardinalzahl wäre $\aleph_1$ in $\mathbf{L}[a]$ schwach–unerreichbar. Doch da GCH in $\mathbf{L}[a]$ gilt, wäre damit $\aleph_1$ in $\mathbf{L}[a]$ stark–unerreichbar im Widerspruch zur Annahme!
Es folgt, daß $\aleph_1$ in $\mathbf{L}[a]$ der Nachfolger einer Kardinahlzahl $\alpha < \aleph_1$ ist. Da $\alpha$ (in $\mathbf{V}$) abzählbar ist, existiert nach obigem Hilfssatz 5.10 eine Teilmenge von $\omega$ und damit auch ein $b \in \omega^\omega$, so daß $\alpha$ auch in $\mathbf{L}[b]$ abzählbar ist.
Sei $c := a * b$. Dann ist $\mathbf{L}[b] \subseteq \mathbf{L}[c]$ und $\alpha$ ist in $\mathbf{L}[c]$ ebenfalls abzählbar.
Weil auch $\mathbf{L}[a] \subseteq \mathbf{L}[c]$ gilt, liegen in $\mathbf{L}[c]$ keine Kardinalzahlen zwischen $\alpha$ und $\aleph_1$. Denn angenommen es existiert eine Kardinalzahl $\beta$ in $\mathbf{L}[c]$ mit $\alpha < \beta < \aleph_1$. Dann ist $\beta$ auch in $\mathbf{L}[a]$ eine Kardinalzahl[2] im Widerspruch zur Aussage, daß $\aleph_1$ der Nachfolger von $\alpha$ in $\mathbf{L}[a]$ ist!
Also wäre $\aleph_1^{\mathbf{L}[a]} = \aleph_1$.
„$(ii) \Rightarrow (i)$" Angenommen es existiert ein $a \in \omega^\omega$ mit $\aleph_1^{\mathbf{L}[a]} \geq \aleph_1$, d.h. $\aleph_1^{\mathbf{L}[a]} = \aleph_1$. Dann ist $\aleph_1$ in $\mathbf{L}[a]$ offensichtlich nicht stark–unerreichbar.

□

**Bemerkung 5.12** Ein Satz, der auf Kurt Gödel zurückgeht, besagt:
Wenn $\aleph_1^{\mathbf{L}[a]} = \aleph_1$ für ein $a \in \omega^\omega$ ist, so existiert eine überabzählbare $\Pi^1_1(a)$-Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält (vgl. Kanamori [14, Theorem 13.12]).
Da das Axiom der Determiniertheit, wie in 2.5 bemerkt wurde, impliziert, daß jede Teilmenge von $\omega^\omega$ abzählbar ist oder eine perfekte Menge enthält, folgt damit:

$$\text{ZSF} + \text{AD} \;\vdash\; \forall\, a \in \omega^\omega : \; \aleph_1^{\mathbf{L}[a]} < \aleph_1.$$

Mit obigem Resultat gilt also:

$$\text{ZSF} + \text{AD} \;\vdash\; \forall\, a \in \omega^\omega : \; \aleph_1 \text{ ist stark–unerreichbar in } \mathbf{L}[a].$$

Es kann nun der dritte Beweis für Satz 5.1 ausgeführt werden.

[1] Die Aussage „$\kappa$ ist regulär" ist $\Pi_1^{\text{ZSF}}$.
[2] Auch die Aussage „$\kappa$ ist eine Kardinalzahl" ist $\Pi_1^{\text{ZSF}}$.

**3. Beweis von 5.1:** Sei

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \omega_1, \quad [x]_{\Delta^1_1} \mapsto {\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]}.$$

Beh. 1: f ist wohldefiniert.

Beweis: Seien $x, y \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta^1_1} y$ .

Dann ist $x$ durch eine Formel der Logik erster Stufe im Modell $\mathcal{A}^2(y)$ definiert und somit ist $x \in \mathbf{L}[y]$. Nach Bemerkung 5.9 folgt:

$$\mathbf{L}[x] \subseteq \mathbf{L}[y]$$

und somit

$${\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} \leq {\aleph_1}^{\mathbf{L}[y]}.$$

Für $x, y \in \omega^\omega$ mit $x \equiv_{\Delta^1_1} y$ ist also

$$f\left([x]_{\Delta^1_1}\right) = {\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} = {\aleph_1}^{\mathbf{L}[y]} = f\left([y]_{\Delta^1_1}\right).$$

Ferner gilt unter der Annahme von AD nach Bemerkung 5.12

$${\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} < \aleph_1.$$

Nun betrachten wir wieder den Bildfilter $f_*(\mathcal{M}) := \{X \subseteq \omega_1;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{M}\}$. Nach Proposition 3.15 ist $f_*(\mathcal{M})$ ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter auf $\aleph_1$.

Beh. 2: $f_*(\mathcal{M})$ ist frei.

Wir zeigen wieder durch Widerspruch, daß $f$ auf keinem Endsegment von $\mathcal{D}$ konstant ist. Mit Bemerkung 3.16 und Proposition 3.5 folgt die Behauptung.

Angenommen es existiert ein $d_0 \in \mathcal{D}$, so daß für alle $d \in \mathcal{D}$ mit $d_0 \leq d$ gilt $f(d) = \alpha$.

Sei $x \in d_0$.

Dann gilt für jedes $y \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta^1_1} y$:

$${\aleph_1}^{\mathbf{L}[y]} = f\left([y]_{\Delta^1_1}\right) = \alpha = f\left([x]_{\Delta^1_1}\right) = {\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} < \aleph_1. \quad (\star)$$

Nach Hilfssatz 5.10 existiert ein $z \in \omega^\omega$ mit ${\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} < {\aleph_1}^{\mathbf{L}[z]}$. Nun wählen wir gemäß Bemerkung 5.3 ein $y \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta^1_1} y$ und $z \leq_{\Delta^1_1} y$. Dann folgt:

$${\aleph_1}^{\mathbf{L}[x]} < {\aleph_1}^{\mathbf{L}[z]} \leq {\aleph_1}^{\mathbf{L}[y]},$$

im Widerspruch zu $(\star)$!

Somit ist $f_*(\mathcal{M})$ ein $\aleph_1$-vollständiger, freier Ultrafilter auf $\aleph_1$.

$\square$

Ursprünglich wurde der Filter $\mathcal{M}$ von Martin zu anderen Zwecken konstruiert. Er bewies, daß $\mathcal{M}$ unter Annahme von AD ein Ultrafilter ist, um mit dem dazugehörenden Maß[3] das Reduktions–Prinzip[4] für $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$- und für $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$-Mengen $(n \in \omega)$ zu zeigen.

Für $\mathcal{M}$ wurden bald mehr Verwendungsmöglichkeiten gefunden. So läßt sich beispielsweise mit seiner Hilfe auch die Meßbarkeit von $\aleph_2$ beweisen, und ein Resultat von Kenneth Kunen impliziert, daß jeder $\aleph_1$-vollständige, freie Ultrafilter auf $\aleph_1$ als Bildfilter $f_*(\mathcal{M})$ für eine geeigntete Funktion $f : \mathcal{D} \to \omega_1$ dargestellt werden kann (vgl. Kanamori [14, Theorem 28.20]).

In dieser Hinsicht ist die zweite Beweisidee für die Meßbarkeit von $\aleph_1$ mittels $\mathcal{M}$ allgemeiner als die von Solovay, den club–Filter zu betrachten, zumal sich nach Bemerkung 3.20 für $\kappa > \aleph_1$ in ZSF zeigen läßt, daß $\mathcal{C}_\kappa$ kein Ultrafilter ist.

Für die Beweise mit Hilfe der Filters $\mathcal{M}$ hingegen genügt es, eine Abbildung $f : \mathcal{D} \to \omega_1$ zu nehmen, die auf keinem Endsegment von $\mathcal{D}$ konstant ist, und der so erhaltene Filter hat die gewünschten Eigenschaften.

Beim Vergleich der drei dargestellten Beweise fällt auf, daß die beiden Filter $\mathcal{C}_{\aleph_1}$ und $\mathcal{M}$ bereits in ZSF frei und $\aleph_1$-vollständig sind.

AD geht ein, um die Ultrafiltereigenschaft zu beweisen. Für eine beliebige Menge $X$ wird jeweils gezeigt, daß ein Element $E$ des Erzeugendensystems des betreffenden Filters existiert, so daß die Menge $X$ oder deren Komplement $E$ enthält. Dazu wird ein Spiel definiert, dessen Gewinnmenge $X$ bzw. $\bigcup X$ ist und für das aufgrund von AD einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. Damit ist von Anfang an entschieden, ob alle Partien, in denen der eine Spieler nach seiner Gewinnstrategie spielt, in $X$ bzw. $\bigcup X$ oder im jeweiligen Komplement liegen. Jedes Element von $E$ wird dann als Partie gemäß dieser Gewinnstrategie konstruiert.

Dieses Verfahren ist beim Filter $\mathcal{M}$ einfacher zu realisieren als bei $\mathcal{C}_{\aleph_1}$, denn $\mathcal{M}$ ist bereits ein Filter auf $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\omega^\omega)$. Der club–Filter ist jedoch auf $\aleph_1$ definiert, was den Umweg über die Kodierungen erforderlich macht.

Mit dem Auswahlaxiom läßt sich zeigen, daß eine meßbare Kardinalzahl auch

---

[3]Für $A \subseteq \mathcal{D}$ ist $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } A \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

[4]Eine Klasse $\Gamma$ von Mengen genügt dem *Reduktions–Prinzip*, falls für alle $A, B \in \Gamma$ Mengen $A', B' \in \Gamma$ existieren, so daß gilt: $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, $A' \cup B' = A \cup B$ und $A' \cap B' = \varnothing$.

stark-unerreichbar sein muß. Diese Implikation ist offensichtlich unter Annahme von AD falsch, da $\aleph_1$ zwar, wie bewiesen, meßbar aber keine Limeskardinalzahl ist.

Ist die Aussage, daß $\aleph_1$ eine meßbare Kardinalzahl ist, ein unerwartetes Resultat? Sicherlich dann, wenn die Erwartungen an die Ergebnisse geknüpft sind, die man unter Verwendung des Auswahlaxioms erhält. Denn schließlich gilt, daß unter der Annahme von AC meßbare Kardinalzahlen stark–unerreichbar, also von „exorbitanter Größe“ sein müssen, sofern sie existieren.
Ohne AC zeigt dieser Beweis lediglich noch, daß eine meßbare Kardinalzahl $\kappa$ regulär ist und für alle $\lambda < \kappa$ gilt: $\kappa \not\leq 2^\lambda$ (vgl. Jech [13, Bemerkung zu Theorem 90]).
Daß dieser Sachverhalt unter der Annahme von AD für $\aleph_1$ gilt, bemerkte Mycielski bereits 1964 [25]. Er publizierte den Satz, daß mit AD keine überabzählbare und wohlgeordnete Menge reeller Zahlen existiert, und dies heißt ja gerade $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$.
Offensichtlich ist durch das Weglassen des Auswahlaxioms ein Wegfall der notwendigen Größenanforderungen gegeben.
Thomas Jech hat 1968 bewiesen, daß die Konsistenz von „ZSF + AC + Es existiert eine meßbare Kardinalzahl“ die Konsistenz von „ZSF + $\aleph_1$ ist meßbar“ impliziert (vgl. Jech [12] ).
**Satz** (Jech, 1968)
*Sei $\mathfrak{M}$ ein transitives Modell von* „ZSF + AC + $\exists\kappa$ *($\kappa$ meßbar)“.*
*Dann existiert ein transitives Modell $\mathfrak{N}$ von* ZSF *mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, so daß*

$$\mathfrak{N} \models \aleph_1 \textit{ ist meßbar.}$$

In diesem Licht betrachtet ist die Meßbarkeit von $\aleph_1$ nicht überraschender als die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl überhaupt.

**Bemerkung:** Man kann sogar beweisen, daß die Aussagen „ZSF + AC + $\exists\kappa$ ($\kappa$ meßbar)“ und „ZSF + $\aleph_1$ ist meßbar“ äquikonsistent sind.
Somit folgt aus Satz 5.1 daß die Konsistenzstärke des Axioms der Determiniertheit mindestens so groß ist wie die einer meßbaren Kardinalzahl.
Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt wurde, kennt man heute die genaue Konsistenzstärke von AD, und diese ist weitaus stärker.

# Kapitel 6

# Forcing

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die Forcing–Methode gegeben werden, die ich für die Beweise zweier Resultate in Kapitel 7 benötige. Da die Technik des Forcings eigentlich nicht Thema dieser Arbeit ist, werde ich eine Reihe von grundlegenden Resultaten zitieren, ohne sie hier zu beweisen.
Forcing wurde von Paul Cohen Anfang der 60er Jahre erfunden und später von Solovay und vielen anderen weiterentwickelt.
Cohen zeigte damit zunächst die Unabhängigkeit der Kontinuums–Hypothese von ZSF + AC, und in der Folgezeit wurden mit Hilfe von Forcing zahllose Konsistenzresultate bewiesen.

Die Methode liefert eine konkrete Prozedur, um zu einem Modell der Mengenlehre ein anderes Modell zu konstruieren, welches das erste erweitert und in dem bestimmte erwünschte Aussagen gelten. Das erweiterte Modell ist dabei in einem gewissen Sinne minimal.
Ob eine Aussage in ihm gilt, kann im Grundmodell entschieden werden.

Die folgende Darstellung beruht auf Kunen [19, Kap. VII], Koepke [18, Kap. 25–31] und Jech [13, Kap. 3]. Dort finden sich auch die Beweise der hier nur zitierten Resultate.
Bevor ich die grundlegenden Begriffe definiere, möchte ich anhand eines Beispiels deutlich machen, wie die Begriffe interpretiert werden können:

Sei $\mathfrak{M}$ ein transitives Modell von ZSF + AC. Wir möchten ein transitives Modell $\mathfrak{N}$ von ZSF + AC konstruieren, welches $\mathfrak{M}$ erweitert und in dem $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$ abzählbar ist.

$\mathfrak{N}$ muß somit ein Surjektion $g:\ \omega \to \aleph_1^{\mathfrak{M}}$ enthalten.
Für jedes $n \in \omega$ ist $g{\restriction}n \in \left(\omega_1^{\mathfrak{M}}\right)^n$, also eine endliche Folge von (in $\mathfrak{M}$) abzählbaren Ordinalzahlen.
Da in $\mathfrak{M}$ das Paarmengen- und das Summenaxiom gelten, liegt die Menge $P = \bigcup\limits_{n\in\omega} \left(\omega_1^{\mathfrak{M}}\right)^n$ im Modell $\mathfrak{M}$.
Offensichtlich ist die Menge $G = \{g{\restriction}n;\ n \in \omega\}$ eine Teilmenge von $P \in \mathfrak{M}$. Aber trotzdem gilt $G \notin \mathfrak{M}$, denn $g = \bigcup G$ ist eine Surjektion von $\omega$ nach $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$.
Wenn $p \in G$ und $p = g \restriction n$ für ein $n \in \omega$ ist, so legt $p$ die ersten $n$ Werte der Funktion $g$ fest. Ein $q \in G$ mit $q \supset p$ bestimmt $g$ genauer. Wenn wir die Elemente von $P \supseteq G$ als Bedingungen an $g$ auffassen, so ist $q$ stärker als $p$.
$g = \bigcup G$ ist deshalb eine Funktion, weil für $p, q \in G$ ein $r \in G$ existiert mit $p \subset r$ und $q \subset r$.
$g$ ist deshalb eine Surjektion von $\omega$ nach $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$, weil für jedes $n \in \omega$ und jedes $\alpha \in \aleph_1^{\mathfrak{M}}$ ein $p$ und ein $q$ in $G$ existieren, so daß $n \in \mathrm{Dom}(p)$ und $\alpha \in \mathrm{Im}(q)$.

Im Licht dieser Überlegungen kann man die folgenden Definitionen betrachten:
Wir setzen von nun an ZSF + AC voraus.

## 6.1 Forcing-Halbordnungen und generische Erweiterungen

**Definition 6.1** Ein Tripel $\langle P, \leq, 1_P\rangle$ heißt *Forcing–Halbordnung*, falls gilt:

(i) $\langle P, \leq\rangle$ ist reflexiv und transitiv,

(ii) $1_P$ ist bzgl. $\leq$ das größte Element von $\langle P, \leq\rangle$.

**Definition 6.2** Sei $\langle P, \leq, 1_P\rangle$ eine Forcing–Halbordnung und $D \subseteq P$.
$D$ heißt *dicht (oder koninitial) in* $P \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, p \in P\ \exists\, q \in D:\ q \leq p$.

**Definition 6.3** $G \subseteq P$ heißt *$P$–generischer Filter* über der Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(P)$, falls

(i) $G \neq \varnothing$,

(ii) $\forall\, p, q \in P\ \big(p \in G\ \ \&\ \ p \leq q\ \Rightarrow\ q \in G\big)$,

(iii) $\forall\, p, q \in G\; \exists\, r \in G \big(r \leq p \;\;\&\;\; r \leq q\big)$,

(iv) $\forall\, D \in \mathcal{D}\; \big(D \text{ dicht in } P \;\Rightarrow\; D \cap G \neq \varnothing\big)$.

**Satz 6.4 (Existenzsatz für generische Filter)**
*Sei $\langle P, \leq, 1_P\rangle$ eine Forcing–Halbordnung und sei $\mathcal{D}$ höchstens abzählbar. Dann existiert zu jedem $p \in P$ ein $P$-generischer Filter $G$ über $\mathcal{D}$ mit $p \in G$.*

**Beweis:** Sei $p \in P$. Wir wählen eine Abzählung $\{D_n;\; n \in \omega\}$ der Elemente von $\mathcal{D}$, die dicht in $P$ sind. Sei die Folge $\langle p_n;\; n \in \omega\rangle$ aus $P$ wie folgt rekursiv definiert:
$p_0 := p$.
Ist $p_n$ definiert, so wähle $p_{n+1} \in D_n$ mit $p_{n+1} \leq p_n$. Dies ist möglich, da $D_n$ dicht in $P$ ist.
Sei $G := \{q \in P;\; \exists\, n \in \omega :\; p_n \leq q\}$. Dann ist offensichtlich $p = p_0 \in G$ und $D_n \cap G \neq \varnothing$ für jedes $n \in \omega$. Insbesondere ist $G \neq \varnothing$.
Sei nun $p \in G$ und $q \in P$ mit $p \leq q$. Dann existiert ein $n \in \omega$ mit $p_n \leq p$, d.h. $p_n \leq q$ und somit $q \in G$. Für beliebige $q_1, q_2 \in G$ existieren $n, m \in \omega$ mit $p_n \leq q_1$ und $p_m \leq q_2$. Da wir die Folge der $p_i$ absteigend konstruiert haben, können wir oBdA annehmen, daß $p_n \leq p_m$ ist. Dann gilt $p_n \leq q_1$ und $p_n \leq q_2$. Somit ist $G$ ein $P$-generischer Filter.

□

Wir gehen bei den folgenden Ausführungen von einem fest gewählten, abzählbaren, transitiven Modell $\mathfrak{M}$ von ZFS + AC, dem *Grundmodell*, aus.

Zunächst skizziere ich kurz, weshalb man die Existenz eines solchen Modells annehmen kann:
Angenommen es existiert ein Modell von ZSF+AC. Dann existiert nach dem Satz von Löwenheim–Skolem auch ein abzählbares Modell von ZSF+AC. Nach dem Isomorphiesatz von Mostowski existiert nun ein abzählbares transitives Modell von ZSF+AC. Aus der Konsistenz von ZSF+AC kann somit die Existenz eines Grundmodells gefolgert werden.
(Vgl. hierzu Felgner [6, § 13] sowie Koepke [18, Abschnitt 23.3].)

Ausgehend vom Grundmodell $\mathfrak{M}$ möchten wir ein Modell $\mathfrak{M}'$ konstruieren, in dem bestimmte Aussagen gelten sollen. Dazu müssen im allgemeinen bestimmte Objekte in $\mathfrak{M}'$ existieren, welche man dem Grundmodell hinzufügen möchte.

Dies geschieht durch Definition einer geeigneten Forcing–Halbordnung $P$ sowie einer Familie $\mathcal{D}$ von in $P$ dichten Teilmengen. In dieser Familie werden dabei die Eigenschaften, welche die neuen Objekte haben sollen, so „kodiert“, daß man sie mit Hilfe eines $P$-generischen Filters durch Anwendung mengentheoretischer Operationen (z.B. Vereinigungs- und Durchschnittsbildung) wieder „dekodieren“ kann. In unserem motivierenden Beispiel waren dies die Eigenschaften, daß jedes Element von $\omega$ im Definitionsbereich und jedes Element von $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ im Bild einer der betrachteten Funktionen aus $G$ vorkommt. Die gesuchte Surjektion erhielt man dann durch Bildung der Vereinigung über $G$.

Da unser Grundmodell $\mathfrak{M}$ abzählbar ist, existiert nach Satz 6.4 ein $P$-generischer Filter $G$ über $\mathfrak{M}$.
Die *generische Erweiterung* $\mathfrak{M}[G]$ ist nun das kleinste, abzählbare und transitive Modell von ZFS + AC mit $G \in \mathfrak{M}[G]$ und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$. Damit bekommt man nun in $\mathfrak{M}[G]$ die gewünschten Objekte und kann die „kodierten“ Eigenschaften nachweisen.
Für die explizite Definition der generischen Erweiterung wählen wir zu unserem Grundmodell $\mathfrak{M}$ eine Forcing–Halbordnung $\langle P, \leq, 1_P \rangle \in \mathfrak{M}$.
Jedes Element von $\mathfrak{M}[G]$ soll einen Namen in $\mathfrak{M}$ haben. Das Grundmodell kennt also die Namen, aber im allgemeinen nicht die zugehörigen Objekte in $\mathfrak{M}[G]$, denn dazu sind Kenntnisse über $G$ notwendig.
Kunen schreibt dazu:

> „*People living in $M$ cannot construct a $G$ which is $\mathbb{P}$-generic over $M$. They may believe on faith that there exists a being to whom their universe, $M$, is countable. Such a being will have a generic $G$ and an $f_G = \bigcup G$. The people in $M$ do not know what $G$ and $f_G$ are but they have names for them,...*“ [19, Kap. VII, § 3, S.193].

**Definition 6.5**

(i) $\dot{x} \in \mathfrak{M}$ heißt *P-Name*, falls $\dot{x}$ eine Relation ist und für alle $\langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}$ gilt: $\dot{y}$ ist ein $P$-Name und $p \in P$.

(ii) Sei $\dot{x}$ ein $P$-Name. Die *G-Interpretation* $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$ wird definiert durch: $\dot{x}^G \ := \ \{\dot{y}^G;\ \exists\, p \in G\ \langle \dot{y}, p \rangle \in \dot{x}\}$.

(iii) Die *generische Erweiterung von $\mathfrak{M}$ durch $P$ und $G$* sei:
$\mathfrak{M}[G] \ := \ \{\dot{x}^G;\ \dot{x} \in \mathfrak{M}\}$.

**Beispiel:** Insbesondere ist $\varnothing$ ein $P$-Name und somit auch $\{\langle\varnothing, p\rangle\}$ für jedes $p \in P$. Dann ist $\varnothing^G = \varnothing$ und $\big(\{\langle\varnothing, p\rangle\}\big)^G = \{\varnothing\}$.

**Proposition 6.6** *$\mathfrak{M}[G]$ ist transitiv.*

**Beweis:** Sei $a \in \mathfrak{M}[G]$ und $b \in a$. Dann existiert ein $P$-Name $\dot{x}$ mit $\dot{x}^G = a$. Nach Definition folgt aus $b \in \dot{x}^G$, daß ein $P$-Name $\dot{y}$ existiert und $b = \dot{y}^G$ ist. Also ist $b \in \mathfrak{M}[G]$.

□

Um $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$ zeigen zu können, muß jedem $x \in \mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{M}$-Name $\check{x}$ zugeordnet werden, so daß die $G$-Interpretation von $\check{x}$ gerade $x$ ist.

**Definition 6.7** Wir definieren rekursiv den *kanonischen Namen $\check{x}$ für $x \in \mathfrak{M}$*:

$$\check{x} \ := \ \{\langle\check{y}, 1_P\rangle;\ y \in x\}.$$

Dann ist das so definierte $\check{x}$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$ ein $P$-Name.

**Proposition 6.8** *Sei $x \in \mathfrak{M}$. Dann ist $\check{x}^G \ = \ x$.*

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \check{x}^G &= \{\dot{y}^G;\ \exists p \in G :\ \langle\dot{y}, p\rangle \in \check{x}\} = \{\check{y}^G;\ \langle\check{y}, 1_P\rangle \in \check{x}\} = \{\check{y}^G;\ y \in x\} \\ &= \{y;\ y \in x\} = x. \end{aligned}$$

□

**Korollar 6.9** $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$

□

Damit $G \in \mathfrak{M}[G]$ gilt, benötigen wir einen $P$-Namen für generische Filter.

**Definition 6.10** Der *kanonische Name für $P$-generische Filter über $P$* sei:

$$\Gamma := \{\langle \check{p}, p\rangle;\ p \in P\}.$$

Der nächste Satz besagt, daß jeder $P$-generische Filter $G$ gleich der $G$-Interpretation von $\Gamma$ ist, also $\Gamma$ in diesem Sinne einen kanonischen Namen darstellt. Damit folgt auch $G \in \mathfrak{M}[G]$.

**Satz 6.11** *(i)* $\Gamma \in \mathfrak{M}$,

*(ii) Sei $G$ ein $P$-generischer Filter über $\mathfrak{M}$. Dann ist $\Gamma^G = G$, insbesondere ist $G \in \mathfrak{M}[G]$.*

**Beweis:**
*(i)* $\Gamma := \{y;\ \exists p \in P:\ y = \langle \check{p}, p\rangle\} = \{y \in \mathfrak{M};\ \exists p \in P:\ y = \langle \check{p}, p\rangle\} \in \mathfrak{M}$, weil $\mathfrak{M}$ ein Modell von ZSF und $P \in \mathfrak{M}$ ist.
*(ii)* $\Gamma^G := \{\dot{y}^G;\ \exists p \in G:\ \langle \dot{y}, p\rangle \in \Gamma\} = \{\dot{y}^G;\ \exists p \in G:\ \dot{y} = \check{p}\}$
$= \{\check{p}^G;\ p \in G\} = \{p;\ p \in G\} = G.$

□

## 6.2 Die Forcing–Relation $\Vdash$

Wir haben nun ausgehend vom Grundmodell $\mathfrak{M}$ mit Hilfe einer Forcing–Halbordnung $\langle P, \in, 1_P\rangle$ und eines generischen Filters $G$ die generische Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ konstruiert.
Unser Ziel ist, kontrollieren zu können, welche Aussagen in $\mathfrak{M}[G]$ gelten. Dies hängt im allgemeinen vom Filter $G$ ab. Allerdings ist $G$ in der Regel nicht im Modell $\mathfrak{M}$, und es ist sinnvoll, die nötigen Begriffe unabhängig von einem konkreten $G$ zu definieren. Dies macht man, indem man sich anstatt auf ein bestimmtes $G$ auf alle $P$-generischen Filter über $\mathfrak{M}$ bezieht.
Wir sagen, daß ein $p \in P$ eine gegebene Formel $\varphi$ erzwingt, wenn für jeden generischen Filter $G$ mit $p \in G$ die Formel $\varphi$ im Modell $\mathfrak{M}[G]$ gilt.

**Definition 6.12** Sei $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ eine Formel der Forcing–Sprache, d.h. $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ist eine Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}$ sind $P$-Namen. Für $p \in P$ setzen wir

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \;:\Leftrightarrow\; \forall G\ \big((G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } \mathfrak{M}\ \&\ p \in G) \\ \rightarrow \varphi^{\mathfrak{M}[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big).$$

Man sagt, $p$ *erzwingt* $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.
Ist $P$ aus dem Zusammenhang bekannt, so schreiben wir $\Vdash$ anstatt $\Vdash_P$ .

Man sieht aus dieser Definition sofort einige Eigenschaften der Forcing–Relation $\Vdash$.

**Hilfssatz 6.13**

*(i)* *Wenn* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ *und* $q \leq p$, *so gilt* $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

*(ii)* *Wenn* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ *und* $p \Vdash \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{m-1})$, *so gilt* $p \Vdash \big(\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \wedge \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{m-1})\big)$.

*(iii)* *Wenn* $\langle \dot{x}, p \rangle \in \dot{y}$ *für ein* $p \in P$, *so gilt* $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

**Beweis:** $(i)$ Wenn $G$ ein $P$-generischer Filter über $\mathfrak{M}$ und $q \in G$ ist, so gilt auch $p \in G$. Somit folgt aus $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ nach Definition $\varphi^{\mathfrak{M}[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$, d.h. $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

$(ii)$ Sei $G$ ein $P$-generischer Filter über $\mathfrak{M}$ mit $p \in G$.
Aus der Voraussetzung folgt $\varphi^{\mathfrak{M}[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$ und $\psi^{\mathfrak{M}[G]}(\dot{y}_0^G, \ldots, \dot{y}_{m-1}^G)$ und daraus $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{\mathfrak{M}[G]}$ sowie $\big(\psi(\dot{y}_0^G, \ldots, \dot{y}_{m-1}^G)\big)^{\mathfrak{M}[G]}$, weil $\big(\dot{z}^G\big)^{\mathfrak{M}[G]} = \dot{z}^G$ für jeden Namen $\dot{z}$. Also gilt auch $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \wedge \psi(\dot{y}_0^G, \ldots, \dot{y}_{m-1}^G)\big)^{\mathfrak{M}[G]}$.

$(iii)$ Sei $G$ ein $P$-generischer Filter über $\mathfrak{M}$ mit $p \in G$. Nach Definition von $\dot{y}^G$ folgt aus $\langle \dot{x}, p \rangle \in \dot{y}$ und $p \in P$ direkt $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$. Damit gilt $\big(\dot{x}^G\big)^{\mathfrak{M}[G]} \in \big(\dot{y}^G\big)^{\mathfrak{M}[G]}$, d.h. $\big(\dot{x}^G \in \dot{y}^G\big)^{\mathfrak{M}[G]}$ und somit $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

$\square$

In der Definition der Forcing-Relation wird nicht mehr auf ein konkretes $G$ Bezug genommen, denn es werden alle generischen Filter betrachtet. Diese liegen jedoch im allgemeinen nicht in $\mathfrak{M}$. Für viele Anwendungen von Forcing ist aber bedeutend, daß im Grundmodell $\mathfrak{M}$ entschieden werden kann, welche Aussagen in der generischen Erweiterung gelten.
Das ist in der Tat möglich, denn man kann eine Relation $\Vdash^*$ definieren, so daß für jede Formel $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ gilt:

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \iff \big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^{\mathfrak{M}}.$$

Damit ist in $\mathfrak{M}$ entscheidbar, ob $p$ die Formel $\varphi$ erzwingt, und somit das Ziel erreicht.
Die Relation $\Vdash^*$ wird rekursiv über den Formelaufbau definiert. Da diese Definition sehr umfangreich ist und man, nachdem obige Äquivalenz bewiesen wurde, die konkrete Definition im allgemeinen nicht mehr benötigt, möchte ich hier auf ihre Angabe verzichten und verweise auf die Literatur (siehe Kunen [19, Theorem 3.6] bzw. Koepke [18, Satz 28.23]).
Das zentrale Resultat lautet:

**Satz 6.14 (Forcing–Theorem)** *Sei $\mathfrak{M}$ ein Grundmodell und $\langle P, \leq, 1_P\rangle$ eine Forcing–Halbordnung für $\mathfrak{M}$. Ferner sei $\varphi(v_0, \dots, v_{n-1})$ eine Formel und $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}$ P-Namen. Dann gilt:*

*(i)* $\forall\, p \in P\ \big(p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}))^{\mathfrak{M}}\big)$.

*(ii) Ist $G$ ein generischer Filter über $\mathfrak{M}$, so gilt*
$\big((\varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G))^{\mathfrak{M}[G]} \longleftrightarrow \exists\, p \in G\ \ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)$.

**Bemerkung:** Das Forcing–Theorem besagt, daß
– in der generischen Erweiterung von $\mathfrak{M}$ eine Aussage genau dann gilt, wenn sie von einem Element der zugehörigen generischen Filter erzwungen wird, und
– in $\mathfrak{M}$ entschieden werden kann, ob eine Eigenschaft erzwungen wird oder nicht.
Nun ist es möglich, zu zeigen, daß $\mathfrak{M}[G]$ tatsächlich ein Modell der Mengenlehre ist. Wir formulieren ein zusammenfassendes Resultat.

**Satz 6.15 (Satz über generische Erweiterungen)** *Sei $\mathfrak{M}$ ein Grundmodell, $\langle P, \leq, 1_P\rangle$ eine Forcing–Halbordnung für $\mathfrak{M}$ und $G$ ein P-generischer Filter über $\mathfrak{M}$. Dann gilt*

*(i)* $\mathfrak{M}[G]$ *ist ein transitives Modell von* ZSF + AC.

*(ii)* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$ *und* $G \in \mathfrak{M}[G]$.

*(iii)* $\mathfrak{M}[G] \cap \Omega = \mathfrak{M} \cap \Omega$.

*(iv) Wenn $\mathfrak{N}$ ein transitives Modell von* ZSF *ist, so daß $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ und $G \in \mathfrak{N}$ gilt, so ist $\mathfrak{M}[G] \subseteq \mathfrak{N}$.*

Behauptung (ii) und ein Teil von (i) sind bereits in 6.6, 6.9 und 6.11 bewiesen worden, für den Beweis der restlichen Behauptungen verweisen wir auf Kunen [19, VII 2.9, 2.15, 4.2] bzw. Koepke [18, 27.17, 29.8, 29.10, 29.11].

## 6.3 Ein Spezialfall von Cohen–Forcing

In dieser Arbeit verwende ich einen Spezialfall des sogenannten Cohen-Forcings, welches dadurch gekennzeichnet ist, daß man als Forcing–Halbordnung die Menge der partiellen Funktionen von einer Menge A in eine Menge B, deren Definitionsbereich endlich ist, betrachtet. Damit konstruierte Paul Cohen 1963/64 ein Modell der Mengenlehre, in dem ZSF + AC + ¬ CH gilt.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Grundmodell und $\alpha$ eine Ordinalzahl in $\mathfrak{M}$ mit $\omega < \alpha$.
Wir setzen

$$\begin{aligned} P \;:=\; & \{f \in \mathfrak{M};\; f \text{ ist Funktion } \;\&\; \mathrm{Dom}(f) \subseteq \omega \;\&\; \mathrm{Im}(f) \subseteq \alpha \;\& \\ & \quad \mathrm{Dom}(f) \text{ ist endlich.}\} \end{aligned}$$

$P$ ist durch $\supseteq$ reflexiv und transitiv geordnet. Also ist $\langle P, \supseteq, \varnothing \rangle$ eine Forcing–Halbordnung. Aus Absolutheitsgründen ist $P \in \mathfrak{M}$.

**Hilfssatz 6.16** *Ist $G$ ein $P$-generischer Filter über $\mathfrak{M}$, so ist $g = \bigcup G$ eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$.*

**Beweis:** $g$ ist Funktion: Seien $p, q \in G$. Dann existiert ein $r \in G$ mit $r \supseteq p$ und $r \supseteq q$. Damit gilt $p(i) = q(i)$ für alle $i \in \mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q)$.

$\mathrm{Dom}(g) = \omega$ : Sei $n \in \omega$. Betrachte $D_n := \{p \in P;\; n \in \mathrm{Dom}(p)\}$. $D_n$ ist dicht in $P$. Denn für jedes $p \in P$ ist $\mathrm{Dom}(p)$ endlich, d.h. es gibt ein $q \in D_n$ mit $q \supseteq p$. Es folgt: $D_n \cap G \neq \varnothing$, also existiert ein $p \in G$ mit $n \in \mathrm{Dom}(p)$. Somit gilt $n \in \mathrm{Dom}(g)$.

$\mathrm{Im}(g) = \alpha$ : Sei $\beta \in \alpha$. Betrachte $D_\beta := \{p \in P;\; \beta \in \mathrm{Im}(p)\}$. $D_\beta$ ist dicht in $P$. Also gilt: $D_\beta \cap G \neq \varnothing$. Somit existiert ein $p \in G$ mit $\beta \in \mathrm{Im}(p)$ und es gilt $\beta \in \mathrm{Im}(g)$.

□

**Bemerkung:** Wenn $G$ ein generischer Filter auf dieser Forcing-Halbordnung ist, dann wird eine beliebige Ordinalzahl in $\mathfrak{M}$ zu einer abzählbaren Ordinalzahl in $\mathfrak{M}[G]$. Denn unter ZSF + AC ist für $\alpha \in \Omega$ die Aussage $\alpha < \omega_1$ äquivalent dazu, daß eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$ existiert.
Somit kann man mit dieser Methode jede Kardinalzahl in $\mathfrak{M}$ zu eine abzählbaren Ordinalzahl kollabieren lassen.

Es ist oft wichtig, zu wissen, was mit den anderen Kardinalzahlen bei dieser Art von Forcing passiert.
Da $\mathfrak{M}[G] \supseteq \mathfrak{M}$ für jeden generischen Filter $G$ gilt, ist jede Kardinalzahl in $\mathfrak{M}[G]$ auch eine in $\mathfrak{M}$.[1] Wie oben bemerkt wurde, gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht. Die hier betrachtete Forcing–Halbordnung hat jedoch die Eigenschaft, daß alle Kardinalzahlen in $\mathfrak{M}$ größer als $|\alpha|$ auch Kardinalzahlen in $\mathfrak{M}[G]$ sind.

**Definition 6.17** Seien $\mathfrak{M}$ und $P$ wir oben, und sei $\kappa$ eine Kardinalzahl in $\mathfrak{M}$.
$P$ *bewahrt Kardinalitäten* $\geq \kappa$, falls für jeden $P$-generischen Filter $G$ über $\mathfrak{M}$ und alle $\delta \in \Omega \cap \mathfrak{M}$ mit $\delta \geq \kappa$ gilt:
$\delta$ ist eine Kardinalzahl in $\mathfrak{M} \iff \delta$ ist eine Kardinalzahl in $\mathfrak{M}[G]$.

**Satz 6.18** *Seien $\mathfrak{M}$ und $P$ wie oben.*
*$P$ bewahrt Kardinalitäten $\geq \ \kappa := \left(|\alpha|^+\right)^{\mathfrak{M}}$.*

**Beweis:** siehe Kunen [19, VII 6.9, 6.10] bzw. Koepke [18, 31.1].

**Bemerkung:** Man kann Forcing auch ausgehend von einem Grundmodell $\mathfrak{M}$ definieren, das eine echte Klasse ist. $\mathfrak{M}$ muß dazu ein transitives Modell von ZSF + AC sein. Falls $\mathfrak{M}$ nicht abzählbar ist, muß die Existenz oder zumindest die Konsistenz von generischen Filtern zu einer gegebenen Forcing–Halbordnung bewiesen werden, bevor die generische Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ erklärt werden kann. Sämtliche Begriffe können dann analog definiert werden, und es gelten die gleichen Resultate (vgl. Kunen [19, S. 232 ff.] und Jech [13, S. 175 ff.]).

[1] „$\kappa$ ist Kardinalzahl“ ist $\Pi_1^{\mathrm{ZSF}}$.

# Kapitel 7

# AD impliziert die Meßbarkeit von $\aleph_2$

Kurz nachdem Donald Martin seinen Filter $\mathcal{M}$ und den Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_1$ vorgestellt hatte, zeigte Solovay ebenfalls mit Hilfe des Filters $\mathcal{M}$, daß auch $\aleph_2$ unter der Annahme von AD eine meßbare Kardinalzahl ist.
Bevor ich den Beweis im zweiten Abschnitt ausführe, benötige ich zwei Resultate. Zum einen wird im zweiten Abschnitt ein Satz bewiesen, der auch von Solovay stammt und besagt, daß unter der Annahme von AD jede Teilmenge von $\omega_1$ konstruktibel relativ zu einem Element von $\omega_1$ ist.
Zum anderen wird im Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_2$ benutzt, daß in ZSF + AD sowohl $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ als auch $\aleph_2^{\mathbf{V}}$ im Modell $\mathbf{L}[x]$ für jedes $x \in \omega^\omega$ stark–unerreichbare Kardinalzahlen sind. Damit befasse ich mich im nächsten Abschnitt.

## 7.1 AD und Sharps

Wir werden ausnutzen, daß wir bereits die Meßbarkeit von $\aleph_1$ gezeigt haben, indem wir die Existenz sogenannter Sharps verwenden (vgl. dazu Kanamori [14, § 9]).
Man kann sich Sharps als reelle Zahlen vorstellen, die eine Wahrheitsdefinition für ein Modell kodieren. Die Existenz von Sharps hat weitreichende Konsequenzen auf die Modelle der Mengenlehre, Modelle mit Sharps und Modelle ohne Sharps sind sehr unterschiedlich. Insbesondere impliziert die Existenz von Sharps für ein Modell $\mathfrak{M}$, daß alle überabzählbaren Kardinalzahlen des Universums $\mathbf{V}$ in diesem

Modell stark–unerreichbar sind. Genau dies wollen wir benutzen: Die starke Unerreichbarkeit von $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ und $\aleph_2^{\mathbf{V}}$ soll uns helfen, den Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ unter der Annahme von AD auf den Fall $\aleph_2^{\mathbf{V}}$ zu adaptieren.
In Kapitel 5 wurde gezeigt, daß AD impliziert, daß $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ meßbar ist, und aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl folgt die Existenz von $x^\#$ für alle $x \in \omega^\omega$ (vgl. Kanamori [14, 7.17, 9.19]). Es sieht so aus, als könnten wir die genannten Resultate verwenden.
Jedoch benötigt man, um aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die der Sharps zu beweisen, das Axiom der abhängigen Auswahlen (DC).
AD impliziert nun nicht notwendigerweise DC (vgl. Solovay [32]).
Aus diesem Grund werde ich für dieses Kapitel ZSF + AD + DC als Theorie zugrunde legen[1]. Ich skizziere jedoch im Anschluß an die nächste Proposition, wie man unter Ausnutzung der Stärke des Axioms AD auch in der Theorie ZSF + AD die Existenz der Sharps beweisen kann.

**Proposition 7.1** [ZSF + AD + DC]
*Für jedes $x \in \omega^\omega$ existiert $x^\#$.*

**Beweisskizze:** Wir haben gezeigt, daß $\aleph_1$ unter der Annahme von AD eine meßbare Kardinalzahl ist.
Um die Existenz der Sharps aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl $\kappa$ zu erhalten, geht man wie folgt vor:
Weil $\kappa$ meßbar ist, gibt es nach Definition einen $\kappa$-vollständigen, freien Ultrafilter auf $\kappa$. Mit Hilfe von DC zeigt man nun, daß sogar ein normaler, $\kappa$-vollständiger, freier Ultrafilter auf $\kappa$ existiert (siehe Jech [13, Lemma 28.1]).
Dann folgt mit einem Satz von Frederick Rowbottom die Partitionsrelation

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{<\omega}$$

(siehe Kanamori [14, Theorem 7.17]).
Aus dieser Partitionsrelation erhält man sofort für jedes $x \in \omega^\omega$ eine Menge von Ununterscheidbaren für das Modell $\langle \mathbf{L}_\kappa[a], \in \rangle$, d.h. die Existenz von $a^\#$.

□

[1] Alexander Kechris bewies, daß AD und AD + DC äquikonsistent sind (vgl. Kechris [16]).

**Bemerkung:** Um aus AD die Existenz der Sharps zu schließen, wird DC nur an eine Stelle benötigt, nämlich um einen normalen Ultrafilter auf der meßbaren Kardinalzahl, d.h. in diesem Fall auf $\aleph_1$, zu erhalten.
Man kann jedoch mit einem Umweg über das Modell $\mathbf{L}(\omega^\omega)$ obige Proposition ohne DC, d.h. in ZSF + AD, beweisen:
Zunächst benötige ich die Definition des Modells $\mathbf{L}(A)$ für eine beliebige Menge $A$ (vgl. Moschovakis [24, 8D, 8E, 8F]).
$\mathbf{L}(A)$ wird analog zum konstruktiblen Universum $\mathbf{L}$ konstruiert; der einzige Unterschied besteht darin, daß man nicht mit der leeren Menge sondern mit der transitiven Hülle $\mathrm{Tr}(A)$ der Menge $A$ beginnt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_0(A) = \mathrm{Tr}(A), \\
&\mathbf{L}_{\alpha+1}(A) = \mathrm{Def}(\mathbf{L}_\alpha(A)) \quad \text{, für alle } \alpha \in \Omega \\
&\mathbf{L}_\lambda(A) = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \mathbf{L}_\alpha(A) \quad \text{, falls } \lambda \text{ Limesordinalzahl} \\
&\mathbf{L}(A) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathbf{L}_\alpha(A) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Def}(\mathbf{L}_\alpha(A)) = \big\{X \subseteq \mathbf{L}_\alpha(A);\ X \text{ ist im Modell } \langle \mathbf{L}_\alpha(A), \in\rangle \text{ definierbar}\big\}$ ist (vgl. Felgner [6, § 7]).
$\mathbf{L}(A)$ ist ein transitives Modell von ZSF mit $\Omega \subseteq \mathbf{L}(A)$ und wird *konstruktibler Abschluß von* $A$ genannt.
Offensichtlich ist $A \in \mathbf{L}(A)$, und es gilt sogar, daß $\mathbf{L}(A)$ das kleinste transitive Modell von ZSF ist, das alle Ordinalzahlen und $A$ enthält.
Wenn man diese Konstruktion mit der Menge $\omega^\omega$ durchführt, erhält man das Modell $\mathbf{L}(\omega^\omega)$.

$\mathbf{L}(\omega^\omega)$ ist für Betrachtungen unter der Annahme des Axioms der Determiniertheit oftmals hilfreich. Denn wenn AD (im Universum) gilt, so gilt auch dessen Relativierung $\mathrm{AD}^{\mathbf{L}(\omega^\omega)}$ im Modell $\mathbf{L}(\omega^\omega)$.

Dies kann man leicht einsehen:
Sei $A \subseteq \omega^\omega \cap \mathbf{L}(\omega^\omega) = \omega^\omega$. Da AD gilt, existiert (in $\mathbf{V}$) eine Gewinnstrategie $\sigma$ für einen der beiden Spieler. $\sigma$ kann wie in Bemerkung 2.3 als Element von $\omega^\omega$ aufgefaßt werden. Also ist $\sigma \in \mathbf{L}(\omega^\omega)$ und offensichtlich ist $\sigma$ auch eine Gewinnstrategie in $\mathbf{L}(\omega^\omega)$. Also ist das Spiel $G(A)$ in $\mathbf{L}(\omega^\omega)$ determiniert.

Für unser Problem ist $\mathbf{L}(\omega^\omega)$ deswegen interessant, weil unter der Annahme von AD in $\mathbf{L}(\omega^\omega)$ das Axiom DC gilt. Dies zeigte Alexander Kechris 1984 [16].

Somit haben wir:

$$\mathbf{L}(\omega^\omega) \models \text{ ZFS + AD + DC}$$

und weil man aus AD die Meßbarkeit von $\aleph_1$ folgern kann, gilt:

$$\mathbf{L}(\omega^\omega) \models \text{ ZFS + DC } + \ \exists\, \kappa(\kappa \text{ meßbar}).$$

Mit der Argumentation aus Proposition 7.1 folgt somit die Existenz von $x^\#$ in $\mathbf{L}(\omega^\omega)$ für jedes $x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}(\omega^\omega) = \omega^\omega$.
Doch die Aussage „$x^\#$ existiert" ist absolut für transitive Modelle von ZSF (vgl. Kanamori [14, Theorem 14.11 und 14.16]).

Somit erhält man auch allein aus ZSF + AD die Existenz von $x^\#$ für jedes $x \in \omega^\omega$.

## 7.2 Ein Satz von Solovay

In diesem Abschnitt wird das angekündigte Resultat von Solovay bewiesen.
Für den Beweis verwenden wir ein Spiel, dessen Regeln so gemacht sind, daß Spieler I nicht gewinnen kann, und daß eine Gewinnstrategie für Spieler II uns die Behauptung liefert. Die Anwendung von AD auf das Spiel liefert dann die Behauptung.

**Satz 7.2** (Solovay) [ZSF +AD + DC]
*Sei $Y \subseteq \omega_1$. Dann existiert ein $x \in \omega^\omega$ : $\quad Y \in \mathbf{L}[x]$.*

**Beweis:** Sei oBdA $Y \cap \omega = \varnothing$.
Sonst zerlege $Y = (Y \cap \omega) \ \cup \ (Y - \omega)$. Da $Y \cap \omega \subseteq \omega$ ist, kann man $Y \cap \omega$ als ein Element $x \in \omega^\omega$ auffassen, und es gilt: $Y \cap \omega \in \mathbf{L}[x]$.
Wenn dann ein $y \in \omega^\omega$ existiert, so daß $Y - \omega \in \mathbf{L}[y]$ ist, so gilt mit $z = x * y$ $\mathbf{L}[x] \subseteq \mathbf{L}[z]$ und $\mathbf{L}[y] \subseteq \mathbf{L}[z]$.
Also ist $Y \cap \omega \in \mathbf{L}[z]$ und $Y - \omega \in \mathbf{L}[z]$ und somit $Y \in \mathbf{L}[z]$.

Wir betrachten das folgende Spiel $G_S$.
Beide Spieler wählen Elemente von $\omega$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $x(0)$ | | $x(2)$ | | $x(4)$ | $\dots$ | |
| **II** | | $x(1)$ | | $x(3)$ | | $x(5)$ | $\dots$ |

Sei $x = \langle x(i);\ i \in \omega \rangle$. Spieler II gewinnt, falls

- $E_{x_{\mathrm{I}}}$ keine Wohlordnung ist, oder

- sowohl $E_{x_{\mathrm{I}}}$ als auch die $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ für jedes $i \in \omega$ Wohlordnungen sind und eine Ordinalzahl $\beta$ existiert mit

$$\|x_{\mathrm{I}}\| < \beta \ \text{ und } \ \{\|(x_{\mathrm{II}})_i\|;\ i \in \omega\} \ = \ Y \cap \beta.$$

Ansonsten gewinnt Spieler I.
Das heißt, Spieler II muß versuchen, ein $x_{\mathrm{II}}$ zu spielen, so daß die $E_{(x_{\mathrm{II}})_i}$ alle Wohlordnungen sind, deren Ordnungstypen ein Anfangssegment von $Y$ bilden, das weiterreicht als der Ordnungstyp von $x_{\mathrm{I}}$.
Es wird sich zeigen, daß Spieler II eine Gewinnstrategie $\tau$ hat und, daß für jedes $\beta < \omega_1$ die Menge $Y \cap \beta$ mit Hilfe von $\tau$ beschrieben werden kann. Ein Forcing–Argument liefert schließlich $Y \in \mathbf{L}[\tau]$.

Wegen AD ist das Spiel $G_S$ determiniert.

<u>Beh. 1:</u> I hat keine Gewinnstrategie.
Beweis: Angenommen $\sigma$ wäre eine Gewinnstrategie für I. Dann ist $(\sigma * y)_{\mathrm{I}}$ für jedes $y \in \omega^\omega$ eine Wohlordnung auf $\omega$. Damit gilt

$$A := \{(\sigma * y)_{\mathrm{I}};\ y \in \omega^\omega\} \subseteq \mathrm{WO}.$$

$A$ ist eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge, denn:

$$x \in A \ \Leftrightarrow \ \exists^1 y \ : \ \ x = (\sigma * y)_{\mathrm{I}} \ \ ,$$

d.h. $A$ ist $\Sigma^1_1(\sigma)$ und somit $\mathbf{\Sigma}^1_1$, wobei $\sigma$ hier (wie in Bemerkung 2.3) als Element von $\omega^\omega$ aufgefaßt wird.

Nach Korollar 4.27 existiert ein $\gamma \in \omega_1$ mit $A \subseteq \mathrm{WO}_\gamma$.
Setze $\beta := \gamma + 1$. Dann folgt: $\|(\sigma * y)_{\mathrm{I}}\| < \beta \quad \forall\, y \in \omega^\omega$.
$Y \cap \beta$ ist eine abzählbare Teilmenge von $\omega_1$. Sei also $Y \cap \beta = \{\alpha_i;\ \ i \in \omega\}$.
Für jedes $i \in \omega$ ist $B_i := \{y \in \omega^\omega;\ y \in \mathrm{WO}\ \&\ \|y\| = \alpha_i\} \neq \varnothing$. Wir wählen (mit $\mathrm{AC}_\omega(\omega^\omega)$) für jedes $i \in \omega$ ein $y_i \in B_i$.
Gemäß 1.8 kann man $y \in \omega^\omega$ so definieren, daß es alle diese $y_i$ kodiert.
Dann gilt für die Partie $\sigma * y$: $E_{(y)_i}$ ist eine Wohlordnung für alle $i \in \omega$ und $\{\|(y)_i\|;\ i \in \omega\} \ = \ \{\alpha_i;\ i \in \omega\} \ = \ Y \cap \beta,$ wobei $\|(\sigma * y)_{\mathrm{I}}\| < \beta$.

Also ist $\sigma * y$ eine Partie, die II gewinnt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß $\sigma$ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist!

Folglich hat II eine Gewinnstrategie $\tau$.
Man kann $\tau$ wie in 2.3 als Element von $\omega^\omega$ auffassen.

<u>Beh. 2:</u> $Y \in \mathbf{L}[\tau]$
Beweis: Sei $z \in$ WO.
Da $\tau$ eine Gewinnstrategie für II ist, existiert ein $\beta > \|z\|$, so daß $((z * \tau)_{\mathrm{II}})_i \in$ WO für alle $i \in \omega$ und $Y \cap \beta = \{\|((z * \tau)_{\mathrm{II}})_i\|\,;\ i \in \omega\}$.
Es folgt:

$$\begin{aligned}
\|z\| \in Y \iff & \exists\, i \in \omega : \|z\| = \|((z * \tau)_{\mathrm{II}})_i\| \\
\iff & \exists\, i \in \omega \ \ \exists\, y \in \omega^\omega : y \text{ ist ein Ordnungsisomorphismus von} \\
& \langle \omega, E_z \rangle \text{ auf } \langle \omega, E_{((z*\tau)_{\mathrm{II}})_i} \rangle \\
\iff & \exists\, i \in \omega \ \ \exists\, y \in \omega^\omega \ \forall\, m \in \omega \ \forall\, n \in \omega \ \ [m \ E_z \ n \\
& \Leftrightarrow \ y(m) \ E_{((z*\tau)_{\mathrm{II}})_i} \ y(n)] \ \wedge \ \forall\, r \in \omega \ \exists\, s \in \omega \ \ y(s) = r.
\end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1^1, v_2^1) \ = \ & \exists^0 i \ \exists^1 y \ \forall^0 m \ \forall^0 n \ \big(v_1^1 \left(\langle\!\langle m, n \rangle\!\rangle\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \big((v_1^1 * v_2^1)_{\mathrm{II}}\big)_i \left(\langle\!\langle y(m), y(n) \rangle\!\rangle\right) = 0\big) \wedge \ \forall^0 r \ \exists^0 s \ \ y(s) = r \ .
\end{aligned}$$

$\varphi$ ist eine $\Sigma^1_1$-Formel.
Nun gilt für jedes $z \in$ WO:

$$\|z\| \in Y \quad \iff \quad \varphi[z, \tau].$$

Somit gilt für jedes $\alpha \in \omega_1$:

$$\alpha \in Y \iff \exists\, z \in \omega^\omega \ \big(z \in \text{ WO } \wedge \ \|z\| = \alpha \ \wedge \ \varphi[z, \tau]\big).$$

Damit ist $Y$ durch eine $\Sigma^1_2(\tau)$-Formel definiert. Diese ist nach dem Absolutheitssatz von Shoenfield absolut für transitive Modelle $\mathfrak{M}$ von ZSF mit $\omega_1 \cup \{\tau\} \subseteq \mathfrak{M}$ (vgl. Kanamori [14, Theorem 13.15]). Allerdings ist wegen 5.12 $\aleph_1^{\mathbf{L}[\tau]} < \aleph_1^{\mathbf{V}}$ und damit im allgemeinen $Y^{\mathbf{L}[\tau]} \neq Y$, d.h. $Y$ ist auf diese Weise nicht in $\mathbf{L}[\tau]$ definierbar.

Um zu zeigen, daß $Y \in \mathbf{L}[\tau]$ ist, benötigen wir ein Forcing–Argument.
Als Grundmodell wählen wir $\mathbf{L}[\tau]$ (vgl. Abschnitt 6.3).
Sei $\omega < \alpha < \omega_1^{\mathbf{V}}$ und

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \{f \in \mathbf{L}[\tau];\ f \text{ ist Funktion \& Dom}(f) \subseteq \omega \text{ \& Im}(f) \subseteq \alpha \\ &\qquad\qquad \text{Dom}(f) \text{ ist endlich}\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\langle P_\alpha, \supseteq, \varnothing \rangle$ eine Forcing–Halbordnung (vgl Abschnitt 6.3).
$P_\alpha$ ist offensichtlich abzählbar und weil $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ in $\mathbf{L}[\tau]$ stark–unerreichbar ist (vgl. 5.12), ist auch $|\mathcal{P}(P_\alpha)| < \aleph_1^{\mathbf{V}}$. Also existieren nur abzählbar viele dichte Teilmengen von $P_\alpha$ und somit nach Satz 6.4 $P_\alpha$-generische Filter über $\mathfrak{M}$.
Sei $G_\alpha$ ein solcher. Dann ist $g_\alpha := \bigcup G_\alpha$ nach Hilfssatz 6.16 eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$, d.h. $\alpha$ ist in $\big(\mathbf{L}[\tau]\big)[G_\alpha]$ abzählbar.
Sei $\dot{z}_\alpha$ ein $P_\alpha$-Name für ein Element von $\omega^\omega$, das eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha$ in jeder generischen Erweiterung von $\mathbf{L}[\tau]$ durch $P_\alpha$ kodiert.
Dabei sei $\dot{z}_\alpha$ uniform in $\alpha$ definiert. Dies ist möglich, weil für jeden $P_\alpha$-generischen Filter $G_\alpha$ über $\mathbf{L}[\tau]$ gilt, daß $\bigcup G_\alpha$ eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$ ist. Auf uniforme Weise bekommt man so in der generischen Erweiterung eine Injektion von $\alpha$ nach $\omega$ und mit Hilfe des Dedekind–Bernsteinschen Äquivalenzsatzes (vgl. Felgner [5, Satz 13.4] dann eine Bijektion zwischen $\alpha$ und $\omega$. Mit dieser kann man dann wie in 1.8 ein $z \in \omega^\omega$ definieren, das eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha$ kodiert. Mit Hilfe des kanonischen Namens $\Gamma_\alpha$ für $P_\alpha$-generische Filter kann man so einen $P_\alpha$-Namen $\dot{z}_\alpha$ angeben, der das Gewünschte leistet.

<u>Beh.:</u> Es gilt für jede Ordinalzahl $\alpha$:

$$\alpha \in Y \Longleftrightarrow \mathbf{L}[\tau] \ \models \ \big(1_{P_\alpha} \Vdash^* \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau})\big).$$

Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei $\alpha \in Y$. Aus obiger Argumentation folgt, daß $P_\alpha$-generische Filter über $\mathbf{L}[\tau]$ existieren und daß für jeden solchen $G_\alpha$ gilt: $\alpha$ ist in $\big(\mathbf{L}[\tau]\big)[G_\alpha]$ abzählbar. $\dot{z}_\alpha^{G_\alpha} \in \omega^\omega \cap \big(\mathbf{L}[\tau]\big)[G_\alpha]$ kodiert eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha$.
Weil $\varphi$ eine $\Sigma^1_1$-Formel und somit absolut zwischen $\big(\mathbf{L}[\tau]\big)[G_\alpha]$ und $\mathbf{V}$ ist, folgt daraus

$$\big(\varphi(\dot{z}_\alpha^{G_\alpha}, \tau)\big)^{(\mathbf{L}[\tau])[G_\alpha]}.$$

Dies gilt für alle $P_\alpha$-generischen Filter $G_\alpha$. Deshalb folgt nach der Definition der Forcing–Relation:

$$1_{P_\alpha} \Vdash \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau}).$$

Weil aufgrund des Forcing–Theorems 6.14 im Grundmodell entschieden werden kann, ob $1_{P_\alpha}$ eine Formel erzwingt, gilt: $\mathbf{L}[\tau] \models \big(1_{P_\alpha} \Vdash^* \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau})\big)$.

„$\Leftarrow$“ Umgekehrt folgt aus $\mathbf{L}[\tau] \models \big(1_{P_\alpha} \Vdash^* \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau})\big)$ nach dem Forcing–Theorem $1_{P_\alpha} \Vdash \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau})$.
Also gilt für jeden $P_\alpha$-generischen Filter $G_\alpha$ über $\mathbf{L}[\tau]$

$$\big(\varphi(\dot{z}_\alpha^{G_\alpha}, \tau)\big)^{(\mathbf{L}[\tau])[G_\alpha]}.$$

$\varphi$ ist absolut zwischen $\big(\mathbf{L}[\tau]\big)[G_\alpha]$ und $\mathbf{V}$. Somit gilt $\varphi(\dot{z}_\alpha^{G_\alpha}, \tau)$, wobei $\dot{z}_\alpha^{G_\alpha} \in \mathrm{WO}$ und $||\dot{z}_\alpha^{G_\alpha}|| = \alpha$ ist.
Also ist $\alpha \in Y$.

Damit ist die Behauptung beinahe gezeigt, denn diese Äquivalenz definiert $Y$ mit Hilfe von $\tau$. Allerdings wird in dieser Definition die Klasse $\mathbf{L}[\tau]$ verwendet. Wegen des ZSF–Reflexionsprinzips existiert aber eine Ordinalzahl $\beta$, so daß für alle $\alpha \in \omega_1$ gilt:

$$\alpha \in Y \Longleftrightarrow \mathbf{L}_\beta[\tau] \models \big(1_{P_\alpha} \Vdash^* \varphi(\dot{z}_\alpha, \check{\tau})\big).$$

Somit wird $Y$ durch eine ZSF–Formel mit $\tau$ als Prädikat definiert, und es folgt:

$$Y \in \mathbf{L}[\tau].$$

$\square$

Ein Spiel des obigen Typs wird auch *Solovay-Spiel* genannt. Es ist dadurch gekennzeichnet, daß beide Spieler Folgen aus $\omega^\omega$ spielen, die abzählbare Ordinalzahlen kodieren. Dabei sind die Regeln im allgemeinen so, daß Spieler I keine Gewinnstrategie haben kann.
So ein Spiel wird uns helfen, auch die Meßbarkeit der Kardinalzahl $\aleph_2$ zu zeigen.

## 7.3 Beweis der Meßbarkeit von $\aleph_2$ unter AD

**Satz 7.3** (Solovay, 1968) [ZSF + AD + DC]
*$\aleph_2$ ist meßbar.*

**Beweis:** Wie im zweiten und dritten Beweis von Satz 5.1 geben wir eine Abbildung von $\mathcal{D}$ nach $\aleph_2$ an. Der Ultrafilter auf $\aleph_2$ ist dann der Bildfilter von $\mathcal{M}$. Um zu zeigen, daß er $\aleph_2$-vollständig ist, spielen wir ein Solovay-Spiel: Wieder

kann I nicht gewinnen, und eine Gewinnstrategie von Spieler II, die wir mit AD erhalten, liefert die Behauptung.
Da $x^{\#}$ für jedes $x \in \omega^\omega$ existiert, ist $\aleph_2^{\mathbf{V}}$ stark–unerreichbar in $\mathbf{L}[x]$. Weil in $\mathbf{L}[x]$ das Auswahlaxiom gilt, folgt:

$$(\aleph_1)^{+\mathbf{L}[x]} \leq |\mathcal{P}(\aleph_1)^{\mathbf{L}[x]}| < \aleph_2 \quad \forall x \in \omega^\omega.$$

Dabei ist $(\aleph_1)^{+\mathbf{L}[x]}$ die Nachfolgerkardinalzahl von $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ in $\mathbf{L}[x]$.

Wir definieren

$$f : \mathcal{D} \to \omega_2,\ [x]_{\Delta_1^1} \mapsto (\aleph_1)^{+\mathbf{L}[x]}$$

Für $x, y \in \omega^\omega$ mit $x \equiv_{\Delta_1^1} y$ gilt: $(\aleph_1)^{+\mathbf{L}[x]} = (\aleph_1)^{+\mathbf{L}[y]}$ . Also ist $f$ wohldefiniert.
$\mathcal{M}$ ist nach Korollar 5.7 ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter und somit ist

$$f_*(\mathcal{M}) = \{X \subseteq \omega_2;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{M}\}$$

mit Proposition 3.15 ein $\aleph_1$-vollständiger Ultrafilter auf $\aleph_2$.

<u>Beh. 1:</u> $f_*(\mathcal{M})$ ist frei.
Wir zeigen, daß $f$ auf keinem Filterelement von $\mathcal{M}$ konstant ist.
Mit Bemerkung 3.16 bedeutet dies $\{\alpha\} \notin f_*(\mathcal{M})\ \ \forall \alpha \in \omega_2$ und mit Proposition 3.5 folgt dann die Behauptung.
Angenommen es existiert ein $d_0 \in \mathcal{D}$, so daß für alle $d \in \mathcal{D}$ mit $d_0 \leq d$ gilt $f(d) = \alpha$. $(\star)$
Sei $x \in d_0$.
Da $\omega_1 \leq \alpha < \omega_2$ ist, existiert (in $\mathbf{V}$) eine Injektion $\rho :\ \alpha \to \omega_1$. Es ist $\rho \subseteq \alpha \times \omega_1$, und mit Hilfe einer Bijektion von $\alpha \times \omega_1$ auf $\omega_1$ kann man $\rho$ als eine Teilmenge von $\omega_1$ auffassen.
Also gibt es (nach Satz 7.2) ein $y \in \omega^\omega$, so daß $\rho \in \mathbf{L}[y]$. Wir wählen gemäß Bemerkung 5.3 ein $z \in \omega^\omega$ mit $x \leq_{\Delta_1^1} z$ und $y \leq_{\Delta_1^1} z$. Wegen $\rho \in \mathbf{L}[z]$ ist die Kardinalität von $\alpha$ in $\mathbf{L}[z]$ kleiner oder gleich $\aleph_1$.
Also folgt:

$$f\left([x]_{\Delta_1^1}\right) = \alpha < (\aleph_1)^{+\mathbf{L}[z]} = f\left([z]_{\Delta_1^1}\right).$$

Dies steht im Widerspruch zu $(\star)$!

<u>Beh. 2:</u> $f_*(\mathcal{M})$ ist $\aleph_2$–vollständig.
Dazu genügt es, Ketten von Filterelementen zu betrachten:

Sei also $\{X_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\} \subseteq f_*(\mathcal{M})$, wobei $X_\alpha \subseteq X_\beta$ für $\beta \leq \alpha < \omega_1$. Dann gilt:

$$\bigcap_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha \in f_*(\mathcal{M}). \quad (\triangle)$$

Daraus folgt die Behauptung für beliebige Filterelemente, denn:

Sei $\{Y_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\} \subseteq f_*(\mathcal{M})$. Setze $X_0 = Y_0$ und $X_\alpha = \bigcap_{\gamma\leq\alpha} Y_\gamma$ für alle $\alpha \in \omega_1$.
Wegen der $\aleph_1$-Vollständigkeit von $f_*(\mathcal{M})$ gilt: $X_\alpha \in f_*(\mathcal{M})\ \ \forall\, \alpha \in \omega_1$.
Nach Konstruktion ist $X_\alpha = \bigcap_{\gamma\leq\alpha} Y_\gamma \subseteq \bigcap_{\gamma\leq\beta} Y_\gamma = X_\beta$ für $\beta < \alpha < \omega_1$.
Somit folgt mit ($\triangle$):

$$\bigcap_{\alpha\in\omega_1} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha \in f_*(\mathcal{M}).$$

und damit die $\aleph_2$-Vollständigkeit von $f_*(\mathcal{M})$.

zu ($\triangle$): Wir betrachten das folgende Solovay-Spiel:
Beide Spieler spielen natürliche Zahlen,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **I** | $x(0)$ | | $x(2)$ | | $x(4)$ | ... | |
| **II** | | $x(1)$ | | $x(3)$ | | $x(5)$ | ... |

Sei $x = \langle x(i);\ i \in \omega\rangle$. II gewinnt, falls

- $E_{x_{\mathrm{I}}}$ keine Wohlordnung ist oder
- $E_{x_{\mathrm{I}}}$ eine Wohlordnung ist und $\{d \in \mathcal{D};\ [x_{\mathrm{II}}]_{\Delta^1_1} \leq d\} \subseteq f^{-1}[X_{\|x_{\mathrm{I}}\|}]$.

Ansonsten gewinnt Spieler I.
Falls I eine Folge $x_{\mathrm{I}}$ spielt, die eine Wohlordnung kodiert, so bestimmt er durch ihren Ordnungstyp eine abzählbare Ordinalzahl $\alpha$ und dadurch eine der Mengen $X_\alpha \subseteq \omega_2$. Da $X_\alpha$ im Filter liegt, ist $f^{-1}[X_\alpha] \in \mathcal{M}$, und es existiert ein $d_0 \in \mathcal{D}$, so daß gilt: $\{d \in \mathcal{D};\ d_0 \leq d\} \subseteq f^{-1}[X_\alpha]$.
II muß nun versuchen, eine Folge $x_{\mathrm{II}} \in \omega^\omega$ zu spielen, so daß gilt: $f(d) \in X_\alpha$ für jedes $d \in \mathcal{D}$ mit $[x_{\mathrm{II}}]_{\Delta^1_1} \leq d$.

Wir zeigen, daß I keine Gewinnstrategie in diesem Spiel hat.
Angenommen $\sigma$ wäre eine Gewinnstrategie für I.
Wie im Beweis von Satz 7.2 folgt:

$$A := \{(\sigma * y)_{\mathrm{I}};\ y \in \omega^\omega\} \subseteq \mathrm{WO} \text{ und } A \text{ ist eine } \boldsymbol{\Sigma}^1_1\text{-Menge.}$$

Also existiert nach 4.27 ein $\beta \in \omega_1$ : $\|(\sigma * y)_{\mathrm{I}}\| < \beta \quad \forall y \in \omega^\omega$.
Da $X_\beta \in f_*(\mathcal{M})$, d.h. $f^{-1}[X_\beta] \in \mathcal{M}$, ist, existiert ein $b \in \omega^\omega$, so daß gilt:

$$\{d \in \mathcal{D};\ [b]_{\Delta^1_1} \leq d\} \ \subseteq\ f^{-1}[X_\beta].$$

Für $\alpha < \beta$ ist $X_\beta \subseteq X_\alpha$ und somit $f^{-1}[X_\beta] \subseteq f^{-1}[X_\alpha]$.
Weil $\|(\sigma * b)_{\mathrm{I}}\| < \beta$ ist, folgt daraus:

$$\{d \in \mathcal{D};\ [b]_{\Delta^1_1} \leq d\} \ \subseteq\ f^{-1}[X_\beta] \ \subseteq\ f^{-1}[X_{\|(\sigma * b)_{\mathrm{I}}\|}]\ .$$

Das bedeutet, daß $\sigma * b$ eine Partie ist, die II gewinnt. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß $\sigma$ eine Gewinnstrategie für I ist!

Wegen AD hat II eine Gewinnstrategie $\tau$.
Wie im Beweis von 7.2 betrachten wir $\tau$ als Element von $\omega^\omega$ und zeigen:

$$\{d \in \mathcal{D};\ [\tau]_{\Delta^1_1} \leq d\} \ \subseteq\ f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in \omega_1} X_\alpha\right].$$

Daraus folgt dann die Behauptung.
Da $X_\alpha \subseteq X_\beta$ für $\beta < \alpha < \omega_1$ ist, gilt $\bigcap\limits_{\alpha < \omega_1} X_\alpha = \bigcap\limits_{\omega < \alpha < \omega_1} X_\alpha$.
Also genügt es zu zeigen, daß für alle $\omega < \alpha < \omega_1$ und für $x \in \omega^\omega$ mit $\tau \leq_{\Delta^1_1} x$ gilt: $f([x]_{\Delta^1_1}) \in X_\alpha$. Dazu verwenden wir ein Forcing–Argument.

Sei $\omega < \alpha < \omega_1$ und $x \in \omega^\omega$ mit $\tau \leq_{\Delta^1_1} x$.
Wie im Beweis von Satz 7.2 sei

$$\begin{aligned} P_\alpha \ = \ \{f \in \mathbf{L}[x];\ & f \text{ ist Funktion } \& \operatorname{Dom}(f) \subseteq \omega \ \& \operatorname{Im}(f) \subseteq \alpha \\ & \operatorname{Dom}(f) \text{ ist endlich}\}. \end{aligned}$$

$\langle P_\alpha, \supseteq, \varnothing\rangle$ ist eine partielle Ordnung, und da $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ in $\mathbf{L}[x]$ stark-unerreichbar ist (vgl. 5.12), folgt, daß $\mathcal{P}(P_\alpha)$ abzählbar ist.
Damit existiert ein $P_\alpha$-generischer Filter $G_\alpha$ über $\mathbf{L}[x]$.
Um die Modelle $\mathbf{L}[A]$ der relativ zu einer Menge $A$ konstruktiblen Mengen von einer generischen Erweiterung notationell unterscheiden zu können, schreiben wir in diesem Beweis letztere in der Form $\mathbf{L}[\![G]\!]$.
Nach Hilfssatz 6.16 ist $\alpha$ in $\big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!]$ abzählbar, und $g_\alpha := \bigcup G_\alpha$ ist eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$.

<u>Beh.:</u> $\big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!] = \mathbf{L}\big[\{x, G_\alpha\}\big]$.

„$\subseteq$" Es ist $\mathbf{L}[x] \subseteq \mathbf{L}\big[\{x, G_\alpha\}\big]$ und $G_\alpha \in \mathbf{L}\big[\{x, G_\alpha\}\big]$, denn $G_\alpha \subseteq P_\alpha \subseteq \mathbf{L}$.

Weil $\big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!]$ nach Satz 6.15 das kleinste transitive Modell von ZSF + AC ist, das $\mathbf{L}[x]$ umfaßt und $G_\alpha$ enthält, ist $\big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!] \subseteq \mathbf{L}\big[\{x, G_\alpha\}\big]$.

„$\supseteq$" Weil $x \in \mathbf{L}[x] \subseteq \big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!]$ und $G_\alpha \in \big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!]$ ist, folgt dies aus 5.9 *(ii)*.

Offensichtlich ist $\mathbf{L}\big[\{x, G_\alpha\}\big] = \mathbf{L}\big[\{x, g_\alpha\}\big]$.
Zu $g_\alpha$ kann man wie in 7.2 ein $g'_\alpha \in \mathrm{WO}$ konstruieren, so daß $\|g'_\alpha\| = \alpha$ und $\mathbf{L}\big[\{x, g'_\alpha\}\big] = \mathbf{L}\big[\{x, g_\alpha\}\big]$ gilt.
Sei $y = g_\alpha * x \in \omega^\omega$.
Dann ist $\mathbf{L}[y] = \mathbf{L}\big[\{x, g'_\alpha\}\big] = \big(\mathbf{L}[x]\big)[\![G_\alpha]\!]$.

Somit ist $\alpha$ in $\mathbf{L}[y]$ abzählbar und nach Satz 6.18 gilt für alle $\delta \in \Omega \cap \mathbf{L}[x] = \Omega \cap \mathbf{L}[y]$ mit $\delta \geq \aleph_1^{\mathbf{L}[x]}$

$$\delta \text{ ist Kardinalzahl in } \mathbf{L}[x] \iff \delta \text{ ist Kardinalzahl in } \mathbf{L}[y].$$

Insbesondere ist $f([x]_{\Delta^1_1}) = \big(\aleph_1^+\big)^{\mathbf{L}[x]} = \big(\aleph_1^+\big)^{\mathbf{L}[y]} = f([y]_{\Delta^1_1})$.
Sei $h := (g'_\alpha * \tau)_{\mathrm{II}}$. Da $\tau \leq_{\Delta^1_1} x \leq_{\Delta^1_1} y$ und $g'_\alpha \leq_{\Delta^1_1} y$ gilt, ist auch $h \leq_{\Delta^1_1} y$.
$\tau$ ist eine Gewinnstrategie für Spieler II, d.h.

$$\{d \in \mathcal{D};\ [h]_{\Delta^1_1} \leq d\} \subseteq f^{-1}(X_{\|g'_\alpha\|}) = f^{-1}(X_\alpha).$$

Mit $h \leq_{\Delta^1_1} y$ folgt: $f([x]_{\Delta^1_1}) = f([y]_{\Delta^1_1}) \in X_\alpha$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

$\square$

**Bemerkung:** Obiger Beweis benutzt die Idee, mit der schon die Meßbarkeit von $\aleph_1$ unter der Verwendung des Ultrafilters $\mathcal{M}$ gezeigt wurde. Man kann den Beweis wie gesehen nicht ohne weiteres übertragen, sondern benötigt einige zusätzliche Überlegungen wie z.B. das Solovay–Spiel, um die $\aleph_2$-Vollständigkeit des Bildfilters zu zeigen.
Es gibt jedoch eine Möglichkeit, einen Beweis anzugeben, der uniform die Meßbarkeit von $\aleph_1$ und $\aleph_2$ unter der Annahme von AD liefert. Dazu werden die *projektiven Ordinalzahlen* benutzt:

$$\boldsymbol{\delta}^1_n := \sup\{\|z\|;\ z \text{ kodiert eine } \boldsymbol{\Delta}^1_n\text{-Präwohlordnung auf } \omega^\omega\}$$

für $n \in \omega$.
Unter AD + DC ist $\boldsymbol{\delta}^1_n$ für jedes $n \in \omega$ eine reguläre Kardinalzahl. Außerdem gilt dann:

$$\boldsymbol{\delta}^1_1 = \aleph_1\ ,\ \boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2\ ,\ \boldsymbol{\delta}^1_3 = \aleph_{\omega+1}\ ,\ \boldsymbol{\delta}^1_4 = \aleph_{\omega+2}$$

(vgl. Moschovakis [24, Theorem 7D.11]).
Nun kann man zeigen, daß sich für jedes $n \in \omega$ die Ordinalzahlen, die kleiner als $\boldsymbol{\delta}^1_n$ sind, mit Hilfe einer geeigneten Norm kodieren lassen.
Diese Argumentation ergibt unter der Verwendung des Filters $\mathcal{M}$ unmittelbar die Meßbarkeit von $\aleph_1$ und $\aleph_2$ unter der Annahme von AD + DC (vgl. Becker [1]).
Resultate von Martin und Kunen besagen, daß $\boldsymbol{\delta}^1_n$ für jedes $n \in \omega$ in ZSF + AD + DC eine meßbare Kardinalzahl ist (vgl. dazu Kechris [15]).

# Literaturverzeichnis


[1] BECKER, H.S.: *Determinacy implies that $\aleph_2$ is supercompact*, Israel Journal of Mathematics **40** (1981), S. 229–234.

[2] DAVIS, M.: *Infinite Games of Perfect Information*, in: Dresher, M.; Shapley, L.S.; Tucker, A.W. (Hrsg.): Advances in Game Theory, Annals of Mathematical Studies **52**, Princeton University Press, Princeton 1964, S. 85–101.

[3] EBBINGHAUS, H.-D.: *Einführung in die Mengenlehre*, BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim $^{3}$1994.

[4] EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W.: *Einführung in die mathematische Logik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford $^{4}$1996.

[5] FELGNER, U.: *Vorlesung über Mengenlehre*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1996/1997 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[6] FELGNER, U.: *Modelle der Mengenlehre*, Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 1997 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[7] FELGNER, U.: *Infinitäre Kombinatorik*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1997/1998 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[8] FELGNER, U.; SCHULZ, K.: *Algebraische Konsequenzen des Determiniertheits–Axioms*, Archiv der Mathematik **42** (1984), S. 557–563.

[9] FENSTADT, J.E.: *The Axiom of Determinateness*, in: Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1971.

[10] Gale, D.; Stewart, F.M.: *Infinite games with perfect information*, in: Kuhn, H.W.; Tucker, A.W. (Hrsg.): Contributions to the Theory of Games Bd. 2, Annals of Mathematical Studies **28**, Princeton University Press, Princeton 1953, S. 245–266.

[11] Hauser, K; Mathias, A.R.D.; Woodin, W.H.: *The Axiom of Determinacy*, in Vorbereitung.

[12] Jech, T.J.: $\omega_1$ *can be measurable*, Israel Journal of Mathematics **6** (1968), S. 363–367.

[13] Jech T.J.: *Set Theory*, Academic Press, San Diego 1978.

[14] Kanamori, A.: *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.

[15] Kechris, A.S.: *AD and projective ordinals*, in: Kechris, A.S.; Moschovakis Y.N. (Hrsg.): Cabal Seminar 76-77. Proceedings, Caltech–UCLA Logic Seminar 1976-77. Lecture Notes in Mathematics **689**, Springer–Verlag, Berlin 1978, S. 91–132.

[16] Kechris, A.S.: *The Axiom of Determinacy implies dependent choices in* $\mathbf{L}(\mathbb{R})$, Journal of Symbolic Logic **49** (1984), S. 161–173.

[17] Kechris, A.S.: *Classical Descriptive Set Theory*, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.

[18] Koepke, P.: *Mengenlehre.* Ein Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie, ausgearbeitet von M. Burghardt, Bonn 1996 (Version vom 11.3.1997, online über das Internet verfügbar unter: URL: http://www.uni-bonn.de/logic/logic.html#lectures)

[19] Kunen, K.: *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1976.

[20] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **(3)7** (1902), S. 231–359. Nachgedruckt in: *Oeuvres Scientifiques* Bd. 1, Kundig, Genf 1972, S. 203-331.

[21] LEVY, A.: *Basic Set Theory.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag, Berlin 1979.

[22] LUSIN, N.N.; SIERPIŃSKI, W.: *Sur un ensemble non mesurable B.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **(9)2** (1923), S. 53–72. Nachgedruckt in: Hartmann, S. et al. (Hrsg.): Sierpiński, Oeuvres Choisies Bd. 2, Państwowe Wydawnidwo Naukowe, Warschau 1975, S. 504–519.

[23] MARTIN, D.A.: *The Axiom of Determinateness and Reduction Principles in the Analytical Hierachy*, Bulletin of the AMS **74** (1968), S. 687–689.

[24] MOSCHOVAKIS, Y.N.: *Descriptive Set Theory*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1980.

[25] MYCIELSKI, J.: *On the Axiom of Determinateness*, Fundamenta Mathematicae **53** (1964), S. 205–224.

[26] MYCIELSKI, J.; STEINHAUS, H.: *A Mathematical Axiom contradicting the Axiom of Choice*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **10** (1962), S. 1–3.

[27] MYCIELSKI, J.; SWIERCZKOWSKI, S.: *On the Lebesgue Measurability and the Axiom of Determinateness*, Fundamenta Mathematicae **54** (1964), S. 67–71.

[28] MYCIELSKI, J.; SWIERCZKOWSKI, S.; ZIĘBA, A.: *On infinite positional games*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **4** (1956), S. 485–488.

[29] MYCIELSKI, J.; ZIĘBA, A.: *On infinite games*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques **3** (1955), S. 133–136.

[30] OXTOBY, J.C.: *The Banach–Mazur game and Banach Category Theorem*, in: Dresher, M.; Tucker, A.W.; Wolfe, P. (Hrsg.): Contributions to the Theory of Games, Bd. 3, Annals of Mathematical Studies **39**, Princeton University Press 1957, Princeton, S. 159–163.

[31] SMITH, A.B.: *A Note on Piffles* , The Mathematical Gazette **51** (1967), S. 149–150.

[32] SOLOVAY, R.M.: *The independence of DC from AD* , in: Kechris, A.S.; Moschovakis Y.N. (Hrsg.): Cabal Seminar 76-77. Proceedings, Caltech–UCLA Logic Seminar 1976-77. Lecture Notes in Mathematics **689**, Springer–Verlag, Berlin 1978, S. 171–184.

[33] ZERMELO, E.: *Über eine Anwedung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, in: Hobson, E.W.; Love, A.E.H. (Hrsg.): Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912, Bd. 2, Cambridge University Press, Cambridge 1913, S. 501–504.