Einführung in die Logik

Torsten Schatz

Philosophisches Seminar
der Universität Tübingen

Sommersemester 2002

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Dies ist das Skript zur Vorlesung *Einführung in die Logik*, die ich im Sommersemester 2002 am Philosophischen Seminar der Universität Tübingen gehalten habe.
Das Ziel dieser Vorlesung ist die Vermittlung grundlegender Kenntnisse der formalen Logik. Zunächst wird die Aussagenlogik (Junktorenlogik) und danach die Prädikatenlogik (Quantorenlogik) der ersten Stufe behandelt.

Bei der inhaltlichen Gestaltung bildete für mich die Vorlesung „Mathematische Logik“ [2], die mein Doktorvater, Prof. Dr. Ulrich Felgner, bereits mehrfach am Mathematischen Institut der Universität Tübingen gehalten hat, eine wesentliche Grundlage. Diese Veranstaltung sowie die vielen Gespräche mit ihm haben die folgenden Seiten stark beeinflusst.

Torsten Schatz

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Womit beschäftigt sich die Logik?

Zu Beginn dieser Vorlesung wollen wir zunächst auf die Frage eingehen, mit was sich die *Logik* eigentlich beschäftigt. Welche Gegenstände werden in dieser wissenschaftlichen Disziplin untersucht?
Der Begriff *Logik* wird auch in unserer Umgangssprache gebraucht. Ein Beispiel ist der Ausspruch „Das ist doch logisch!“. Gemeint ist damit im Allgemeinen, dass etwas „klar“ oder „selbstverständlich“ ist. Der Duden gibt neben den gerade genannten umgangssprachlichen Bedeutungen als eigentliche Bedeutung des Wortes *logisch* an: „folgerichtig“, „denknotwendig“. Dies deutet schon darauf hin, mit welchen Fragen sich die Logik beschäftigt.

Das Wort kommt vom griechischen *Logos* ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$), was sich mit „Sprechen“ „Ausdruck der Gedanken“ oder „Rede“ übersetzen lässt. Die Logik handelt vom Argumentieren, genauer gesagt davon, wann eine Argumentation gültig ist.
Betrachten wir ein Beispiel einer Argumentation – und zwar das klassische Beispiel schlechthin:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Also ist Sokrates sterblich.

Die Argumentation besteht aus zwei *Prämissen* („Alle Menschen sind sterb-

lich." sowie „Sokrates ist ein Mensch.") und einer *Konklusion* („Also ist Sokrates sterblich.").
Wir würden sicherlich sagen, dass dies eine gültige Argumentation ist.
Was ist mit dem folgenden zweiten Beispiel?

Einige Menschen sind Griechen.
Sokrates ist ein Mensch.
___
Also ist Sokrates Grieche.

Auch bei dieser Argumentation sind sowohl die beiden Prämissen als auch die Konklusion wahre Aussagen. Trotzdem würden wir sagen, dass diese Argumentation nicht korrekt ist. Wir sehen dies sofort ein, wenn wir das Wort „Griechen" ersetzen:

Einige Menschen sind Frauen.
Sokrates ist ein Mensch.
___
Also ist Sokrates eine Frau.

Diese Argumentation hat dieselbe Form wie das zweite Beispiel und sie ist offensichtlich nicht korrekt. Folglich ist die obige auch nicht korrekt.

Diese Überlegungen führen uns zum Gegenstand der Logik. Diese beschäftigt sich mit den Schlüssen, die allein aufgrund ihrer Form gültig sind, unabhängig vom jeweiligen Inhalt (d. h. ob wir über „Griechen" oder über „Frauen" reden).
Das erste Beispiel, das wir gegeben haben, ist ein solcher Schluss. Denn wir können die Worte „Sokrates", „Mensch" und „sterblich" durch andere ersetzten, d. h. den Inhalt ändern, und die Argumentation bleibt gültig. Zum Beispiel:

Alle Hunde sind Säugetiere.
Bello ist ein Hund.
___
Also ist Bello ein Säugetier.

Was ist aber mit folgender Ersetzung?

Alle Hunde sind Katzen.
Sokrates ist ein Hund.
___
Also ist Sokrates eine Katze.

Auch dies ist ein formal korrekter Schluss! Denn wenn alle Hunde Katzen sind und Sokrates ein Hund ist, so ist Sokrates notwendigerweise eine Katze. Offensichtlich sind bei diesem Beispiel beide Prämissen und die Konklusion falsch – wenn wir mit Sokrates den Philosophen meinen, denn natürlich kann auch ein Hund oder eine Katze Sokrates heißen. Dagegen waren im zweiten Beispiel die Prämissen und die Konklusion wahr, trotzdem handelte es sich um einen ungültigen Schluss. Dies zeigt, dass es für die Beurteilung, ob eine Argumentation formal korrekt ist, nicht entscheidend ist, ob die Prämissen bzw. die Konklusion wahr sind. Deren konkreter Inhalt ist unwichtig.

Dies ist auch der Grund, warum wir uns nicht länger mit mehr oder weniger sinnvollen Beispielaussagen beschäftigen müssen, sondern statt dessen *Variable* nehmen können.
Das obige Beispiel hat dann die Form:

Alle A sind B.
C ist ein A.

Also ist C ein B.

Dies ist ein korrekter Schluss, egal was man für A, B und C einsetzt, denn er ist allein aufgrund seiner äußeren Form korrekt.

1.2 Bemerkungen zur Geschichte der Logik

Die Logik als wissenschaftliche Disziplin wurde von Aristoteles (384-322 v. Chr.) geschaffen Das Buch *Erste Analytik* enthält seine *Syllogistik*. Aristoteles gibt darin ein System von 24 Schlussweisen an, beweist ihre logische Allgemeingültigkeit und zeigt, dass es keine weiteren logisch–allgemeingültigen Schlussweisen der gleichen Form gibt.
Ein typisches Beispiel für einen aristotelischen Syllogismus ist das folgende.

Alle A sind B.
Alle B sind C.

Also sind alle A C.

Die Syllogistik ist aber nur ein Teil des logischen Werks von Aristoteles. Zu diesem gehören außerdem die Bücher *Topik*, *Kategorien*, *Hermeneutik*, *So-*

phistische Widerlegungen sowie die *Zweite Analytik*. Dort gibt er u. a. Beispiele für logisch–allgemeingültige Aussagen, wie den Satz vom ausgeschlossenen Dritten oder Axiome der Gleichheit (z. B. Wenn $a = b$ und $b = c$, dann auch $a = c$.).
Bei diesem Beispiel sowie bei dem obigen Syllogismus sehen wir, dass bereits bei Aristoteles nur die äußere Form eines Schlusses für die Logik relevant ist, für was A,B,C bzw. a, b, c stehen, ist unwichtig. Konsequenterweise verwendet er deshalb auch Variable statt konkrete Beispiele.

In der Zeit nach Aristoteles wurde die Logik vor allem von den Stoikern (Chrysippos von Soloi, ca. 281-208 v. Chr., und anderen) weiterentwickelt, die eine Art Aussagenlogik schufen.

Danach passierte auf diesem Gebiet über Jahrhunderte hinweg kaum etwas. Erst im späteren Mittelalter erlebte die Logik eine erneute Blütezeit. Ganz in der Tradition des Aristoteles war dabei die Syllogistik zentral. Ein wichtiger Name aus dieser Zeit ist Petrus Hispanus (ca. 1205-1277).

Für die Weiterentwicklung der Logik in der Neuzeit ist in erster Linie Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zu nennen. Die Aufgabe, die die Logik seiner Ansicht nach für die Wissenschaft insgesamt erfüllen sollte, kommt in dem folgenden berühmten Zitat aus einem Brief an Ph. J. Spencer zum Ausdruck:

> „alle menschlichen Schlussfolgerungen müssten auf irgendeine mit Zeichen arbeitende Rechnungsart zurückgeführt werden, wie es sie in der Algebra und Kombinatorik und mit den Zahlen gibt, wodurch nicht nur mit einer unzweifelhaften Kunst die menschliche Erfindungsgabe gefördert werden könnte, sondern auch viele Streitigkeiten beendet werden könnten, das Sichere vom Unsicheren unterschieden und selbst die Grade der Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden könnten, da ja der eine der im Disput Streitenden zum anderen sagen könnte: *Calculemus* (Lasst uns doch nachrechnen).“ [1]

[1] Der Brief ist im Original komplett in Latein geschrieben – Zitat und Übersetzung aus Felgner [2, Seite i].

Das Ziel von Leibniz ist es, die Umgangssprachen durch vollständig formalisierte Wissenschaftssprachen zu ersetzen, damit sich das Argumentieren als eine Art Rechnung darstellen lässt.
In dieser Konsequenz ließ sich das Leibniz'sche Programm nicht durchführen, aber im 19. und 20. Jahrhundert gelang es, Teile daraus zu realisieren. In dieser Zeit gab es eine stürmische Entwicklung, die die Logik stark veränderte, sie formalisierte und mathematisierte sowie in verschiedene Teildisziplinen aufspaltete, die sich unterschiedlichen Aspekten widmeten.
Viele waren daran beteiligt. Der erste, der eine umfassende Darstellung der modernen Logik präsentierte, war Gottlob FREGE (1848-1925). Weitere Namen, die man nennen sollte, sind George BOOLE (1815-1864), Charles Sanders PEIRCE (1839-1914), Guiseppe PEANO (1858-1932), David HILBERT (1862-1943), Bertrand RUSSEL (1872-1970), Alfred TARSKI (1902-1983) und natürlich Kurt GÖDEL (1906-1978).
Die Logik ist heute für viele Wissenschaften von grundlegender Bedeutung, neben der Philosophie in erster Linie für die Sprachwissenschaft und die Informatik sowie natürlich für die Mathematik, wo sich das Leibniz'sche Programm am weitesten umsetzten ließ.

Kapitel 2

Aussagenlogik

2.1 Aussagen

In der Aussagenlogik, die auch *Junktorenlogik* genannt wird, werden – wie es der Name schon sagt – Aussagen und insbesondere deren Verbindung zu neuen, komplexeren Aussagen betrachtet. Wir beschäftigen uns somit zunächst mit der Frage, was unter einer Aussage verstanden werden soll.

Die grundlegende Annahme, die die Aussagenlogik macht, ist, *dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist.*

Bereits Aristoteles hat empfohlen, diese Hypothese dem Aufbau der Logik zugrunde zu legen. Deshalb spricht man in diesem Zusammenhang auch von *aristotelischen Aussagen*. Beispiele für Aussagen sind also:

Tübingen liegt am Neckar.
Die Burse hat zwei Außentreppen.
Freiburg liegt in Italien.
Queen Mum wurde 190 Jahre alt.
$2 + 2 = 17$.

Dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, heißt nicht, dass wir auch wissen oder entscheiden können, ob sie wahr oder falsch ist. So ist

Queen Mum wurde an einem Sonntag geboren.

eine Aussage, unabhängig davon, ob wir wissen, an was für einem Wochentag Queen Mum geboren wurde.

Es gibt auch Aussagen, bei denen wir prinzipiell nicht in der Lage sind, festzustellen, ob sie wahr oder falsch sind, z. B.

Als Aristoteles geboren wurde, regnete es in Athen.

„wahr“ und „falsch“ nennt man in der Aussagenlogik *Wahrheitswerte*. Die Annahme, dass Aussagen nur diese beiden Wahrheitswerte haben können, kennzeichnet die sogenannte *klassische Logik*. Es gibt auch andere, nichtklassische Logiken, in dieser Vorlesung werden wir jedoch nur die klassische Logik behandeln.

Aus dem Gesagten folgt, dass folgende Sätze keine Aussagen sind:

An welchem Fluss liegt Tübingen?
Wann ist endlich Pause?
Schreiben Sie bitte etwas deutlicher!
Halt!
Schneuf!
$2 + 2$
ruojf sddfjkfj sdfb dfjkgfd gsdf kgjsdf ghiosdf giorfg

Es gibt durchaus auch Sätze in unserer natürlichen Sprache, bei denen es schwierig ist, zu entscheiden, ob diese Aussagen sind oder nicht. Über den Begriff der Aussage im Allgemeinen und dieses Problem im Besonderen gibt es lange und tiefgehende Erörterungen. Wir wollen aus zwei Gründen auf dieses Thema hier nicht weiter eingehen. Der erste Grund ist, dass wir aus unserem Sprachgebrauch heraus eine gewisse Vorstellung davon haben, was eine Aussage ist, und diese reicht für unsere Zwecke zunächst vollkommen aus.

Der zweite und entscheidende Grund ist, dass die formale Logik zu künstlichen (sog. formalen) Sprachen übergeht, gerade weil das genannte Problem (und viele andere) auftauchen, wenn wir mit natürlichen Sprachen arbeiten. Durch die Verwendung *formaler Sprachen* lässt sich dies vermeiden.

Da die Einführung formaler Sprachen ein relativ großer – und für viele vielleicht gewöhnungsbedürftiger – Abstraktionsschritt ist, wollen wir dies erst an späterer Stelle tun und zunächst mit unserer natürlichen Sprache und unserer intuitiven Vorstellung davon, was Aussagen sind, weiterarbeiten.

2.2 Junktoren

Wie wir bereits erwähnt haben, betrachtet man in der Aussagenlogik die Verbindung von Aussagen zu neuen, komplexeren Aussagen. Wenn A und B für zwei Aussagen stehen, so können wir beispielsweise die Aussagen „A oder B“, „A und B“ oder „Wenn A, dann B“ bilden. Uns interessiert dabei, wie der Wahrheitswert der neuen, verknüpften Aussage von den Wahrheitswerten der einzelnen Teilaussagen abhängt.
Als Beipiel betrachten wir die Aussage „Tübingen liegt am Neckar“ und die Aussage „Torsten steht nie vor 11 Uhr morgens auf“. Dann können wir die verbundene Aussage

Tübingen liegt am Neckar oder Torsten steht nie vor 11 Uhr morgens auf.

betrachten und feststellen, dass diese wahr ist, ohne dass wir damit den Dozenten dieser Vorlesung auf irgendeine Weise kompromittieren. Denn das Wort „oder“ ist in der Logik so erklärt, dass die Aussage „A oder B“ wahr ist, falls eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist, dabei ist der Wahrheitswert der anderen Aussage egal.
Die Worte, mit denen wir Aussagen verknüpfen (also z. B. „und“, „oder“, „wenn ... dann“), nennt man *Junktoren*. Der Begriff kommt vom lateinischen Verb „jungere“ was „verbinden“ oder „verknüpfen“ bedeutet.
In der Aussagenlogik werden nur solche Junktoren betrachtet, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage nur von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. So ist die Aussage „A und B“ wahr, falls A und B beide wahr sind, und andernfalls ist sie falsch. Dabei spielt es keine Rolle, für welche konkreten Aussagen A bzw. B stehen, allein ihr Wahrheitswert ist relevant.
In unserer natürlichen Sprache gibt es auch Verbindungen von Aussagen, bei denen der Wahrheitswert der verbundenen Aussage nicht allein von denen der Teilaussagen abhängt. Betrachten wir die Aussage

> Weil die Anzahl der Störche in Mitteleuropa in den letzten Jahren zurückgegangen ist, werden in Deutschland weniger Kinder geboren als Mitte des vergangenen Jahrhunderts.

Beide Teilaussagen sind wahr, für den Wahrheitswert der Aussage insgesamt bedeutet dies aber noch nichts.
Auch der Wahrheitswert von Aussagen des Typs „Es ist notwendig, dass A“ oder „Es ist möglich, dass A“ hängt nicht allein vom Wahrheitswert der Aussage A ab.
Junktoren, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage allein von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt, heißen *extensionale Junktoren*. Nur diese werden in der Aussagenlogik betrachtet.
Da es nur auf die Wahrheitswerte der Teilaussagen ankommt, und nicht auf die konkreten Aussagen selbst, benutzen wir *Variable* für Aussagen. Diese können die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ annehmen.
Wir geben nun eine Reihe von Junktoren an und erklären, wie sie gebraucht werden.

2.2.1 Die Negation

Beginnen wir mit dem Junktor „nicht“. Wenn wir ihn einer Aussage voranstellen, so wird diese verneint. Das heißt „nicht A“ ist falsch, wenn A wahr ist, und wahr, wenn A falsch ist. Dabei ist es – wie schon mehrfach betont – völlig egal, für welche Aussage A steht, es kommt nur auf den Wahrheitswert von A an.
Es folgt, dass in der Logik die doppelt verneinte Aussage „nicht nicht A“ denselben Wahrheitswert wie A hat. In unserer Umgangssprache ist dies nicht immer der Fall, so meinen wir mit „nicht unüblich“ nicht unbedingt dasselbe wie mit „üblich“.
In Dialekten bedeutet die doppelte Verneinung oftmals auch nur eine Verstärkung der Verneinung. Aus *Carsten Kurator* von Th. Storm stammt der Satz

> Was zu einem Esel geboren ist, das wird sein Tag nicht kein Pferd. [1]

Um Unklarheiten zu vermeiden, muss folglich bei jedem Junktor definiert werden, wie er gebraucht werden soll. Man macht das in der Aussagenlogik mit *Wahrheitstafeln*.

[1] zitiert nach Felgner [2, Seite 4].

Die Wahrheitstafel für die Negation geben wir nun an. Dabei benutzt man als Abkürzung für die Wahrheitswerte „w“ und „f“. Das Symbol für die Negation ist ¬.

A	¬ A
w	f
f	w

2.2.2 Die Konjunktion

Wir kommen nun zum Junktor „und“, der als Zeichen ∧ erhält. Seine Wahrheitstafel sieht wie folgt aus:

A	B	A ∧ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Man sieht, dass die Konjunktion kommutativ ist, d. h. A ∧ B hat dieselbe Wahrheitstafel wie B ∧ A. In unserer natürlichen Sprache ist dies nicht immer der Fall, z. B. hat die Aussage

Er stieg aufs Fahrrad und es begann zu regnen.

evtl. einen anderen Wahrheitswert als die Aussage

Es begann zu regnen und er stieg aufs Fahrrad.

2.2.3 Die Disjunktion

In unserer natürlichen Sprache gibt es zwei verschiedene Bedeutungen der Wortes „oder“. Es wird im ausschließenden Sinne und im nicht–ausschießenden Sinne gebraucht. Wenn wir also die Wahrheitstafel für das „oder“ aufstellen wollen, müssen wir uns für eine Bedeutung entscheiden.
Das „oder“ im nicht–ausschließenden Sinn ist beispielsweise gemeint, wenn im Studienplan steht:

> Das Latinum oder das Graecum ist spätestens bis zur Zwischenprüfung nachzuweisen.

Wenn Sie nachweisen, dass sie sowohl das Latinum als auch das Graecum gemacht haben, werden Sie trotzdem zur Zwischenprüfung zugelassen.
Wenn Sie dagegen im Restaurant das Menü bestellt haben und der Ober fragt Sie:

> Möchten Sie als Vorspeise den Lachs oder die Gänseleberpastete?

so meint er das „oder“ im ausschließenden Sinn und wäre wohl nicht damit einverstanden, wenn Sie beides ordern. Diese Bedeutung von „oder“ wird im Deutschen genauer durch „entweder ... oder“ wiedergegeben.
In der Logik wird der Junktor „oder“ grundsätzlich im nicht–ausschließenden Sinn gebraucht. Er wird als *Disjunktion* bezeichnet und mit dem Zeichen $\vee$ symbolisiert.
Seine Wahrheitstafel ist:

A	B	A $\vee$ B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das ausschließende „oder“ nennt man *Kontravalenz* oder *Alternative* und diese bekommt das Zeichen $>\!\!-\!\!<$. Ihre Wahrheitstafel unterscheidet sich von der der Disjunktion in der ersten Zeile.

A	B	A $>\!\!-\!\!<$ B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2.2.4 Die Implikation

Die Implikation gibt man in der Umgangssprache durch „wenn ..., dann“–Sätze wieder, z.B.

> Wenn Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt, dann geht er nie mehr in die Mensa.

Man benutzt eine solche Konstruktion im Allgemeinen allerdings nur, wenn ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen den beiden Teilaussagen besteht. Den Satz

> Wenn Tübingen an der Seine liegt, dann sind Hunde Säugetiere.

würde man als unsinnig bezeichnen.
In der Logik können wir diesen Standpunkt keinesfalls vertreten. Denn wir haben gesagt, dass wir nur Junktoren betrachten, bei denen der Wahrheitswert der verknüpften Aussage ausschließlich von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. Andere Gesichtspunkte dürfen keine Rolle spielen. Folglich müssen wir die Implikation so definieren, dass diese Anforderung erfüllt ist.
Legen wir zunächst die natürlche Sprache zugrunde. Wenn wir den Satz

> Wenn Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt, dann geht er nie mehr in die Mensa.

betrachten, so würden wir ihn für richtig halten, falls beide Teilaussagen wahr sind. Wir würden sagen, er ist falsch, falls Peter ein Kochbuch geschenkt bekommt und weiterhin in die Mensa geht. Wenn er jedoch keines geschenkt bekommt (d. h. die erste Aussage falsch ist), können wir über den Wahrheitswert der Implikation nichts aussagen, egal wie der Wahrheitswert der zweiten Aussage ist, d. h. ob er weiter in die Mensa geht oder nicht.
Wir müssen aber auch in diesen beiden Fällen den Wahrheitswert der Implikation als Junktor erklären. Wir definieren diese dann als wahr.

A	B	A → B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$ ist also stets wahr, falls A falsch ist, unabhängig vom Wahrheitswert von B. Aus der Scholastik stammt für diesen Sachverhalt die Umschreibung „ex falso quodlibet“.

Damit ist insbesondere das obige Beispiel

> Wenn Tübingen an der Seine liegt, dann sind Hunde Säugetiere.

eine wahre Aussage!

2.2.5 Die Äquivalenz

Die Äquivalenz zweier Aussagen kann in der natürlichen Sprache durch einen „… genau dann, wenn …“–Satz oder auch auch einen „… dann und nur dann, wenn …“–Satz wiedergegeben werden, z.B.

> Ich gehe heute abend in die Kneipe dann und nur dann, wenn das Fußballspiel nicht im Fernsehen übertragen wird.

Wie im Falle der Implikation gilt natürlich auch hier, dass man in der Umgangssprache zwei Aussagen auf diese Weise nur verknüpft, falls sie in einem inhaltlichen Zusammenhang stehen.
Für die Äquivalenz als aussagenlogischen Junktor gilt diese Einschränkung natürlich nicht. So sieht die Wahrheitstafel der Äquivalenz, die das Zeichen $\longleftrightarrow$ erhält, aus:

A	B	A $\longleftrightarrow$ B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die Äquivalenz $\mathsf{A} \longleftrightarrow \mathsf{B}$ ist also genau dann (sic!) wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

2.3 Eine formale Sprache der Aussagenlogik

Wir sind bereits mehrfach auf Probleme gestoßen, deren Grund darin lag, dass wir bislang die natürliche Sprache unseren Betrachtungen zugrunde gelegt haben. So ist es schwierig, exakt zu definieren, was genau die Aussagen in dieser Sprache sind. Auch bei der Definition der Implikation konnte uns die natürliche Sprache nicht helfen. Zudem ist in ihr die eindeutige Lesbarkeit von Ausdrücken nicht gegeben. So kann beispielsweise der Satz

Dieser Hund bellt und beißt nicht.

auf zwei Arten verstanden werden. Die erste ist, dass der Hund zwar bellt, aber nicht beißt, und die zweite ist, dass der Hund beides nicht tut.
Ein anderes Beispiel ist das Wort

Mädchenhandelsschule

Die Logik begegnet diesen Schwierigkeiten, indem sie nicht unsere natürliche Sprache als Grundlage nimmt, sondern künstliche, sogenannte *formale Sprachen*. Bei diesen ist genau erklärt, welche Ausdrücke betrachtet werden, die eindeutige Lesbarkeit der Ausdrücke ist gegeben und der Gebrauch der Junktoren klar definiert.
Zudem sind formale Sprachen so gemacht, dass den logischen Operationen grammatikalische Regeln entsprechen. Das macht sie sehr übersichtlich, man erkennt die logische Struktur komplexer Aussagen leichter als in natürlichen Sprachen, und man kann sich auf die Fragen konzentrieren, mit denen man sich in der Logik tatsächlich beschäftigen will.
Wir wollen nun eine formale Sprache der Aussagenlogik aufbauen und diese mit $\mathcal{L}$ bezeichnen. Dazu geben wir zunächst das Alphabet dieser Sprache an, also die Menge der Zeichen, aus denen wir unsere Ausdrücke bilden dürfen.

Definition 2.1 Das *Alphabet* von $\mathcal{L}$ enthält die folgenden Zeichen:

(1) Aussagensymbole $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$

(2) die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\longleftrightarrow$.

(3) zwei Klammern, eine aufgehende (und eine zugehende).

Nun legen wir fest, welche Kombinationen aus Zeichen des Alphabets die Ausdrücke unserer Sprache $\mathcal{L}$ sein sollen. Natürlich werden wir dabei nicht alle zulassen, wie auch in unserer natürlichen Sprache nicht jede Aneinanderreihung von Buchstaben einen Satz ergibt.

Im Gegensatz zur natürlichen Sprache, wo wir Worte und Sätze unterscheiden, definieren wir in der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{L}$ nur einen Typ von Ausdrücken. Wir geben dazu Regeln an, die sagen, welche Zeichenreihen man bilden darf.

Definition 2.2 Die *aussagenlogischen Formeln* der Sprache $\mathcal{L}$ sind genau diejenigen Zeichenreihen, welche (in endlich vielen Schritten) nach folgenden Regeln gebildet werden können.

Regel 1: Jedes Aussagensymbol A_n (für eine natürliche Zahl n) ist eine Formel.

Regel 2: Wenn φ eine Formel ist, dann ist auch $(\neg\varphi)$ eine Formel.

Regel 3: Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ Formeln.

Aussagenlogische Formeln nennt man auch *aussagenlogische Ausdrücke* oder auch *Aussagen*.
Wie man in dieser Definition sieht, benutzen wir griechische Buchstaben, insbesondere φ und ψ, als Variable für Formeln.

Betrachen wir einige
Beipiele:

(1) $((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$ ist eine aussagenlogische Formel.

(2) $(\neg((A_{17} \vee A_9) \rightarrow (A_{12223} \wedge (\neg A_1))))$ ist eine aussagenlogische Formel.

(3) $(\wedge A_3)$ ist keine aussagenlogische Formel.

(4) $A_1 \wedge A_2 \vee A_3$ ist keine aussagenlogische Formel.

(5) $(\ldots((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \ldots)$ ist keine aussagenlogische Formel.

Wir haben eine formale Sprache u. a. eingeführt, weil in der natürlichen Sprache die eindeutige Lesbarkeit nicht gegeben ist. In unserer formalen Sprache ist sie gegeben. Man kann dies auch beweisen, worauf wir hier aber verzichten. Ein formaler Beweis findet sich bei Felgner [2, Satz 2.2].

Die eindeutige Lesbarkeit beruht entscheidend darauf, dass wir in obigen Regeln genau festgelegt haben, wann und wie Klammern zu setzen sind. Die vielen Klammern können allerdings dazu führen, dass längere Formeln für uns unübersichtlich erscheinen. Deshalb vereinbart man Regeln, die in bestimmten Fällen das Weglassen von Klammern erlauben.

Konventionen zur Klammerersparnis:

(i) $\neg$ bindet am stärksten.

(ii) $\wedge$ und $\vee$ bilden stärker als $\rightarrow$ und $\longleftrightarrow$.

(iii) Iterierte $\wedge$-Verbindungen sind von links her zu klammern, d. h. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ steht für $(\ldots((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. Dasselbe gilt für iterierte $\vee$-Verbindungen.

(iv) Die äußeren Klammern können weggelassen werden.

Zum Beispiel ist also $A_1 \wedge \neg A_2 \rightarrow A_3 \vee A_4 \vee \neg A_5$ eine Abkürzung für die Formel $((A_1 \wedge (\neg A_2)) \rightarrow ((A_3 \vee A_4) \vee (\neg A_5)))$.

Wir weisen jedoch darauf hin, dass man nicht etwa $(A_1 \wedge A_2) \vee A_3$ weiter zu $A_1 \wedge A_2 \vee A_3$ abkürzen kann.
Denn die beiden Formeln $(A_1 \wedge A_2) \vee A_3$ und $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3)$ sind verschieden. Auch in unserer Umgangssprache unterscheiden wir zwischen

Ich esse heute *Linsen und Spätzle* oder *Maultaschen*.

und

Ich esse heute *Linsen* und *Spätzle oder Maultaschen*.

Wenn wir Formeln notieren, erlauben wir uns, unterschiedlich große Klammen sowie eckige Klammern zu benutzen, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.
Außerdem werden wir auch weiterhin gelegentlich $A, B, C \ldots$ für Aussagensymbole benutzen.

2.4 Die Semantik der Aussagenlogik

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Ausdrücke der Sprache $\mathcal{L}$ definiert. Macht es Sinn, zu fragen, ob die Formel

$$(\neg((A_{17} \vee A_9) \to (A_{12223} \wedge (\neg A_1))))$$

wahr oder falsch ist?
Vor Einführung der formalen Sprache sprachen wir davon, dass in der Aussagenlogik Aussagen mittels Junktoren zu neuen Aussagen verknüpft werden. Die grundlegende Frage, die dabei untersucht wird, ist, wie der Wahrheitswert der verknüpften Aussage von den Wahrheitswerten der Teilaussagen abhängt. Dabei ist unerheblich, welche konkreten Aussagen betrachtet werden, allein ihr Wahrheitswert ist relevant.
Die formale Sprache, die wir eingeführt haben, erlaubt uns nun, diese Grundfrage genauer zu untersuchen, ohne mit den Problemen konfrontiert zu sein, die auftreten würden, wenn wir die natürliche Sprache zugrunde lägen.

Insofern ist es durchaus sinnvoll zu fragen, wie der Wahrheitswert von $(\neg((A_{17} \vee A_9) \to (A_{12223} \wedge (\neg A_1))))$ ist, abhängig von den Wahrheitswerten von A_1, A_9, A_{17} und A_{12223}.
Wenn wir diese Frage beantworten wollen, müssen wir zunächst festlegen, welchen Wahrheitswert die Aussagensymbole A_n (für natürliche Zahlen n) erhalten sollen.

2.4.1 Wahrheitswertzuordnungen

Definition 2.3 Eine Funktion b, die jedem Aussagensymbol einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, heißt *Belegung.*

Eine Belegung b lässt sich auf folgende Weise zu einer Funktion F fortsetztzen, die jeder aussagenlogischen Formel einen Wahrheitswert zuordnet:

(1) Für eine Aussagenvariable A_n ist, ist $F(A_n) = b(A_n)$.

(2) $F(\neg\varphi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } F(\varphi) = \text{f}, \\ \text{f} & , \text{ falls } F(\varphi) = \text{w}. \end{cases}$

(3) $F(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } F(\varphi) = F(\psi) = \text{w}, \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(4) $F(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} \text{f} & , \text{ falls } F(\varphi) = F(\psi) = \text{f}, \\ \text{w} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(5) $F(\varphi \to \psi) = \begin{cases} \text{f} & , \text{ falls } F(\varphi) = \text{w und } F(\psi) = \text{f}, \\ \text{w} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(6) $F(\varphi \longleftrightarrow \psi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } F(\varphi) = F(\psi), \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Damit wird allen aussagenlogischen Formeln einen Wahrheitswert zugeordnet. Dies folgt direkt aus der Definition 2.2.

Definition 2.4 Eine Funktion F, die jeder aussagenlogischen Formel einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet, heißt *Wahrheitswertzuordnung* (oder *Bewertung*).

Nach dem obigen Schema lässt sich also jede Belegung auf eine eindeutige Weise zu einer Wahrheitswertzuordnung fortsetzen.
Diese Fortsetzung entspricht genau den Wahrheitstafeln, wie sie im Abschnitt 2.2 definiert wurden.

Wir haben nun unser erstes Ziel erreicht, denn wir können den Wahrheitswert einer zusammengesetzen Aussage abhängig von den Wahrheitswerten der Aussagensymbole, die in ihr vorkommen, bestimmen.
Üblicherweise macht man dies mit Wahrheitstafeln. Wir geben einige
Beispiele:
(1) $(A \vee B) \to A$

A	B	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \to A$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	w	f
f	f	f	w

(2) $(A \wedge B) \rightarrow A$

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

(3) $A \wedge \neg A$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	f
f	w	f

(4) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
w	w	w	w	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	f

2.4.2 Anwendung auf Aussagen aus der natürlichen Sprache

Wir wollen nun einige Beispiele geben, wie wir mit Hilfe der Aussagenlogik Sätze aus unserer natürlichen Sprache untersuchen können.

(a) Betrachen wir zunächst die Aussage

> Kräht der Hahn auf dem Mist, so ändert sich das Wetter oder es bleibt, wie es ist.

Wenn wir sie mit Hilfe unserer Methoden untersuchen wollen, müssen wir sie zunächst in die formale Sprache $\mathcal{L}$ übersetzen, man nennt dies *Formalisierung*.

Dazu benutzen wir folgende Abkürzungen für die Teilaussagen:

- H für: Der Hahn kräht auf dem Mist.

- W für: Das Wetter ändert sich.

Die Formel aus $\mathcal{L}$, die wir betrachten, lautet dann

$$H \rightarrow (W \vee \neg W)$$

Nun können wir, ausgehend von den Wahrheitswerten von H und W den Wahrheitswert der Aussage bestimmen:

H	W	$\neg$W	(W $\vee$ $\neg$W)	H $\rightarrow$ (W $\vee$ $\neg$W)
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Also ist der Satz

> Kräht der Hahn auf dem Mist, so ändert sich das Wetter oder es bleibt, wie es ist.

immer logisch wahr, egal ob sich das Wetter ändert oder nicht und ob der Hahn kräht oder nicht.

(b) Die Formalisierung einer Aussage aus unserer Umgangssprache kann man nicht rein schematisch durchführen, sondern man muss im Allg. zunächst die Struktur der zu formalisierenden Aussage erfassen. Beispielsweise muss man erkennen, dass

> Dieser Hund bellt und beißt.

die Konjunktion der Aussage

> Dieser Hund bellt.

und der Aussage

> Dieser Hund beißt.

ist.

Die Aussage

Dieses Müsli schmeckt furchtbar, aber es ist gesund.

besteht aus zwei Teilaussagen, die durch „aber“ verbunden sind. Das „aber“ drückt logisch eine Konjunktion aus, d. h. zu formalisieren ist der Satz

Dieses Müsli schmeckt furchtbar und dieses Müsli ist gesund.

Durch die Ersetzung des Wortes „aber“ durch „und“ wird zwar der Inhalt des Satzes leicht verändert, für die Analyse der Wahrheit bzw. Falschheit ist dies aber bedeutungslos.

Wir kürzen die Teilaussagen mit F und G ab.

F	G	F ∧ G
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(c) Zurück zum Hund. Wir benutzen die Abkürzungen:

- W für: Dieser Hund bellt.
- S für: Dieser Hund beißt.

Dann steht W ∧ S für die Aussage Dieser Hund bellt und beißt. In Abschnitt 2.3 haben wir die Aussage

Dieser Hund bellt und beißt nicht.

betrachtet und gesehen, dass sie nicht eindeutig lesbar ist.

Wenn wir sie formalisieren möchten, müssen wir folglich uns für eine der beiden Möglichkeiten, wie sie verstanden werden kann, entscheiden. Diese Möglichkeiten sind (¬W ∧ ¬S) und (W ∧ ¬S).

An der Wahrheitstafel

W	S	$\neg$W	$\neg$S	$\neg$W $\wedge$ $\neg$S	W $\wedge$ $\neg$S
w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	f

sehen wir, dass die beiden Aussagen nicht gleichwertig sind.

2.4.3 Die Begriffe Tautologie, Erfüllbarkeit und Kontradiktion

Beim ersten Anwendungsbeispiel (a) wie auch beim Beispiel (2) aus 2.4.1 fällt auf, dass in der letzten Spalte der Wahrheitstafel immer der Wahrheitswert w steht. D. h. diese Formel ist „immer wahr“, genauer gesagt: sie ist unter allen Wahrheitswertzuordnungen wahr.
Formeln mit dieser Eigenschaft sind für die Logik besonders interessant.

Definition 2.5 (1) Eine aussagenlogische Formel φ heißt *Tautologie* (oder *allgemeingültig*), falls φ unter allen Wahrheitswertzuordnungen wahr ist.[2]
Wir schreiben dann: $\models \varphi$.

(2) Eine aussagenlogische Formel φ heißt *Kontradiktion* (oder *kontradiktorisch*), falls φ unter keiner Wahrheitswertzuordnung wahr ist.

(3) Eine aussagenlogische Formel φ heißt *erfüllbar*, falls es eine Wahrheitswertzuordnung gibt, unter der φ wahr ist.

(4) Eine aussagenlogische Formel φ heißt *kontingent*, falls φ weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist.

Von den Beispielen aus 2.4.1 ist also (2) eine Tautologie, (3) eine Kontradiktion und (1) und (4) sind erfüllbar und kontingent.
Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen den drei Begriffen:

[2]Der Begriff Tautologie wird in der Logik seit Ludwig WITTGENSTEIN (*Tractatus logico philosophicus*, 1918) benutzt. Außerhalb der Logik benutzt man ihn auch für Fügungen, die einen Sachverhalt doppelt wiedergeben, z. B. „immer und ewig“.

Proposition 2.6 *Für eine aussagenlogische Formel φ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) φ ist eine Tautologie.

(ii) $\neg\varphi$ ist eine Kontradiktion.

(iii) $\neg\varphi$ ist nicht erfüllbar.

Beweis: „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei F eine Wahrheitswertzuordnung. Dann gilt nach Voraussetzung, dass $F(\varphi) = \mathrm{w}$ ist. Also ist $F(\neg\varphi) = \mathrm{f}$. Damit ist $\neg\varphi$ unter allen Wahrheitswertzuordnungen falsch, also eine Kontradiktion.
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Sei F eine Wahrheitswertzuordnung. Dann gilt nach Voraussetzung, dass $F(\neg\varphi) = \mathrm{f}$ ist. Also ist $\neg\varphi$ nicht erfüllbar.
„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Sei F eine Wahrheitswertzuordnung. Da $\neg\varphi$ nicht erfüllbar ist, gibt es keine Wahrheitswertzuordnung, unter der $\neg\varphi$ wahr ist. Also gilt $F(\neg\varphi) = \mathrm{f}$ und damit $F(\varphi) = \mathrm{w}$. Damit ist φ unter allen Wahrheitswertzuordnungen wahr, also eine Tautologie. □

Definition 2.7 Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aussagenlogische Formeln.
Die Menge $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ heißt *erfüllbar*, wenn eine Wahrheitswertzuordnung F existiert mit $F(\psi_1) = F(\psi_2) = \ldots = F(\psi_n) = \mathrm{w}$.

Beispiele:

(i) $\{A, \neg B, B \to A\}$ ist erfüllbar.

(ii) $\{\neg A, B, B \to A\}$ ist nicht erfüllbar.

(iii) Die Menge aller Aussagensymbole ist erfüllbar.

(iv) Die Menge aller aussagenlogischen Formeln ist nicht erfüllbar.

2.4.4 Der Begriff der Folgerung

Wir wollen nun erklären, was wir darunter verstehen, dass eine Formel aus anderen Formeln folgt.

Definition 2.8 Seien $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass φ aus $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *(aussagenlogisch) folgt*, wenn φ unter allen Wahrheitswertzuordnungen wahr ist, unter denen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ wahr sind,

d. h. für jede Wahrheitswertzuordnung F mit $F(\psi_1) = \ldots = F(\psi_n) = \text{w}$ gilt auch $F(\varphi) = \text{w}$.
Wir schreiben dann: $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$. [3]
Um auszudücken, dass dies nicht gilt, schreiben wir auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$.

Bemerkung: Man beachte, dass $\psi_1, \ldots, \psi_n \not\models \varphi$ nicht dasselbe bedeutet wie $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \neg\varphi$ (vgl. Übungsblatt 3).

Beispiel:
(1) Wir zeigen, dass $A \to B, A \models B$ gilt.
Dazu betrachte die Wahrheitstafel

A	B	$(A \to B)$	A	B
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	w
f	f	w	f	f

Folglich ist bei allen Wahrheitswertzuordnungen, bei denen $A \to B$ und A wahr ist, auch B wahr.

(2) Wir geben noch ein Beipiel für eine Anwendung auf unsere Umgangssprache. Dazu betrachten wir die folgende Aussage, die beipielsweise eine Mutter an ihren Sohn richtet:

> Wenn du heute Abend dein Zimmer nicht aufgeräumt hast, dann bekommst du (heute Abend) keinen Nachtisch.

Wenn wir die Teilaussagen durch Z und N abkürzen, so lautet die Formalisierung der Aussage

$$\neg\, \mathsf{Z} \to \neg\, \mathsf{N}$$

Wir wollen untersuchen, ob daraus $\mathsf{Z} \to \mathsf{N}$ folgt, d. h. die Formalisierung der Aussage

[3] Die Notation wurde in den 50er Jahren des vergangenen Jahrhunderts von dem US–amerikanischen Logiker Stephen C. Kleene eingeführt.

> Wenn du heute Abend dein Zimmer aufgeräumt hast, dann bekommst du (heute Abend) Nachtisch.

Wir betrachten die Wahrheitstafel

Z	N	¬Z	¬N	¬Z → ¬N	Z → N
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w

An ihr lesen wir ab, dass Z → N nicht folgt! Es ist also gut, wenn man möglichst früh in seinem Leben Grundkenntnisse in Logik erwirbt.

Wir beweisen nun, dass die Folgerung damit gleichbedeutend ist, dass eine bestimmte Formel eine Tautologie ist:

Satz 2.9 (Export–Import–Theorem)
Seien $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ aussagenlogische Formeln und n eine natürliche Zahl. Dann gilt $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ genau dann, wenn $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$.

Beweis: Wir müssen einerseits beweisen, dass wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ gilt, $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist, und andererseits, dass wenn $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist, auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ gilt („von links nach rechts" und „von rechts nach links", was wir mit „ $\Longrightarrow$ " bzw. „$\Longleftarrow$" abkürzen).
„ $\Longrightarrow$ ": Wir setzten $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ voraus.
Sei F eine beliebige Wahrheitswertzuordnung. Wir unterscheiden zwei Fälle:
<u>1. Fall:</u> $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{w}$.
Gemäß der Definition der Wahrheitswerte für die Konjunktion gilt dann $F(\psi_1) = \ldots = F(\psi_n) = \text{w}$. Nach der Voraussetzung ist dann $F(\varphi) = \text{w}$.
Aus der Definition der Wahrheitswerte für die Implikation folgt daraus $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi) = \text{w}$.
<u>2. Fall:</u> $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{f}$.
Aus der Definition der Wahrheitswerte für die Implikation folgt $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi) = \text{w}$.
Somit gilt in beiden Fällen $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi) = \text{w}$. Da F beliebig war, heißt dies, dass $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist.

„$\Longleftarrow$“: Wir setzen voraus, dass $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist.
Sei F eine Wahrheitswertzuordnung mit $F(\psi_1) = \ldots = F(\psi_n) = \mathrm{w}$.
Dann ist $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \mathrm{w}$ nach der Definition der Konjunktion.
Dann muss $F(\varphi) = \mathrm{w}$ gelten, da sonst $F(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi) = \mathrm{f}$, also $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ keine Tautologie wäre.
Somit gilt $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$. $\square$

Als Folgerung formulieren wir den Spezialfall für $n = 1$.

Korollar 2.10 *Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln.*
Dann gilt $\psi \models \varphi$ genau dann, wenn $\models \psi \to \varphi$.

Wenn sowohl φ aus ψ folgt, als auch umgekehrt, so nennt man die Formeln logisch–äquivalent.

Definition 2.11 Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ heißen *logisch–äquivalent*, falls sowohl $\varphi \models \psi$ als auch $\psi \models \varphi$ gilt.
Wir schreiben dann: $\varphi \mathrel{=\!\!|} \models \psi$.

Satz 2.12 *Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln.*
Dann sind φ und ψ genau dann logisch–äquivalent, wenn $\varphi \longleftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

Beweis: siehe Übungsblatt 4.

2.4.5 Metasprache und Objektsprache

An dieser Stelle ist es sinnvoll, einige Worte zum Unterschied zwischen Objekt– und Metasprache zu verlieren.
Wir haben eine formale Sprache $\mathcal{L}$ definiert. Diese nennen wir *Objektsprache*.
Sie untersuchen wir und über sie beweisen wir Sätze, wie beispielsweise das Export–Import–Theorem.
Wenn wir über die Objektsprache reden, so tun wir dies in unserer natürlichen Sprache, die man deshalb *Metasprache* nennt. Der Beweis des Export–Import–Theorems ist in der Metasprache formuliert. So ist der Satz

> Da F beliebig war, heißt dies, dass $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ eine Tautologie ist.

offensichtlich ein Satz der Metasprache, in dem über einen Ausdruck der Objektsprache, nämlich $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ geredet wird.
Das Symbol $\models$ gehört nicht zu unserer Objektsprache $\mathcal{L}$, es ist ein metasprachliches Zeichen. Somit ist $\psi \models \varphi$ keine Formel aus $\mathcal{L}$ und die Äquivalenz zwischen dieser Aussage und der Aussage, dass $\psi \rightarrow \varphi$ eine Tautologie ist, ist eine metasprachliche Äquivalenz. Für eine solche benutzen wir auch das Zeichen $\iff$, welches vom Junktor $\longleftrightarrow$ aus unserer Objektsprache zu unterscheiden ist.
Die Trennung zwischen Objekt– und Metasprache ist für die Logik außerordentlich wichtig und die beiden dürfen keinesfalls verwechselt werden.
Das Export–Import–Theorem (im Spezialfall $n = 1$) sagt nicht, dass die Aussage $\psi \models \varphi$ äquivalent ist zur Aussage $\varphi \rightarrow \psi$. Dies kann auch gar nicht gelten, denn $\varphi \rightarrow \psi$ ist eine Formel aus $\mathcal{L}$, während $\psi \models \varphi$ eine metasprachliche Aussage ist.

2.5 Tautologien

Wir geben eine Reihe von wichtigen Tautologien und ihrer Bezeichnungen an, die zum Teil aus der traditionellen Logik stammen.

Satz 2.13 *Seien φ, ψ, θ aussagenlogische Formeln. Dann sind die folgenden Formeln Tautologien:*

(i) $\varphi \vee \neg\varphi$ (*Satz vom ausgeschlossenen Dritten* oder *tertium non datur*)

(ii) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (*Satz vom Widerspruch*)

(iii) $\varphi \longleftrightarrow \neg\neg\varphi$ (*Negations–Regel*)

(iv) $(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ und
$(\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\psi \vee \varphi)$ (*Kommutativgesetze*)

(v) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \longleftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$ und
$(\varphi \vee \psi) \vee \theta \longleftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \theta)$ (*Assoziativgesetze*)

(vi) $(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \longleftrightarrow (\varphi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$ und
$(\varphi \vee \psi) \wedge \theta \longleftrightarrow (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$ (*Distributivgesetze*)

(vii) $\neg(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ und
$\neg(\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (*Ockham–De Morgan–Regeln*)

(viii) $(\varphi \wedge \varphi) \longleftrightarrow \varphi$ und
$(\varphi \vee \varphi) \longleftrightarrow \varphi$ (*Idempotenz*)

(ix) $(\varphi \to \psi) \longleftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (*Kontrapositionsregel*)

(x) $(\varphi \to \psi) \longleftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ (*Nicht-Oder-Umformung der Implikation*)

Beweis: Man stellt die Wahrheitstafeln für die Formeln in (i) bis (x) auf. Als Beispiel geben wir die für die erste Formel aus (vii) an. Wir benutzen dabei ein vereinfachtes Verfahren für die Aufstellung der Wahrheitstafel.

φ	ψ	$\neg$	$(\varphi \vee \psi)$	$\longleftrightarrow$	$(\neg\varphi$	$\wedge$	$\neg\psi)$
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	w	f	f	w
f	w	f	w	w	w	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

□

Bemerkung: Aus Satz 2.12 folgt, dass die Teilaussagen, die links und rechts der Äquivalenzpfeile in (iii)–(x) stehen, logisch–äquivalent sind.
Es gilt also z. B. $\varphi \dashv\models \neg\neg\varphi$ oder $\neg(\varphi \wedge \psi) \dashv\models (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

In dieser Form ist obiger Satz hilfreich, um aussagenlogische Formeln in logisch–äquivalente Formeln umzuformen.

Beispiele

(1) $\neg((\varphi \wedge \psi) \vee \theta)$ ist logisch–äquivalent zu $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \wedge \neg\theta$.

(2) $(A \to B) \vee C \dashv\models (\neg A \vee B) \vee C \dashv\models \neg A \vee (B \vee C) \dashv\models A \to (B \vee C)$

Bemerkung: Zu einer Implikation $\varphi \to \psi$ können wir die folgenden Formeln betrachten:

(i) die *Kontraposition* $\neg\psi \to \neg\varphi$.
Sie ist nach der Kontrapositionsregel (obiger Satz, Teil (ix)) logisch–äquivalent zu $\varphi \to \psi$.

(ii) die *Umkehrung* $\psi \to \varphi$.
Diese ist nach der Kontrapositionsregel logisch–äquivalent zu $\neg\varphi \to \neg\psi$. Beide sind nicht logisch–äquivalent zur Implikation $\varphi \to \psi$, wie die folgende Wahrheitstafel zeigt:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	w	f
f	f	w	w

An der Wahrheitstafel kann man ablesen, dass weder $\varphi \to \psi \models \psi \to \varphi$ noch $\psi \to \varphi \models \varphi \to \psi$ gilt.

(iii) die *Negation* von $\varphi \to \psi$, also $\neg(\varphi \to \psi)$, ist logisch–äquivalent zu $\varphi \wedge \neg\psi$. Denn nach (iii), (vii) und (ix) aus obigem Satz gilt:
$\neg(\varphi \to \psi) \models\!\!\!\!\dashv\; \neg(\neg\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\!\dashv\; \varphi \wedge \neg\psi$.
Die Wahrheitstafel zeigt, dass die Negation einer Implikation nicht logisch–äquivalent zu ihrer Umkehrung ist:

φ	ψ	$\varphi \wedge \neg\psi$
w	w	f
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Als Beispiel für die Anwendung auf die natürliche Sprache betrachten wir den Satz

> Wenn Peter den Logik–Schein bekommen hat, dann macht er ein Fest.

Die Kontraposition davon ist

> Wenn Peter kein Fest macht, dann hat er den Logik–Schein nicht bekommen.

Die Umkehrung ist

> Wenn Peter ein Fest macht, dann hat er den Logik–Schein bekommen.

Und die Negation lautet

> Peter hat den Logik–Schein bekommen und macht kein Fest.

2.6 Die Entscheidbarkeit der Aussagenlogik

Der folgende Satz ist eines der zentralen Resultate der Aussagenlogik. Er besagt, dass es Algorithmen gibt, die in endlicher Zeit die Frage beantworten, ob eine gegebene aussagenlogische Formel eine Tautologie ist oder nicht. Diese Aussage wurde zum ersten Mal von Paul Bernays (1918) und von Emil L. Post (1921) bewiesen.

Satz 2.14 *Es gibt ein konkretes Verfahren, mit dem man von jeder aussagenlogischen Formel in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob sie eine Tautologie ist oder nicht.*

Beweis: Sei φ eine aussagenlogische Formel, die nur Aussagensymbole aus der Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ enthält.
Man stellt die Wahrheitstafel von φ auf. Dazu trägt man in die 2^n Zeilen zunächst alle Möglichkeiten ein, die Aussagensymbole $A_1, \ldots, A_n$ mit den Wahrheitswerten w und f zu belegen.

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	φ
w	w	$\ldots$	w	x_1
w	w	$\ldots$	f	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f	f	$\ldots$	w	x_{2^n-1}
f	f	$\ldots$	f	x_{2^n}

Dann rechnet man die Wahrheitswerte von φ unter diesen Belegungen der Aussagensymbole aus und trägt sie in die letzte Spalte ein.
φ ist nun genau dann eine Tautologie, wenn in der letzten Spalte nur der Wahrheitswert w steht. $\square$

Der Satz zeigt, dass sich das Programm von Leibniz (vgl. Seite 7) in der Aussagenlogik realisieren lässt. Man kann tatsächlich nachrechnen (*Calculemus*), ob eine gegebene aussagenlogische Formel logisch–allgemeingültig ist oder nicht.
Diesem Sachverhalt bezeichnet man auch als die *Entscheidbarkeit* der Aussagenlogik. Es gibt dabei verschiedene Entscheidungsverfahren, die unterschiedliche Vor– und Nachteile haben.

2.7 Disjunktive Normalform

Aus Satz 2.13 (x) folgt, dass wir den Junktor $\rightarrow$ mit Hilfe von $\neg$ und $\vee$ ausdrücken können. Dies bedeutet, dass wir zu jeder Formel unserer formalen Sprache $\mathcal{L}$ eine logisch–äquivalente Formel finden können, die $\rightarrow$ nicht enthält. In diesem Sinn ist $\rightarrow$ überflüssig, wir könnten in unserer Sprache auf diesen Junktor verzichten.
Die Formel $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ ist nach Aufgabe 5 von Blatt 4 logisch–äquivalent zu $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Damit kann man den Junktor $\longleftrightarrow$ durch $\rightarrow$ und $\wedge$ ausdrücken. Da $\rightarrow$ durch $\neg$ und $\vee$ ausdrückbar ist, kann $\longleftrightarrow$ durch $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ ausgedrückt werden.
Zum Beispiel ist $A \longleftrightarrow B$ somit logisch–äquivalent zu $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ und damit zur Formel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$, die nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält.
Folglich können wir zu jeder Formel φ aus der Sprache $\mathcal{L}$ eine logisch–äquivalente Formel ψ angeben, die nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält.
Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass wir dabei ψ sogar so wählen können, dass sie eine bestimmte Form hat.

Definition 2.15 Eine aussagenlogische Formel φ ist in *disjunktiver Normalform*, wenn φ eine Disjunktion von Formeln ist, wobei diese selbst Konjunk-

tionen von Formeln sind, und die Glieder dieser Konjunktionen Aussagensymbole oder negierte Aussagensymbole sind.
D. h. eine Formel in disjunktiver Normalform hat die Gestalt:
$(\psi_{1,1}\wedge\psi_{1,2}\wedge\ldots\wedge\psi_{1,n_1})\vee(\psi_{2,1}\wedge\psi_{2,2}\wedge\ldots\wedge\psi_{2,n_2})\vee\ldots\vee(\psi_{m,1}\wedge\psi_{m,2}\wedge\ldots\wedge\psi_{m,n_m})$, wobei m und $n_1,\ldots,n_m$ natürliche Zahlen sind und die $\psi_{i,j}$ Aussagensymbole oder negierte Aussagensymbole sind.

Zum Beispiel ist $(A_0\wedge A_1\wedge\neg A_2)\vee(\neg A_1\wedge A_3)\vee\neg A_0$ eine Formel in disjunktiver Normalform.

Satz 2.16 *Sei φ eine aussagenlogische Formel. Dann existiert eine zu φ logisch–äquivalente Formel ψ in disjunktiver Normalform.*
Dabei enthält ψ nur Aussagensymbole, welche auch in φ vorkommen.
Man nennt ψ dann auch die *disjunktive Normalform von φ.*

Beweis: Wir geben an, wie man ψ konstruieren kann:
Man stelle zunächst die Wahrheitstafel von φ auf:

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	φ
w	w	$\ldots$	w	x_1
w	w	$\ldots$	f	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f	f	$\ldots$	w	x_{2^n-1}
f	f	$\ldots$	f	x_{2^n}

Die Variablen $x_1,\ldots,x_{2^n}$ sind dabei entweder gleich w oder gleich f.
Wir markieren die Zeilen, in denen sie gleich w sind. Zu jeder dieser Zeilen bilden wir die Konjunktion der Aussagensymbole bzw. negierten Aussagensymbole A_i, wobei wir A_i genau dann negieren, wenn in der Zeile ein f in der i-ten Spalte steht.
Die Formel ψ sei dann die Disjunktion all dieser Konjunktionen.
Damit ist ψ automatisch in disjunktiver Normalform und enthält nur die Aussagensymbole, die auch φ enthält.
Da eine Disjunktion genau dann wahr ist, wenn eines ihrer Glieder wahr ist, und eine Konjunktion genau dann wahr ist, wenn alle ihre Glieder wahr sind, hat ψ dann ebenfalls in den markierten Zeilen den Wahrheitswert w und in

den anderen Zeilen den Wahrheitswert f. Somit ist $\varphi \longleftrightarrow \psi$ eine Tautologie und damit sind nach Satz 2.12 φ und ψ logisch–äquivalent.

Wir müssen nun noch den Fall betrachten, dass keine der Variablen $x_1, \ldots, x_{2^n}$ gleich w ist. Dann können wir die Konstruktion von ψ nicht durchführen. In diesem Fall ist φ eine Kontradiktion und somit logisch-äquivalent zu jeder anderen Kontradiktion. Wir nehmen dann $A_i \wedge \neg A_i$ als ψ, wobei A_i ein Aussagensymbol ist, das in ψ vorkommt. □

Wir veranschaulichen die Konstruktion an einem
Beispiel:
Gesucht ist die disjunktive Normalform von $(A \vee B) \rightarrow C$.
Wir stellen also zunächst die Wahrheitstafel auf:

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	f	w

In der 1., 3., 5., 7. und 8. Zeile steht ein w. Dies entspricht den folgenden Konjunktionen der Aussagensymbole bzw. negierten Aussagensymbole:

$$(A \wedge B \wedge C)$$
$$(A \wedge \neg B \wedge C)$$
$$(\neg A \wedge B \wedge C)$$
$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$
$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Somit ist die gesuchte disjunktive Normalform:
$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$.

2.8 Vollständige Mengen von Junktoren

Wir haben in unsere formale Sprache $\mathcal{L}$ nur die Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\longleftrightarrow$ aufgenommen. Es gibt jedoch viele weitere Junktoren. So haben wir bereits in Abschnitt 2.2.3 die Alternative $(\varphi >\!\!-\!\!< \psi)$ kennengelernt. In Aufgabe 3 von Blatt 1 sollte man die Wahrheitstafel des Junktors Weder φ noch ψ angeben. Dieser heißt *Peirce'scher Pfeil* nach dem Logiker Charles Sanders PEIRCE und hat das Zeichen $\downarrow$. Die Wahrheitstafel ist

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Haben wir uns durch das Weglassen dieser Junktoren unnötigerweise beschränkt und wäre unsere formale Sprache ausdrucksstärker, wenn wir diese und evtl. weitere Junktoren aufnehmen würden? Könnten wir dann vielleicht neue Tautologien finden, die mit unseren bisherigen fünf Junktoren gar nicht ausdrückbar sind?

Die Antwort ist „Nein". Was die Alternative und den Peirce'schen Pfeil betrifft, so sieht man recht leicht, dass sie sich durch unsere bisherigen Junktoren ausdrücken lassen.

(1) $\varphi >\!\!-\!\!< \psi$ ist logisch äquivalent zu $\neg(\varphi \longleftrightarrow \psi)$. Wir können die Alternative also mit $\neg$ und $\longleftrightarrow$ ausdrücken.

(2) $\varphi \downarrow \psi$ ist logisch–äquivalent zu $\neg(\varphi \vee \psi)$. Daher wird der Junktor $\downarrow$ auch NOR genannt. Weil dies nach dem de–Morgan'schen–Gesetz logisch–äquivalent zu $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ist, heißt er auch *Negatkonjunktion.*

Durch die Hinzunahme dieser Junktoren wird unsere Sprache also nicht ausdrucksstärker. Es gibt jedoch $2^{2^2} = 2^4 = 16$ zweistellige Junktoren. Müssen wir bei allen einzeln nachprüfen, ob sie durch $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\longleftrightarrow$ ausdrückbar sind?

Außerdem gibt es natürlich auch dreistellige Junktoren, z. B. das dreistellige „Entweder ... oder" mit der Wahrheitstafel.

φ	ψ	θ	$\mathsf{E}(\varphi,\psi,\theta)$
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	w
f	w	w	f
f	w	f	w
f	f	w	w
f	f	f	f

Wir können aber auch vier–, fünf– und sechsstellige Junktoren betrachten. Zu jeder natürlichen Zahl n existieren n-stellige Junktoren — und zwar 2^{2^n} viele.
Somit gibt es $2^{2^3} = 2^8 = 256$ dreistellige Junktoren, $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$ vierstellige Junktoren und bereits $2^{2^5} = 2^{32}$ fünfstellige Junktoren, das sind ca. 4,3 Milliarden.
Müssen wir bei all diesen nachprüfen, ob sie durch $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\longleftrightarrow$ ausdrückbar sind?

Glücklicherweise nicht. Wir können nämlich jeden Junktor allein mit $\neg, \wedge$ und $\vee$ ausdrücken.
Denn wenn $\mathbf{J}$ ein n-stelliger Junktor ist, so stellen wir seine Wahrheitstafel auf:

φ_1	φ_2	$\ldots$	φ_n	$\mathbf{J}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$
w	w	$\ldots$	w	x_1
w	w	$\ldots$	f	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f	f	$\ldots$	w	x_{2^n-1}
f	f	$\ldots$	f	x_{2^n}

Nach dem Verfahren aus Satz 2.16 erhalten wir dann eine Formel in disjunktiver Normalform, die zu $\mathbf{J}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$ logisch–äquivalent ist. Diese enthält nur die Junktoren $\neg, \wedge$ und $\vee$.

Definition 2.17 Eine Menge von Junktoren heißt *vollständig*, falls sich jeder beliebige Junktor mit Hilfe von Junktoren dieser Menge ausdrücken lässt.

Satz 2.18 *(i)* $\{\neg, \wedge\}$ *ist eine vollständige Menge von Junktoren.*

(ii) $\{\neg, \vee\}$ *ist eine vollständige Menge von Junktoren.*

(iii) $\{\neg, \rightarrow\}$ *ist eine vollständige Menge von Junktoren.*

Beweis: (i) Nach obiger Argumentation lässt sich jeder Junktor mit Hilfe von $\neg, \wedge$ und $\vee$ ausdrücken.
Da $\varphi \vee \psi \mathrel{=\!\!|} \models \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ist, lässt sich $\vee$ durch $\neg$ und $\wedge$ ausdrücken.
Folglich lässt sich jeder Junktor mit Hilfe von $\neg$ und $\wedge$ ausdrücken.

(ii) und (iii): Übungsaufgabe. $\square$

Bemerkung: Man könnte nun vermuten, dass auch $\{\neg, \longleftrightarrow\}$ eine vollständige Menge von Junktoren ist. Das ist jedoch nicht der Fall. Man kann beweisen, dass man beispielsweise die Implikation $\rightarrow$ nicht allein durch $\neg$ und $\longleftrightarrow$ ausdrücken kann.

Satz 2.19 *Die Menge* $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow\}$ *ist keine vollständige Menge von Junktoren.*

Beweis: Für alle diese vier Junktoren gilt, dass in der obersten Zeile ihrer Wahrheitstafel der Wahrheitswert w steht. Damit gilt für jede Formel, die nur diese Junktoren enthält, dass in der obersten Zeile ihrer Wahrheitstafel ein w stehen muss.
Folglich lässt sich z. B. die Negation oder die Alternative nicht mittels dieser Junktoren ausdrücken. $\square$

Bemerkung: Es gibt auch vollständige Mengen von Juktoren, die die Negation nicht enthalten, z. B. $\{\vee, \longleftrightarrow, >\!\!\!-\!\!\!<\}$ (vgl. Übungsblatt 5).

Es gibt auch vollständige Mengen von Junktoren, die nur aus einem einzigen Junktor bestehen. Das hat bereits Anfang des 20. Jahrhunderts C. S. Peirce erkannt, der dies allerdings erst 1933 publizierte.
1913 zeigte Henry Maurice Sheffer, dass der Junktor $|$ mit der folgenden Wahrheitstafel vollständig ist.

φ	ψ	$\varphi \mid \psi$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Man nennt diesen Junktor *Sheffer–Strich* oder *Exklusion*. Neben dem Zeichen $\mid$ ist auch $\uparrow$ üblich. Da $\varphi \mid \psi \mathrel{=\!\mid} \models \neg(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid} \models (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ gilt, heißt der Sheffer–Strich auch NAND oder *Negatdisjunktion*.
Wir zeigen nun, dass sowohl die Menge $\{\mid\}$ als auch die Menge $\{\downarrow\}$ eine vollständige Menge von Junktoren ist.

Satz 2.20 *(i) Mit dem Sheffer–Strich $\mid$ lässt sich jeder Junktor ausdrücken.*

(ii) Mit dem Peirce'schen Pfeil $\downarrow$ lässt sich jeder Junktor ausdrücken.

Beweis: (i) Wir können $\neg$ und $\wedge$ durch $\mid$ ausdrücken: $\neg\varphi \mathrel{=\!\mid} \models (\varphi \mid \varphi)$ und $\varphi \wedge \psi \mathrel{=\!\mid} \models \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\mid} \models \neg(\varphi \mid \psi) \mathrel{=\!\mid} \models (\varphi \mid \psi)\big|(\varphi \mid \psi)$.
Da $\{\neg, \wedge\}$ eine vollständige Menge von Junktoren ist, ist somit auch $\{\mid\}$ vollständig.

(ii): Übungsaufgabe. $\square$

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass der Sheffer–Strich und der Peirce'sche Pfeil die einzigen zweistelligen Junktoren mit dieser Eigenschaft sind. D. h. wenn **J** ein zweistelliger Junktor ist, so dass $\{\mathbf{J}\}$ eine vollständige Menge von Junktoren ist, dann muss **J** entweder der Sheffer–Strich oder der Peirce'sche Pfeil sein.

Als **Beispiele** drücken wir noch die Disjunktion und die Implikation mit Hilfe des Sheffer–Strichs aus:
(1) $\varphi \vee \psi \mathrel{=\!\mid} \models \neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi \mathrel{=\!\mid} \models \neg\varphi \mid \neg\psi \mathrel{=\!\mid} \models (\varphi \mid \varphi)\big|(\psi \mid \psi)$.
(2) $\varphi \to \psi \mathrel{=\!\mid} \models (\varphi \mid \psi)\big|\varphi$,
wie man an der Wahrheitstafel sieht:

φ	ψ	$\varphi \mid \psi$	$(\varphi \mid \psi) \mid \varphi$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	w	w

2.9 Ein Aussagen–Kalkül

In Abschnitt 2.6 haben wir gesehen, dass die Aussagenlogik entscheidbar ist. Mit Hilfe der Wahrheitstafel können wir von jeder aussagenlogischen Formel feststellen, ob sie tautologisch ist oder nicht.
Damit können wir auch feststellen, ob eine Formel φ aus den Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$ folgt. Denn nach dem Export–Import–Theorem (Satz 2.9) ist dies genau dann der Fall, wenn die Formel $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist. Wir haben also ein Verfahren, mit dem wir das aussagenlogische Folgern vollständig im Griff haben. Allerdings entspricht dieses Verfahren nicht dem Schließen, wie es in den formalen Wissenschaften üblich ist. Und auch, wenn wir in unserem Alltag logische Schlüsse ziehen, so hat dies nur sehr wenig mit dem Folgerungsbegriff gemäß Abschnitt 2.4.4 zu tun. Denn normalerweise benutzen wir Regeln, die wir als logisch–gültig ansehen. Wenn wir beispielsweise aus den beiden Aussagen

> Wenn Peter den Logik–Schein bekommen hat, dann macht er ein Fest.

und

> Peter hat den Logik–Schein bekommen.

schließen, dass Peter nun ein Fest machen wird, so stellen wir keine Wahrheitstafel auf, sondern wir benutzen die Regel

> Aus φ und $\varphi \to \psi$ darf man ψ schließen.

Man „folgert“ nicht, sondern man leitet ab. Dabei startet man von gegebenen Aussagen und schließt daraus nach bestimmten Regeln auf weitere Aussagen.

In einer *Ableitung* (*Herleitung* oder *Deduktion*) einer Formel ψ aus den Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$ schreibt man einzelne Formeln untereinander, wobei eine Formel nur dann hingeschrieben werden darf, wenn sie eine Prämisse (d. h. eine der Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$) oder ein logisches Gesetz (Axiom) ist, oder wenn sie unter Verwendung gewisser Schluss–Regeln aus den vorangegangenen Aussagen geschlossen werden kann.
Die exakte Fassung des Begriffs der Herleitung geschieht durch Angabe eines Kalküls, d. h. eines Regelsystems mit rein mechanisch ausführbaren Regeln, mit dessen Hilfe man schrittweise Beweisfiguren erzeugen kann.

2.9.1 Der Felgner–Kalkül

Der Kalkül, den wir hier verwenden wollen, entstammt einem bislang noch unveröffentlichten Manuskript von Prof. Dr. Ulrich Felgner (vgl. [2]). [4]
Sein großer Vorteil liegt darin, dass er mit nur sehr wenigen und sehr einfachen Axiomen und Schluss–Regeln auskommt.
Er benötigt nur die beiden Axiome

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

und

$$\neg\psi \to (\psi \to \varphi)$$

und die beiden Schluss–Regeln

> *Modus Ponens:* Von φ und $\varphi \to \psi$ darf man zu ψ übergehen.

und

> *Fallunterscheidung:* Von $\varphi \to \psi$ und $\neg\varphi \to \psi$ darf man zu ψ übergehen.

Außerdem kommen noch zwei weitere Regeln dazu, die sich auf den Umgang mit den Prämissen beziehen.

[4] Da es sich um eine neue und originelle Axiomatisierung der Aussagenlogik handelt, sollte der Kalkül nur mit dem Hinweis auf die geistige Urheberschaft von Herrn Felgner zitiert werden.

Wie man sieht, tauchen nur die beiden Junktoren $\neg$ und $\rightarrow$ in den Axiomen auf. Da wir in 2.18 gesehen haben, dass $\{\neg, \rightarrow\}$ eine vollständige Menge von Junktoren ist, reicht dies auch aus. Wenn wir Formeln, die weitere Junktoren enthalten, im Kalkül herleiten möchten, so müssen wir zunächst diese Junktoren mittels $\neg$ und $\rightarrow$ ausdrücken.

Den **Modus Ponens** (eigentlich *modus ponendo ponens*) haben wir im Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts angewandt. Diese Regel ist bereits seit der Antike bekannt. Der Modus Ponens besagt, dass durch „Setzen“ (d. h. behaupten) der Vorderformel einer Implikation auch die Hinterformel „gesetzt“ wird.
Apuleius von Madaura, der im 2. Jahrhundert lebte, umschrieb in seinem Buch *Peri Hermeneias* den Modus Ponens wie folgt:

> *Die Stoiker benutzen Zahlen anstelle von Buchstaben, beispielsweise so: Wenn das Erste, dann das Zweite; aber es gilt das Erste, also gilt auch das Zweite.*

Er gibt dort auch das Beispiel:

> *Wenn es Tag ist, ist es hell. Nun ist es aber Tag. Also ist es hell.*

Ein hübsches Beispiel findet sich im dem Stück *Der Kontrabaß* von Patrick Süskind. Der Kontrabassist sagt dort:

> *Also ich sage Ihnen, diese Sängerin, ... sie heißt übrigens Sarah, ich sage Ihnen, die kommt einmal ganz groß raus. Wenn ich was verstehe von Musik, und ich verstehe etwas davon, dann kommt die ganz groß raus.* [5]

Der Kontrabassist behauptet, dass Sarah einmal ganz groß rauskommen wird. Der Beweis geht wie folgt: (1) *Wenn ich was verstehe von Musik, dann kommt die ganz groß raus.* und (2) *Ich verstehe was von Musik.*. Daraus die Behauptung zu Schließen ist eine Anwendung des Modus ponens.

Die zweite Regel formalisiert das übliche Beweis–Verfahren durch Fallunterscheidung. Wenn man ψ bewiesen hat, falls φ gilt, und wenn man ψ auch bewiesen hat, falls φ nicht gilt, dann hat man ψ schlechtin bewiesen.

[5] Alle Zitate nach Felgner [2].

Wir geben nun den Kakül an, in dem wir unsere Herleitungen durchführen werden. Eine Herleitung besteht dabei aus Beweiszeilen. Eine Beweiszeile ist eine Zeichenreihe, die aus einer Liste $\psi_1, \ldots, \psi_n$ von Prämissen und einer Formel φ, die als Konsequenz dieser Prämissen angesehen werden soll, besteht. Dazwischen steht das Trennungszeichen $\vdash$.
Eine Beweiszeile hat also immer die Form $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$. Dabei darf $n = 0$ sein, in diesem Fall schließen wir φ aus der leeren Liste: $\vdash \varphi$.

Definition 2.21 Der Felgner–Kalkül:

Regel (R 1) Wenn Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist und φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$ hinschreiben.

Regel (R 2) Wenn Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist und φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$ hinschreiben.

Regel (R 3) Wenn Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist und φ in dieser Liste vorkommt, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben.

Regel (R 4) (Verdünnungs–Regel) Wenn man $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben darf und Γ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist, in der mindestens alle Formeln aus Δ vorkommen, dann darf man auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ hinschreiben.

Regel (R 5) (Modus ponens) Wenn Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist, φ und ψ aussagenlogische Formeln sind und man $\Delta \vdash \varphi$ und auch $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \psi$ hinschreiben.

Regel (R 6) (Fallunterscheidung) Wenn Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln ist, φ und ψ aussagenlogische Formeln sind und man $\Delta, \varphi \vdash \psi$ und auch $\Delta, \neg\varphi \vdash \psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \psi$ hinschreiben.

Definition 2.22 (i) Eine *Herleitung* (oder *Ableitung* oder *Deduktion*) ist eine endliche Folge von Beweiszeilen, wobei jede dieser Zeilen durch die Anwendung von einer der Regeln (R 1) bis (R 6) gewonnen wurde.

(ii) Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n$ und φ aussagenlogische Formeln. Wir sagen, dass *φ aus $\psi_1, \ldots, \psi_n$ herleitbar ist*, wenn es eine Herleitung gibt, in deren letzten Zeile die Sequenz $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ steht.

Wir schreiben auch dafür: $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$

Einen Deduktionskalkül für die Aussagenlogik hat zuerst Gottlob Frege 1879 in seiner *Begriffsschrift* aufgestellt. Sein Kalkül enthält sechs Tautologien und als einzige Schlussregel den modus ponens.
Auch das Zeichen $\vdash$ geht auf Freges Begriffsschrift zurück.

Als ein erstes Beispiel für eine Herleitung im Felgner–Kalkül zeigen wir nun, dass sich die Formel $\varphi \to \varphi$ aus jeder Liste von Prämissen herleiten lässt:

Proposition 2.23 *Sei Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln und φ eine aussagenlogische Formel. Dann gilt: $\Delta \vdash \varphi \to \varphi$.*

Beweis: Hier die Herleitung im Felgner–Kalkül:

(i)	Δ, φ	$\vdash$	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	nach (R 1),
(ii)	Δ, φ	$\vdash$	φ	nach (R 3),
(iii)	Δ, φ	$\vdash$	$\varphi \to \varphi$	aus (i) und (ii) mit (R 5),
(iv)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	nach (R 2),
(v)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	nach (R 3),
(vi)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\varphi \to \varphi$	aus (iv) und (v) mit (R 5),
(vii)	Δ	$\vdash$	$\varphi \to \varphi$	aus (iii) und (vi) mit (R 6).

□

Insbesondere ist $\varphi \to \varphi$ also auch aus der leeren Liste von Prämissen herleitbar, d. h. $\vdash \varphi \to \varphi$. Wir nennen solche Formeln *beweisbare Formeln.*

Offensichtlich ist ein Kalkül nur dann sinnvoll, wenn die beweisbaren Formeln Tautologien sind. Diese Forderung ist Teil der sogenannten Korrektheit des Kalküls.

2.9.2 Die Korrektheit des Kalküls

Definition 2.24 Ein Kalkül heißt *korrekt*, wenn er die folgende Bedingung erfüllt: Wenn Δ eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln ist und φ eine aussagenlogische Formel ist, so dass $\Delta \vdash \varphi$ gilt, dann gilt auch $\Delta \models \varphi$.
Das heißt, wenn die Formel φ aus der Menge Δ im Kalkül herleitbar ist, dann folgt φ auch aus Δ im Sinne des Folgerungsbegriffs aus 2.4.4.
Insbesondere sind also sämtliche im Kalkül beweisbaren Formeln Tautologien.

Eine nicht korrekte Regel wäre beispielsweise: Wenn man $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben darf, dann auch $\Delta \vdash \varphi \to \psi$. Denn mit dieser Regel und dem modus ponens könnten wir $\varphi \vdash \neg\varphi$ hinschreiben. Damit könnten wir aus jeder Formel ihre Negation herleiten. Ein Kalkül, der so etwas erlaubt, ist offensichtlich kein sinnvoller Kalkül.

Wir beweisen nun die Korrektheit des Felgner–Kalküls. Dazu müssen wir erstens zeigen, dass die beiden Axiome des Kalküls aus jeder Prämissenmenge folgen, d. h. dass sie Tautologien sind. Zweitens müssen wir zeigen, dass die Regeln es nur erlauben, Formeln herzuleiten, die aus den Prämissen auch folgen. Da jede Herleitung im Kalkül aus endlich vielen Anwendungen der Regen besteht, gilt damit dann, dass wir nur Formeln herleiten können, die Folgerungen aus der Prämissenmenge sind.

Satz 2.25 (Korrektheitssatz)
Der Felgner–Kalkül ist korrekt.

Beweis: Sei Δ eine endliche Liste von aussagenlogischen Formeln und φ eine aussagenlogische Formel. Es gelte $\Delta \vdash \varphi$.
Wir müssen zeigen, dass dann $\Delta \models \varphi$ gilt.
Aus $\Delta \vdash \varphi$ folgt, dass eine Herleitung von φ aus der Prämissenmenge Δ existiert. Diese besteht aus einer endlichen Folge von Beweiszeilen, die nach den Regeln (R 1) bis (R 6) gebildet wurden.
Wir zeigen, dass man mit diesen Regeln aus einer Prämissenmenge nur Formeln herleiten kann, die auch Folgerungen aus dieser Menge sind. Damit ist dann jede der Beweiszeilen korrekt und somit auch die Herleitung von φ insgesamt.

Die ersten beiden Regeln besagen, dass wir die Formeln $\psi \to (\theta \to \psi)$ bzw. $\neg\theta \to (\theta \to \psi)$ aus jeder Prämissenmenge Γ herleiten dürfen. Diese sind jedoch beide Tautologien, wie man durch Aufstellen der Wahrheitstafel sofort sieht. Also folgen sie aus Γ.

Die Korrektheit der Regeln (R 3) und (R 4) folgt direkt aus der Definition des Folgerungsbegriffs.

Beim Modus Ponens (R 5) setzen wir voraus, dass $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \psi \to \theta$ hingeschieben werden dürfen. Die Regel erlaubt es uns, dann $\Gamma \vdash \theta$ hinzuschreiben.
Wir dürfen also $\Gamma \models \psi$ und $\Gamma \models \psi \to \theta$ voraussetzen und müssen zeigen, dass dann auch $\Gamma \models \theta$ gilt.
Die Voraussetzung besagt, dass jede Wahrheitswertzuordnung F, die sämtliche Elemente von Γ mit dem Wahrheitswert w belegt auch ψ und $\psi \to \theta$ mit dem Wahrheitswert w belegt.
Doch aus $F(\psi \to \theta) = \mathsf{w}$ folgt nach Definition des Wahrheitswerts einer Implikation, dass $F(\psi) = \mathsf{f}$ oder $F(\theta) = \mathsf{w}$ gelten muss. Da aber F die Formel ψ mit dem Wahrheitswert w belegt, ergibt sich $F(\theta) = \mathsf{w}$.
Damit gilt: $\Gamma \models \theta$.

Bei der Fallunterscheidung (R 6) setzen wir voraus, dass $\Gamma, \psi \vdash \theta$ und $\Gamma, \neg\psi \vdash \theta$ hingeschieben werden dürfen. Die Regel erlaubt es uns, dann $\Gamma \vdash \theta$ hinzuschreiben.
Wir dürfen also $\Gamma, \psi \models \theta$ und $\Gamma, \neg\psi \models \theta$ voraussetzen und müssen zeigen, dass dann auch $\Gamma \models \theta$ gilt.
Betrachten wir eine Wahrheitswertzuordnung F, die sämtliche Elemente von Γ mit dem Wahrheitswert w belegt.
Falls auch $F(\psi) = \mathsf{w}$ gilt, so folgt $F(\theta) = \mathsf{w}$, weil wir $\Gamma, \psi \models \theta$ vorausgesetzt haben.
Falls dagegen $F(\psi) = \mathsf{f}$ gilt, so folgt $F(\theta) = \mathsf{w}$, weil wir auch $\Gamma, \neg\psi \models \theta$ vorausgesetzt haben.
Also gilt immer $F(\theta) = \mathsf{w}$.
Insgesamt ergibt sich: $\Gamma \models \theta$.

Damit ist die Korrektheit des Felgner–Kalküls bewiesen. $\square$

2.9.3 Herleitungen im Kalkül

In diesem Abschnitt geben wir einige Beispiele für Herleitungen im Felgner–Kalkül.
Wir beginnen mit dem sogenannten Deduktions–Theorem, das das Finden von Herleitungen oftmals erleichtert. Der Name geht auf David HILBERT und Paul BERNAYS zurück.

Satz 2.26 (Deduktions–Theorem)
Für alle aussagenlogischen Formeln φ und ψ und alle endliche Listen Δ von aussagenlogischen Formeln gilt:

$$\Delta \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \Delta, \varphi \vdash \psi.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst: Wenn $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ gilt, dann folgt $\Delta, \varphi \vdash \psi$.

(i)	Δ	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	nach Voraussetzung,
(ii)	Δ, φ	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	nach (R 4),
(iii)	Δ, φ	$\vdash$	φ	nach (R 3),
(iv)	Δ, φ	$\vdash$	ψ	aus (ii) und (ii) mit (R 5).

Nun zeigen wir: Wenn $\Delta, \varphi \vdash \psi$ gilt, dann folgt $\Delta \vdash \varphi \to \psi$.

(i)	Δ, φ	$\vdash$	ψ	nach Voraussetzung,
(ii)	Δ, φ	$\vdash$	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	nach (R 1),
(iii)	Δ, φ	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	aus (i) und (ii) mit (R 5),
(iv)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	nach (R 3),
(v)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	nach (R 2),
(vi)	$\Delta, \neg\varphi$	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	aus (iv) und (v) mit (R 5),
(vii)	Δ	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	aus (iii) und (vi) mit (R 6).

□

Man vergleiche das Deduktions–Theorem mit dem Export–Import–Theorem 2.9.

Proposition 2.27 *Für jede aussagenlogische Formel φ gilt:*

(a) $\vdash (\neg\neg\varphi) \to \varphi$*,*

(b) $\vdash \varphi \to (\neg\neg\varphi)$*.*

Beweis: (a):

$$
\begin{array}{llcll}
\text{(i)} & & \vdash & (\neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi) \to \varphi) & \text{nach (R 2),} \\
\text{(ii)} & \neg\neg\varphi & \vdash & (\neg\varphi) \to \varphi & \text{aus (i) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(iii)} & \neg\neg\varphi, \neg\varphi & \vdash & \varphi & \text{aus (ii) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(iv)} & \neg\varphi, \neg\neg\varphi & \vdash & \varphi & \text{aus (iii) nach (R 4),} \\
\text{(v)} & \neg\varphi & \vdash & (\neg\neg\varphi) \to \varphi & \text{aus (iv) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(vi)} & & \vdash & \varphi \to ((\neg\neg\varphi) \to \varphi) & \text{nach (R 1),} \\
\text{(vii)} & \varphi & \vdash & (\neg\neg\varphi) \to \varphi & \text{aus (vi) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(viii)} & & \vdash & (\neg\neg\varphi) \to \varphi & \text{aus (v), (vii) mit (R 6).}
\end{array}
$$

(b):

$$
\begin{array}{llcll}
\text{(i)} & & \vdash & (\neg\neg\varphi) \to (\varphi \to (\neg\neg\varphi)) & \text{nach (R 1),} \\
\text{(ii)} & \neg\neg\varphi & \vdash & \varphi \to (\neg\neg\varphi) & \text{aus (i) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(iii)} & & \vdash & (\neg\varphi) \to (\varphi \to (\neg\neg\varphi)) & \text{nach (R 2),} \\
\text{(iv)} & \neg\varphi & \vdash & \varphi \to (\neg\neg\varphi) & \text{aus (iii) mit Ded.–Thm.,} \\
\text{(v)} & & \vdash & \varphi \to (\neg\neg\varphi) & \text{aus (ii), (iv) mit (R 6).}
\end{array}
$$

□

Nun geben wir aine Herleitung für die Kontrapositionsregel:

Proposition 2.28 *Für alle aussagenlogischen Formeln* φ, ψ *gilt:*

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

Beweis:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{(i)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \varphi & \text{nach (R 3),}\\
\text{(ii)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \varphi \to \psi & \text{nach (R 3),}\\
\text{(iii)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \psi & \text{aus (i), (ii) mit (R 5),}\\
\text{(iv)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \neg\psi & \text{nach (R 3),}\\
\text{(v)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & (\neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi) & \text{nach (R 2),}\\
\text{(vi)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \psi \to \neg\varphi & \text{aus (iv), (v) mit (R 5),}\\
\text{(vii)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi & \vdash & \neg\varphi & \text{aus (iii), (vi) mit (R 5),}\\
\text{(viii)} & \varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\varphi & \vdash & \neg\varphi & \text{nach (R 3),}\\
\text{(ix)} & \varphi \to \psi, \neg\psi & \vdash & \neg\varphi & \text{aus (vii), (viii) mit (R 6).}
\end{array}
$$

Daraus folgt mit zweimaliger Anwendung des Deduktionstheorems

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

□

Die folgende Schluss–Regel trägt den Namen *Modus Tollens* (eigentlich Modus Tollendo Tollens) und ist wie der Modus Ponens seit der Antike bekannt. Der Modus Tollens besagt, dass durch „Aufheben“ (d. h. Behauptung der Negation) der Hinterformel einer Implikation die Vorderformel „aufgehoben“ wird.

Proposition 2.29 (Modus Tollens)
Für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ und alle endlichen Listen Σ, Δ von aussagenlogischen Formeln gilt:
Wenn $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ und $\Delta \vdash \neg\psi$ gilt, dann gilt auch $\Sigma, \Delta \vdash \neg\varphi$.

Beweis:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{(i)} & \Sigma & \vdash & \varphi \to \psi & \text{nach Voraussetzung,}\\
\text{(ii)} & \Sigma & \vdash & (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & \text{nach obiger Prop. 2.28,}\\
\text{(iii)} & \Sigma & \vdash & \neg\psi \to \neg\varphi & \text{aus (i), (ii) mit (R 5),}\\
\text{(iv)} & \Sigma, \Delta & \vdash & \neg\psi \to \neg\varphi & \text{aus (iii) mit (R 4),}\\
\text{(v)} & \Sigma, \Delta & \vdash & \neg\psi & \text{nach Vor. und (R 4),}\\
\text{(vi)} & \Sigma, \Delta & \vdash & \neg\varphi & \text{aus (iv), (v) mit (R 5).}
\end{array}
$$

□

2.9.4 Die Vollständigkeit des Kalküls

In 2.9.2 haben wir gesehen, dass der Felgner–Kalkül korrekt ist, d. h. wir können in ihm aus einer Prämissenmenge nur Formeln herleiten, die auch aus dieser folgen.
Es gilt auch die umgekehrte Aussage, nämlich dass jede Formel, die aus einer Menge von Formeln folgt, auch im Kalkül herleitbar ist. Wenn wir also eine beliebige Menge von Formeln Δ und eine beliebige Formel φ haben, so dass $\Delta \models \varphi$ (gemäß der Definition 2.4.4 gilt), so gibt es eine Herleitung von φ im Felgner–Kalkül aus der Menge Δ.
Mit anderen Worten: Wenn $\Delta \models \varphi$ gilt, so gilt auch $\Delta \vdash \varphi$.
Unser Kalkül ist also „reichhaltig“ genug, um für Folgerung herleiten zu können. Man nennt diese Eigenschaft *Vollständigkeit* einer Kalküls.

Satz 2.30 (Vollständigkeitssatz)
Der Felgner–Kalkül ist vollständig.

Einen Beweis dieses Satzes wollen wir an dieser Stelle aus Zeitgründen nicht geben. Wir verweisen statt dessen auf [2, § 7].

Wir haben erwähnt, dass der erste aussagenlogische Kalkül von Gottlob FREGE aufgestellt wurde, dessen Vollständigkeit wurde zuerst von Paul BERNAYS 1918 in seiner Habilitationsschrift bewiesen.

Bemerkung: Der Vollständigkeitssatz und der Korrektheitssatz ergeben zusammen, dass für eine beliebige Menge von Formeln Δ und eine beliebige Formel φ gilt:

$$\Delta \models \varphi \text{ genau dann, wenn } \Delta \vdash \varphi.$$

Das bedeutet, dass der Felgner–Kalkül das inhaltliche Folgern adäquat wiedergibt. Man nennt dies daher auch die *Adäquatheit* eines Kalküls.

Zum Schluss führen wir noch den wichtige Begriff der Widerspruchsfreiheit ein.

Definition 2.31 Eine Menge Σ von Formeln heißt *widerspruchsfrei* (oder *konsistent*), wenn es mindestens eine Formel gibt, die nicht aus Σ herleitbar ist.

Eine Menge Σ von Formeln heißt *widerspruchsvoll* (oder *inkonsistent*), wenn jede Formel aus Σ herleitbar ist.

Man sieht bereits an der Definition, dass widerspruchsvolle Formelmengen für die Logik uninteressant sind. Sie sind auch genau die Mengen von Formeln, aus denen sich ein Widerspruch herleiten lässt, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 2.32 *Für jede Menge Σ von Formeln ist äquivalent:*

(i) Σ ist widerspruchsvoll,

(ii) Es gibt eine Formel φ mit $\Sigma \vdash \varphi$ und $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Wenn Σ widerspruchsvoll ist, so lässt sich nach der Definition dieses Begriffs jede Formel aus Σ herleiten, also gilt insbesondere (ii).

„$\Leftarrow$“: Sei ψ eine beliebige Formel. Wir müssen zeigen, dass ψ aus Σ herleitbar ist.
Nach Voraussetzung existiert eine Formel φ mit $\Sigma \vdash \varphi$ und $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
Wir geben nun eine Herleitung von ψ aus Σ an:

(i)	Σ	$\vdash$	$(\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	nach (R 2),
(ii)	Σ	$\vdash$	$\neg\varphi$	nach Voraussetzung,
(iii)	Σ	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	aus (i) und (ii) mit (R 5),
(iv)	Σ	$\vdash$	φ	nach Voraussetzung,
(v)	Σ	$\vdash$	ψ	aus (iii) und (iv) mit (R 5).

$\square$

Wir zeigen noch, dass sich aus dem Vollständigkeitssatz auch die Gleichwertigkeit der Begriffe *Erfüllbarkeit* (vgl. Definition 2.7) und *Widerspruchsfreiheit* ergibt.

Satz 2.33 *Für eine Menge Σ von Formeln gilt:*
Σ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn Σ erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die zur Behauptung äquivalente Aussage:
Σ ist genau dann widerspruchsvoll, wenn Σ nicht erfüllbar ist.
„$\Rightarrow$": Wenn Σ widerspruchsvoll ist, so gilt nach obiger Proposition, dass eine Formel φ existiert mit $\Sigma \vdash \varphi$ und $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
Nach dem Korrektheitssatz gilt also $\Sigma \models \varphi$ und $\Sigma \models \neg\varphi$. Dann kann es keine Wahrheitswertzuordnung F geben, die jedes Element von Σ mit dem Wahrheitswert w belegt. Denn sonst würde sowohl $F(\varphi) = \mathsf{w}$ als auch $F(\varphi) = \mathsf{f}$ folgen, ein Widerspruch.
Somit ist Σ nicht erfüllbar.

„$\Leftarrow$": Sei Σ nicht erfüllbar, d. h. es gibt keine Wahrheitswertzuordnung F, die jedes Element von Σ mit dem Wahrheitswert w belegt.
Sei φ eine beliebige Formel. Dann folgt aus der Definition des Folgerungsbegriffs (2.8), dass $\Sigma \models \varphi$ gilt.
Nach dem Vollständigkeitssatz gilt also auch $\Sigma \vdash \varphi$.
Folglich ist jede Formel aus Σ herleitbar, d. h. Σ ist widerspruchsvoll. $\square$

Die Äquivalenz von Erfüllbarkeit und Widerspruchsfreiheit ist sehr interessant. Denn sie besagt ja Folgendes: Wenn sich aus einer Menge von Formeln nicht jede Formel im Kakül herleiten lässt, so existiert eine Wahrheitswertzuordnung, die sämtlichen Formeln aus dieser Menge den Wahrheitswert w zuordnet (und auch umgekehrt).
Die Widerspruchsfreiheit ist ein *syntaktischer* Begriff, denn sie bezieht sich auf den Begriff der Herleitung in einem Kalkül. Dagegen ist die Erfüllbarkeit ein *semantischer* Begriff, weil sie über Wahrheitswertzuordnungen definiert wird.

Kapitel 3

Prädikatenlogik

Zu Beginn der Vorlesung haben wir für einen logisch korrekten Schluss das folgende Beispiel gegeben.

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
___
Also ist Sokrates sterblich.

Wenn wir die aussagenlogische Form dieser Argumentation anschauen, so erhalten wir $A, B \models C$ bzw. $A \wedge B \to C$ (vgl. Export–Import–Theorem), wobei A für „Alle Menschen sind sterblich", B für „Sokrates ist ein Mensch" und C für „Also ist Sokrates sterblich" steht.

Damit lässt sich wenig anfangen. Insbesondere können wir mit den Mitteln der Aussagenlogik nicht feststellen, dass ein Schluss der obigen Form immer gültig ist. Es gilt ja auch in der Tat, dass $A \wedge B \to C$ keine Tautologie ist, sondern eine kontingente Formel.

Der Grund für die logische Gültigkeit des Schlusses liegt in der inneren Struktur der drei Aussagen. Entscheidend ist dabei die Verwendung des Wortes „alle".

Die Aussagenlogik erlaubt es nicht, die innere Struktur der Aussage „Alle Menschen sind sterblich" wiederzugeben. Denn in der Sprache der Aussagenlogik berachten wir nur Aussagen, die aus Teilaussagen mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzt sind. Der Satz Alle Menschen sind sterblich enthält aber gar keine Junktoren. Er ist also nur durch ein Aussagensymbol formalisierbar. Dasselbe gilt für die anderen beiden Sätze, die in obigem Beispiel auftreten.

Wir wollen in diesem Kapitel eine Einführung in die *Prädikatenlogik* geben. Diese erlaubt es, Sätze obiger Bauart zu analysieren. Wir können also die innere Struktur einer Aussage der Form „Sokrates ist ein Mensch" wiedergeben. Außerdem können wir ausdrücken, dass eine Eigenschaft auf *alle* Menschen zutrifft.
Ersteres geschieht durch die Einführung von *Prädikaten*, Letzteres durch die von *Quantoren*. Beides ist für die Prädikatenlogik charakteristisch, aus diesem Grund wird sie auch *Quantorenlogik* genannt.

3.1 Prädikate und Quantoren

Wie schon bei der Aussagenlogik legen wir auch hier unseren Überlegungen zunächst die natürliche Sprache zugrunde, bevor wir eine formale Sprache einführen.

3.1.1 Prädikate

Betrachten wir die folgenden Sätze:

Sokrates ist ein Mensch.
Die Burse ist rosa.
Lola rennt.
Romeo liebt Julia.
Tübingen liegt am Neckar.
Gregor ist älter als Georg.
$0 < 1$

Wenn wir diese Sätze prädikatenlogisch analysieren, so unterscheiden wir zwischen *Individuen* und *Prädikaten*. Individuen sind: Sokrates, die Burse, Lola, Romeo, Julia, Tübingen, Neckar, Gregor, Georg, 0, 1. Die Prädikate verbinden diese Individuen zu Aussagen, sie sind also kurz gesagt einfach das, was übrig bleibt, wenn wir in obigen Sätzen die Individuen weglassen. Wie man sieht, ist der logische Begriff Prädikat anders definiert als der grammatikalische.

So ist bei dem Beispiel

> Sokrates ist ein Mensch.

„Sokrates“ ein Individuum und „ist Mensch“ ein Prädikat. Der Satz besagt dann, dass dieses Prädikat auf das Individuum Sokrates zutrifft.
Die logische Struktur obiger Aussagen wird also besser durch die folgende Form wiedergegeben:

ist Mensch (Sokrates)
ist rosa (die Burse)
rennt (Lola)
liebt (Romeo, Julia)
liegt an (Tübingen, Neckar)
ist älter als (Gregor, Georg)
$< (0, 1)$

Man sieht daran bereits, dass es ein– und zweistellige Prädikate gibt und dass bei Letzteren die Reihenfolge, in der die Individuen auftreten, wichtig ist. Denn mit

> ist älter als (Gregor, Georg)

will man etwas anderes ausdrücken als mit

> ist älter als (Georg, Gregor)

Es gibt jedoch auch Prädikate mit drei und mehr Stellen. Beispiele sind.

> Ulm liegt zwischen Stuttgart und München.
> Romeo und Julia und Gregor und Johanna sind die Großeltern von Lola.

In der Aussagenlogik haben wir Aussagensymbole statt konkreter Aussagen benutzt, ebenso benutzen wir nun *Prädikatsymbole* und *Individuenkonstanten*. So können wir den Satz “Sokrates ist ein Mensch“ durch $M(s)$ formalisieren, wobei M ein einstelliges Prädikatsymbol und s eine Individuenkonstante ist.

3.1.2 Der Allquantor

Neben der Verwendung von Prädikaten ist die von Quantoren für die Prädikatenlogik kennzeichnend. Wir wollen zwei Quantoren betrachten, den *Allquantor* und den *Existenzquantor*. Ersterer dient dazu, einen Satz der Bauart

> Alle Menschen sind sterblich.

zu formalisieren.
Das Wort „alle“ wird in unserer natürlichen Sprache allerdings mit verschiedenen Bedeutungen gebraucht, nämlich distributiv und kollektiv.
Distributiv ist der Gebrauch in dem Satz „Alle Menschen sind sterblich“. Man erkennt dies daran, dass man „alle“ durch „jeder“ ersetzen kann.
Ein Beispiel für den kollektiven Gebrauch ist

> Alle Personen in diesem Hörsaal außer dem Dozenten bilden die Hörer der heutigen Vorlesung.

Wenn man den distributiven und den kollektiven Gebrauch nicht unterscheidet, entstehen Fehler in der logischen Argumentation. Ein nettes Beispiel findet man in dem Buch *Elementary lessons in logic* von W. Stanley Jevons:

> Alle Werke Shakespeares kann man nicht an einem Tag durchlesen. ‚Hamlet‘ ist ein Werk von Shakespeare. Also kann man ‚Hamlet‘ nicht an einem Tag durchlesen.[1]

In der Logik wird „alle“ immer im distributiven Sinn gebraucht.

Wenn wir „alle“ auf das Prädikat „ist rosa“ anwenden, so erhalten wir die Aussage

> Alles ist rosa.

Wir stellen nun am Beispiel dieses Satzes dar, wie man eine Aussage in ihre prädikatenlogische Form übersetzt.
Es wurde bereits gesagt, dass wir für Prädikate Symbole verwenden. Nehmen wir also für das Prädikat „ist rosa“ das einstellige Prädikatsymbol R. Wenn z. B. s die Individuenkonstante ist, welche für „Sokates“ steht, so können wir $R(s)$ als

[1] W. Stanley Jevons: Elementary lessons in logic, London 1870, S. 318.

Sokrates ist rosa.

interpretieren.

Wir möchte jedoch nicht nur ausdrücken, dass ein bestimmtes Individuum wie Sokrates oder die Burse rosa ist, sondern wir wollen die prädikatenlogische Form des Satzes

Alles ist rosa.

angeben.
Dazu benötigt man *Individuenvariable*, die als Platzhalter für ein beliebiges Individuum betrachtet werden können. Wir verwenden x als Individuenvariable.
Die Rolle der Individuenvariablen wird deutlich, wenn wir unseren Beispielsatz übersetzen. Zunächst formulieren wir ihn wie folgt um:

Für jedes Ding gilt: Das Ding ist rosa.

Dieser Satz klingt nicht besonders elegant, man sieht ihm aber seine logische Struktur und insbesondere auch den distributiven Gebrauch des Wortes „alle" direkt an. Außerdem wird dabei das Wort „Ding" wie eine (umgangssprachliche) Variable benutzt. Wir können es also durch die Individuenvariable x ersetzen, und erhalten den Satz

Für jedes x gilt: x ist rosa.

oder mit dem Prädikatsymbol R

Für jedes x gilt: $R(x)$

Wenn wir dann noch „$\forall x$:" für den Ausdruck „Für jedes x gilt:" benutzen, so erhält man schließlich

$\forall x : R(x)$

und das ist nun die prädikatenlogische Form unseres Beispielsatzes.

Das Symbol $\forall$ ist ein umgedrehtes A, man nennt es *Allquantor*. Der Begriff *Quantor* soll dabei an *quantifizieren* erinnern, was auf das lateinische Wort *quantus* (wie groß?, wie viel?) zurückgeht. Der Ausdruck $\forall x : \ldots$ wird

für alle x gilt: ...
oder
für jedes x gilt: ...
gelesen. Aus logischer Sicht ist beides gleichbedeutend.

Der Satz

> Alle Menschen sind sterblich.

ist, was seine logische Struktur angeht, komplizierter.
Wir benötigen hier zwei einstellige Prädikatsymbole: eines für das Prädikat „ist Mensch“ und eines für „ist serblich“. Das erste soll M und das zweite S heißen.
Um den Satz in seine prädikatenlogische Form übersetzen zu können, müssen wir ihn zunächst wie folgt umformulieren:

> Für jedes Ding gilt: Wenn das Ding ein Mensch ist, dann ist das Ding sterblich.

Und wieder benutzen wir eine Individuenvariable x und erhalten

> Für jedes x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich.

Nun verwenden wir die beiden gerade erklärten Prädikatsymbole und das Symbol für den Allquantor:

> $\forall x$: (Wenn $M(x)$, dann $S(x)$)

Schließlich können wir noch den wenn..., dann...–Satz aussagenlogisch formalisieren und erhalten als prädikatenlogische Übersetzung:

$$\forall x : (M(x) \to S(x))$$

3.1.3 Der Existenzquantor

Der zweite Quantor, den wir betrachten wollen, ist der Existenzquantor. Dieser hat das Zeichen $\exists$, das ein gespiegeltes E darstellen soll. Das Symbol wurde bereits 1896 von dem italienischen Mathematiker und Logiker Guiseppe Peano eingeführt. In Analogie dazu hat der deutsche Mathematiker und Logiker Gerhard Gentzen 1934 das Zeichen $\forall$ für den Allquantor vorgeschlagen.

Mit dem Existenzquantor können wir die Ausdrücke *es existiert ein, es gibt ein, einige, manche* usw. formalisieren. Die genannten Ausdrücke können in der natürlichen Sprache durchaus unterschiedlich verwandt werden, logisch bedeuten sie jedoch alle dasselbe, nämlich dass es mindestens ein Individuum mit einer bestimmten Eigenschaft gibt.
Als Beispiel betrachten wir die Formalisierung des Satzes

> Es existiert ein Mensch.

Zunächst gehen wir wie bei obigen Übersetzungen von Allaussagen vor.

> Es gibt ein Ding, für das gilt: Das Ding ist ein Mensch.

Durch die Verwendung des Prädikatsymbols M und der Individuenvariable x ergibt sich:

> Es gibt ein x, für das gilt: $M(x)$

Wenn wir schließlich das Symbol für den Existenzquantor benutzen, erhält man:

> $\exists x : M(x)$

Wir betonen an dieser Stelle noch einmal, dass der Existenzquantor im Sinne von *Es gibt mindestens ein* verstanden wird und nicht etwa als *Es gibt genau ein*.

Als weiteres Beispiel geben wir die prädikatenlogische Form des Satzes

> Einige Menschen sind Frauen.

an.
Hier tritt ein neues einstelliges Prädikat „ist Frau" auf, für welches wir das Symbol F verwenden wollen.
Der Satz besagt, dass es etwas gibt, was sowohl ein Mensch als auch eine Frau ist. Wir müssen also

> Es gibt ein Ding, für das gilt: Das Ding ist ein Mensch und das Ding ist eine Frau.

formalisieren.
Zunächst erhalten wir:

> Es gibt ein x, für das gilt: $M(x)$ und $F(x)$.

Mit den Symbolen für den Existenzquantor und den Junktor „und“ ergibt sich:

$$\exists x\,(M(x) \wedge F(x))$$

Der Ausdruck $\exists x\,(M(x) \rightarrow F(x))$ besagt dagegen etwas völlig anderes. Das liegt an der Definition des Junktors $\rightarrow$, die wir in der Aussagenlogik gegeben haben. Gemäß dieser ist $A \rightarrow B$ unter anderem wahr, wenn A falsch ist. Das heißt die Aussage $\exists x\,(M(x) \rightarrow P(x))$ ist bereits wahr, wenn es etwas gibt, was kein Mensch ist, dabei ist völlig egal, für was das Prädikat P in dieser Aussage steht.

Ebenso ist $\forall x\,(M(x) \wedge S(x))$ keine Formalisierung der Aussage „Alle Menschen sind sterblich“ sondern der Aussage „Alles ist ein Mensch und alles ist sterblich“.

Die Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik zeigt sich erstmals, wenn wir Sätze betrachten, in denen mehr als ein Quantor vorkommt. Wir geben an dieser Stelle ein erstes Beispiel. Das Symbol L stehe für das zweistellige Prädikat „liebt“ . Damit besagt $\exists x :\ L(s, x)$, dass es jemanden gibt, den Sokrates liebt, und $\exists x :\ L(x, s)$, dass es jemanden gibt, der Sokrates liebt.
Durch die Verwendung von zwei Quantoren können wir die folgenden Ausdrücke bilden:

- Jeder liebt jeden.
  $\forall x\, \forall y :\ L(x, y)$
- Es gibt einen, der jeden liebt.
  $\exists x\, \forall y :\ L(x, y)$
- Jeder wird von jemandem geliebt.
  $\forall y\, \exists x :\ L(x, y)$
- Jeder liebt jemanden.
  $\forall x\, \exists y :\ L(x, y)$

- Es gibt einen, der von jedem geliebt wird.
  $\exists y\, \forall x : L(x, y)$
- Es gibt einen, der jemanden liebt.
  $\exists x\, \exists y : L(x, y)$

An dem Beispiel sieht man auch, dass es einen Unterschied macht, ob wir $\exists x\, \forall y \ldots$ oder $\forall y\, \exists x \ldots$ schreiben.

Schließlich gibt es noch:

- Jeder liebt sich selbst.
  $\forall x : L(x, x)$
- Es gibt einen, der sich selbst liebt.
  $\exists x : L(x, x)$

3.2 Eine formale Sprache der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt wird eine formale Sprache der Prädikatenlogik eingeführt. Wir bei der formalen Sprache der Aussagenlogik geben wir zunächst das Alphabet der Sprache an:

Definition 3.1 Das *Alphabet* der Sprache enthält die folgenden Zeichen:

(1) logische Symbole: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow, \forall, \exists$ sowie $=$,

(2) eine Menge von Individuenkonstanten,

(3) eine Menge von Prädikatsymbolen, wobei jedes Prädikatsymbol eine feste Stellenzahl hat,

(4) abzählbar unendlich viele Individuenvariable $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$,

(5) zwei Klammern, eine aufgehende (und eine zugehende).

Die Menge der Individuenkonstanten und die Menge der Prädikatsymbole dürfen kein Element gemeinsam haben. Beide dürfen auch kein Element der Menge der Individuenvariablen enthalten.
Üblicherweise benutzt man für Individuenkonstanten kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots, c_0, c_1, c_2, \ldots$ und für Prädikatsymbole große lateinische Buchstaben $P, Q, R, \ldots, P_0, P_1, P_2, \ldots$.

Im Gegensatz zur Aussagenlogik ist das Alphabet hier nicht komplett festgelegt, denn die Menge der Individuenkonstanten und die der Prädikatsymbole sind nicht vorgeschrieben. Wir erhalten so verschiedene Sprachen der Prädikatenlogik, die auch verschieden viele Individuenkonstanten und Prädikatsymbole enthalten.

Nun legen wir fest, welche Kombinationen aus Zeichen des Alphabets Ausdrücke unserer Sprache sind. Prädikatenlogische Sprachen enthalten zwei Typen von Ausdrücken: Terme und Formeln.

Definition 3.2 Die *Terme* der Sprache sind die Individuenkonstanten und die Variablen.

Definition 3.3 Die *prädikatenlogischen Formeln* der Sprache sind genau diejenigen Zeichenreihen, welche (in endlich vielen Schritten) nach folgenden Regeln gebildet werden können.

Regel 1: Wenn t_1 und t_2 Terme sind, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

Regel 2: Wenn P ein n-stelliges Prädikatsymbol und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

Regel 3: Wenn φ eine Formel ist, dann ist auch $(\neg\varphi)$ eine Formel.

Regel 4: Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ Formeln.

Regel 5: Wenn φ eine Formel und x_n eine Individuenvariable ist, dann sind $\forall x_n\, \varphi$ und $\exists x_n\, \varphi$ Formeln.

Bemerkung: Formeln, die gemäß den Regeln 1 und 2 gebildet wurde, heißen auch *atomare Formeln*, d. h. atomare Formeln enthalten keine Junktoren und keine Quantoren.

Bemerkung: Die 0-stelligen Prädikatsymbole kann man als Aussagensymbole betrachten. Wenn man dies tut, so ist die hier definierte Prädikatenlogik eine direkte Erweiterung der Aussagenlogik.

Beispiele: Das Alphabet enthalte das einstellige Prädikatsymbol P und das zweistellige Prädikatsymbol Q sowie die Individuenkonstante c.
Dann sind folgende Zeichenreihen Formeln:

(1) $P(x_0)$

(2) $\exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2))$

(3) $(P(x_0) \to \exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2)))$

(4) $\forall x_0\,(P(x_0) \to \exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2)))$

Wenn man sich das letzte Beispiel ansieht, so bemerkt man, dass ein Unterschied existiert zwischen dem Vorkommen der Variablen x_0, x_1 und dem der Variablen x_2. Erstere befinden sich im Wirkungsbereich eines Quantors, x_2 dagegen nicht. Man sagt, dass x_2 eine freie Variable der Formel ist, während x_0 und x_1 gebunden sind.

Definition 3.4 Ein Vorkommen einer Variablen x_n in einer Formel heißt *gebunden*, wenn es in einer mit einem Quantor beginnenden Teilformel $\forall x_n\,\varphi$ oder $\exists x_n\,\varphi$ liegt. Sonst heißt das Vorkommen *frei*.
Die *freien Variablen* einer Formel φ sind diejenigen Variablen, die in φ mindestens ein freies Vorkommen haben.

Beispiele:

(1) $(P(x_0) \to (Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2))$ enhält die freien Variablen x_0, x_1, x_2.

(2) $\forall x_0\,(P(x_0) \to \exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2)))$ enthält nur x_2 als freie Variable.

(3) $\forall x_0\,P(x_0) \to \exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2))$ enthält die freien Variablen x_0 und x_2. Denn die Variable x_0 ist nur in der Teilformel $\forall x_0\,P(x_0)$ gebunden, dagegen ist ihr Vorkommen in $\exists x_1\,(Q(x_0,x_1) \vee Q(c,x_2))$ frei. Eine Variable kann also in einer Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommen.

Definition 3.5 Eine Formel, die keine freien Variablen enthält, heißt *Aussage* (oder *geschlossene Formel*).
Eine Formel, die mindestens eine freie Variable enthält, heißt *offene Formel*.

Somit sind die Formeln in den obigen Beispielen (1) bis (3) alle offen. Dagegen sind $P(c)$ und $\exists x_1 \forall x_2 \, (Q(x_0, x_1) \vee Q(c, x_2))$ Aussagen.

Notation: Wenn eine Formel φ die Variablen $x_0, \ldots, x_n$ als freie Variablen enthält, so schreiben wir auch $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$.
Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Bemerkungen:
Bemerkungen: (i) Auch unsere formale Sprache der Prädikatenlogik genügt dem Kriterium der eindeutigen Lesbarkeit.
(ii) Wir übernehmen die Klammerkonventionen aus der Aussagenlogik.

3.3 Die Semantik der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt wollen wir festlegen, wann eine gegebene prädikatenlogische Formel als „wahr" bzw. als „falsch" gelten soll.
In der Aussagenlogik braucht man dazu lediglich die Aussagensymbole mit Wahrheitswerten zu belegen und erhält daraus dann den Wahrheitswert für jede aussagenlogische Formel unter dieser Belegung.
In der Prädikatenlogik ist dies nicht mehr so leicht. Hier muss man zunächst den Individuenkonstanten und den Prädikatsymbolen konkrete Individuen bzw. Prädikate zuordnen, man spricht von einer *Interpretation*. Erst dann kann bestimmt werden, ob eine Formel in Bezug auf diese Zuordnung wahr oder falsch ist. So kann der Wahrheitswert der Formel $M(s)$ erst dann festgestellt werden, wenn wir festgelegt haben, wie das Prädikatsymbol M und die Konstante s interpretiert werden soll.
Wenn M durch „ist Mensch" und s durch „Sokrates" interpretiert wird, so soll der Wahrheitswert von $M(s)$ ein anderer sein, als wenn s durch „Stuttgart" interpretiert wird.
Da wir auch den Wahrheitswert von Formeln des Typs $\exists x \, M(x)$ bestimmen wollen, müssen wir festlegen, auf welchen Bereich von Objekten sich der Existenzquantor bezieht, d. h. wo die Existenz eines solchen Objekts gefordert

wird. Offensichtlich macht es inhaltlich ein Unterschied, ob sich das $\exists x$ auf alle Lebewesen oder alle Pflanzen bezieht.

Aus diesen Gründen interpretiert man prädikatenlogische Formeln in einer sogenannten *Struktur*. Diese besteht aus einer Menge von Objekten, die *Individuenbereich* heißt, und die mindestens ein Element enthält. Die Individuenkonstanten werden dann durch Objekte dieser Menge und die Prädikatsymbole durch *Relationen* zwischen Objekten dieser Menge interpretiert.
Eine n-stellige Relation ist eine Menge von n-Tupeln $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. So ist eine einstellige Relation eine Menge von Objekten[2] (z. B. die Menge aller Menschen), eine zweistellige Relation ist eine Menge von Paaren von Objekten (z. B. die Menge aller $\langle a, b \rangle$, für die gilt, dass a älter als b ist), eine dreistellige Relation ist eine Menge von Tripeln (z. B. die Menge aller $\langle a, b, c \rangle$, für die gilt, dass a und b die Eltern von c sind).
Statt von Relationen spricht man auch von *Attributen* oder vom *Umfang eines Begriffs*.

3.3.1 Der Begriff der Struktur

Definition 3.6 Sei $\mathcal{L}$ eine prädikatenlogische Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$, wobei

(1) A eine nicht–leere Menge ist und

(2) $\mathcal{I}$ eine Funktion, für die gilt:

   (a) $\mathcal{I}$ ordnet jeder Individuenkonstante c der Sprache genau ein Element von $\mathcal{I}(c)$ aus A zu.

   (b) $\mathcal{I}$ ordnet jedem n-stelligen Prädikatsymbol P der Sprache genau eine n-stellige Relation $\mathcal{I}(P)$ zwischen Elementen von A zu.

Die Menge A heißt *Individuenbereich* (oder *Universum*) der Struktur $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{I}$ liefert eine *Interpretation* der Sprache $\mathcal{L}$ in der Struktur $\mathfrak{A}$.

Beispiele 3.7 (1) Die Sprache $\mathcal{L}_{\text{sok}}$ enthalte die Individuenkonstante s und die beiden einstelligen Prädikatsymbole M und S.
Dann ist $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ eine $\mathcal{L}_{\text{sok}}$-Struktur, wobei

[2] Es ist in der Logik üblich, einstellige Relationen mit Mengen gleichzusetzen.

- A die Menge aller Lebewesen,
- $\mathcal{I}(s)$ gleich Sokrates,
- $\mathcal{I}(M)$ die Relation „ist Mensch" und
- $\mathcal{I}(S)$ die Relation „ist sterblich" ist.

(2) Die Sprache $\mathcal{L}_{\text{nat}}$ enthalte die Individuenkonstanten n und e, das zweistellige Prädikatsymbol K und das dreistellige Prädikatsymbol F. Dann ist $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{J} \rangle$ eine $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Struktur, wobei

- $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathcal{J}(n)$ gleich 0,
- $\mathcal{J}(e)$ gleich 1,
- $\mathcal{J}(K)$ die Relation „ist kleiner als oder gleich" ($\leq$) und
- $\mathcal{J}(F)$ die Additionsrelation ist. Diese trifft auf drei Zahlen zu, wenn die dritte die Summe der beiden ersten ist.

(3) Eine $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Struktur ist auch $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, \mathcal{J}' \rangle$, wobei

- $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathcal{J}'(n)$ gleich 1,
- $\mathcal{J}'(e)$ gleich -1,
- $\mathcal{J}'(K)$ die Relation „ist teilbar durch" und
- $\mathcal{J}'(F)$ die Multiplikationsrelation ist. Diese trifft auf drei Zahlen zu, wenn die dritte das Produkt der beiden ersten ist.

Am letzten Beispiel sieht man, dass es zu einer Sprache verschiedene Stukturen gibt. Erst wenn wir eine Struktur definieren, erklären wir, welchen Inhalt wir den Zeichen der Sprache geben wollen.

3.3.2 Die Auswertung einer Formel

Unser Ziel ist es, zu definieren, wann eine gegebene prädikatenlogische Formel wahr ist und wann sie falsch ist. Wir haben gesehen, dass diese Frage nur in

Bezug auf eine Struktur beantwortet werden kann. Wir wollen also definieren, wann eine prädikatenlogische Formel der Sprache $\mathcal{L}$ in einer $\mathcal{L}$-Struktur wahr ist. Um zu verstehen, wie die Definition aussehen muss, betrachten wir wieder die Sprache $\mathcal{L}_{\text{nat}}$ und die $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Struktur $\mathfrak{N}$ aus obigem Beispiel (2).
Wenn φ die $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Formel $K(n, e)$ ist, so soll φ in der Struktur $\mathfrak{N}$ sicherlich wahr sein. Denn n wird durch 0, e durch 1 und K durch die Relation $\leq$ interpretiert — und in den natürlichen Zahlen gilt $0 \leq 1$.
Dagegen soll die $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Formel $F(n, n, e)$ in $\mathfrak{N}$ falsch sein, weil in den natürlichen Zahlen $0 + 0 \neq 1$ gilt.
Was ist aber mit der $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Formel $K(0, x_0)$?
Hier reicht die Angabe der Struktur $\mathfrak{N}$ nicht aus, um sagen zu können, ob sie wahr ist. Denn für welches Element von $\mathbb{N}$ soll x_0 stehen?
Es ist somit nötig, für die Bestimmung des Wahrheitswertes einer Formel mit freien Variablen diesen Werte zuzuordnen. Das geschieht durch sogenannte Belegungen.

Definition 3.8 Eine *Belegung* in einer Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ ist eine Funktion β, die jeder Individuenvariable x_n ein Element $\beta(x_n)$ aus A zuordnet.

Für unsere Definition der Auswertung einer Formel in einer Struktur benötigen wir auch eine Notation für Belegungen, die an einer Stelle abgeändert werden:

Definition 3.9 Sei β eine Belegung in einer Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ und a ein Element des Individuenbereichs A.
Dann bezeichnen wir mit $\beta[x_n/a]$ die Belegung, die die Variable x_n auf a abbildet und für alle anderen Variablen mit β übereinstimmt.

Wir definieren nun, was der Wert eines Terms t in einer Struktur $\mathfrak{A}$ unter einer Belegung β ist. Wir schreiben dafür $w_{\mathfrak{A},\beta}(t)$.

Definition 3.10 Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$.
Die Auswertung eines Terms ist wie folgt definiert:

(1) $w_{\mathfrak{A},\beta}(x_n) = \beta(x_n)$ für jede Individuenvariable x_n.

(2) $w_{\mathfrak{A},\beta}(c) = \mathcal{I}(c)$ für jede Individuenkonstante c.

Nun sind wir in der Lage zu definieren, welchen Wahrheitswert eine Formel in einer Struktur unter einer Belegung hat. Wir bezeichnen diesen mit $V_{\mathfrak{A},\beta}$. Der Buchstabe V soll an das lateinische Wort *valentia* oder an das englische *value* erinnern.

Definition 3.11 Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Der Wahrheitswert einer Formel in $\mathfrak{A}$ unter β ist wie folgt definiert:

(1) $V_{\mathfrak{A},\beta}(t_1 = t_2) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } w_{\mathfrak{A},\beta}(t_1) = w_{\mathfrak{A},\beta}(t_2), \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(2) $V_{\mathfrak{A},\beta}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls die Relation } \mathcal{I}(P) \text{ auf das} \\ & \quad \text{Tupel } \langle w_{\mathfrak{A},\beta}(t_1), \ldots, w_{\mathfrak{A},\beta}(t_n) \rangle \\ & \quad \text{zutrifft,} \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(3) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\neg\varphi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \text{f}, \\ \text{f} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \text{w}. \end{cases}$

(4) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta}(\psi) = \text{w}, \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(5) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} \text{f} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta}(\psi) = \text{f}, \\ \text{w} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(6) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi \rightarrow \psi) = \begin{cases} \text{f} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \text{w und } V_{\mathfrak{A},\beta}(\psi) = \text{f}, \\ \text{w} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(7) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi \longleftrightarrow \psi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls } V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta}(\psi), \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(8) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_n\, \varphi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls für jedes Element } a \text{ aus der Menge A} \\ & \quad \text{gilt: } V_{\mathfrak{A},\beta[x_n/a]}(\varphi) = \text{w}, \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

(9) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x_n\, \varphi) = \begin{cases} \text{w} & , \text{ falls es (mindestens) ein Element } a \text{ aus der} \\ & \quad \text{Menge A gibt mit: } V_{\mathfrak{A},\beta[x_n/a]}(\varphi) = \text{w}, \\ \text{f} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L}_{\text{sok}}$ und die Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ aus Beispiel 3.7 (1). Sei β eine beliebige Belegung.
Sei φ die Formel $\forall x\,(M(x) \to S(x))$.
Wir zeigen, dass $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \text{w}$ ist. Dazu müssen wir gemäß obiger Definition zeigen, dass für jedes a aus der Menge A aller Lebewesen gilt: $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(M(x) \to S(x)) = \text{w}$. Dabei ist $\mathcal{I}(M)$ die Relation „ist Mensch“ und $\mathcal{I}(S)$ ist die Relation „ist sterblich“. Damit gilt für ein Element a aus der Menge der Lebenwesen $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(M(x)) = \text{w}$ genau dann, wenn die Relation „ist Mensch“ auf a zutrifft.
Analog für $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(S(x)) = \text{w}$.
Schließlich gilt: Wenn die Relation „ist Mensch“ auf das Lebewesen a zutrifft, so trifft auch die Relation „ist sterblich“ auf a zu.
Damit gilt also: $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(M(x) \to S(x)) = \text{w}$.

(2) Nun betrachten wir die $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{J} \rangle$ aus Beispiel 3.7 (2). Sei β eine beliebige Belegung.
Sei ψ die Formel $\exists x_0 \forall x_1\ K(x_0, x_1)$. Dann gilt:
$V_{\mathfrak{N},\beta}(\psi) = \text{w}$
genau dann, wenn es ein Element a aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass:
$V_{\mathfrak{N},\beta[x_0/a]}(\forall x_1\ K(x_0, x_1)) = \text{w}$
genau dann, wenn es ein Element a aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Elemente b aus $\mathbb{N}$ gilt: $V_{\mathfrak{N},\beta[x_0/a][x_1/b]}(K(x_0, x_1)) = \text{w}$
genau dann, wenn es ein Element a aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Elemente b aus $\mathbb{N}$ gilt: Die Relation $\leq$ trifft auf das Paar $\langle a, b \rangle$ zu.
genau dann, wenn es ein Element a aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Elemente b aus $\mathbb{N}$ gilt: $a \leq b$.

Da das Element 0 aus $\mathbb{N}$ die Eigenschaft hat, dass es kleiner oder gleich jedes Element von $\mathbb{N}$ ist, gilt die letzte Zeile.
Also gilt auch: $V_{\mathfrak{N},\beta}(\psi) = \text{w}$.

(3) Wieder betrachten wir die $\mathcal{L}_{\text{nat}}$-Struktur $\mathfrak{N}$. Sei β_1 eine Belegung mit $\beta_1(x_0) = 5$.
Sei θ die Formel $\forall x_1\ K(x_0, x_1)$. Dann gilt:

$V_{\mathfrak{N},\beta_1}(\theta) = \mathrm{w}$
genau dann, wenn für alle c aus $\mathbb{N}$ gilt: $V_{\mathfrak{N},\beta_1[x_1/c]}(K(x_0, x_1)) = \mathrm{w}$
genau dann, wenn für alle c aus $\mathbb{N}$ gilt: Die Relation $\leq$ trifft auf das Paar $\langle 5, c\rangle$ zu.
genau dann, wenn für alle c aus $\mathbb{N}$ gilt: $5 \leq c$.

Die letzte Zeile ist offensichlich falsch, also gilt $V_{\mathfrak{N},\beta_1}(\theta) = \mathrm{f}$.

Bei der Betrachtung dieser Beispiele fällt der folgende Unterschied auf: In den ersten beiden Fällen ist die entsprechende Formel in der Struktur jeweils unter allen Belegungen wahr. Dagegen ist im dritten Fall die Formel unter einer bestimmten Belegung, nämlich β_1, falsch. Es gibt auch Belegungen, unter denen sie wahr ist, nämlich wenn diese die Variable x_0 mit 0 belegen. Wenn eine Formel in einer Struktur unter allen Belegungen wahr ist, so sagt man, dass die Formel in dieser Struktur gilt.

Definition 3.12 Sei φ eine prädikatenlogische Formel und $\mathfrak{A}$ eine Struktur. Wenn $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \mathrm{w}$ für jede Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt, so schreibt man: $\mathfrak{A} \models \varphi$. Man sagt dann: „*$\varphi$ gilt in $\mathfrak{A}$*“oder „*$\mathfrak{A}$ ist ein Modell von φ*“.
Wenn Σ eine Menge von prädikatenlogischen Formeln ist, dann nennt man $\mathfrak{A}$ ein Modell von Σ, falls $\mathfrak{A}$ ein Modell einer jeden Formel aus der Menge Σ ist. In Zeichen: $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Bei der Feststellung, welchen Wahrheitswert eine Formel φ, kommt es - wie man aus der Definition 3.11 sieht - nicht darauf an, wie Variable belegt werden, die in φ gar nicht frei vorkommen. Dies ist der Inhalt des sogenannten Koinzidenz–Theorems.

Satz 3.13 (Koinzidenz–Theorem)
Sei φ eine prädikatenlogische Formel und $\mathfrak{A}$ eine Struktur. Wenn β_1 und β_2 Belegungen sind, so dass für jede freie Variable x aus φ gilt: $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, dann ist auch $V_{\mathfrak{A},\beta_1}(\varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta_2}(\varphi)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt über eine sogenannte Induktion über den Formelaufbau. Er findet sich beispielsweise bei Felgner [2, Satz 9.1] oder bei Oberschelp [6, Satz 18.8]. □

Aus dem Koinzidentheorem folgt insbesondere, dass für eine Aussage φ (d. h. φ hat keine freien Variablen) $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi)$ unter allen Belegungen β gleich ist. Somit hängt der Wahrheitswert von Aussagen nicht von der Belegung der Variablen ab.

3.3.3 Der Begriff der Folgerung

Wir kommen nun zur Definition des prädikatenlogischen Folgerungsbegriffs.

Definition 3.14 Sei Σ eine Menge von prädikatenlogischen Formeln und φ eine prädikatenlogische Formel.
Wir sagen, dass φ *aus* Σ *folgt*, wenn für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung β gilt: Wenn $V_{\mathfrak{A},\beta}(\psi) = \mathrm{w}$ für alle ψ aus Σ gilt, dann gilt auch $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \mathrm{w}$.

Da nach dem Koinzidenz–Theorem der Wahrheitswert von Aussagen nicht von einer konkreten Belegung abhängt, kann man für diese den Folgerungsbegriff einfacher formulieren:
Sei Σ eine Menge von prädikatenlogischen Aussagen und φ eine prädikatenlogische Aussage. Dann *folgt* φ *aus* Σ, wenn für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:
Wenn $\mathfrak{A} \models \Sigma$, dann auch $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Beispiele: Wir betrachten wieder die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{sok}}$ mit der Individuenkonstante s und den beiden einstelligen Prädikatsymbolen M und S.

(1) Die folgenden Ausdrücke sind Formeln dieser Sprache:

$$\forall x\ (M(x) \to S(x)), \quad M(s), \quad S(s).$$

Wir zeigen, dass $S(s)$ aus $\forall x\ (M(x) \to S(x))$ und $M(s)$ folgt.
Sei dazu $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{sok}}$, so dass gilt:
$\mathfrak{A} \models \forall x\ (M(x) \to S(x)) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \models M(s)$.
Gemäß der Definition 3.11 heißt dies erstens: Wenn a ein Element von A ist, auf das die Relation $\mathcal{I}(M)$ zutrifft, dann trifft auch die Relation $\mathcal{I}(S)$ auf a zu. Zweitens gilt: Die Relation $\mathcal{I}(M)$ trifft auf das Element $\mathcal{I}(s)$ von A zu. Daraus folgt, dass auch die Relation $\mathcal{I}(S)$ auf $\mathcal{I}(s)$ zutrifft.
Somit gilt: $\forall x\ (M(x) \to S(x)), M(s) \models S(s)$.

(2) Dagegen gilt, dass $S(s)$ nicht aus den beiden Formeln $\exists x\,(M(x) \wedge S(x))$ und $M(s)$ folgt.
Um dies zu zeigen, muss man eine Struktur $\mathfrak{B} = \langle B, \mathcal{J} \rangle$ angeben, so dass zwar $\mathfrak{B} \models \exists x\,(M(x) \wedge S(x))$ und $\mathfrak{B} \models M(s)$ gilt, aber nicht $\mathfrak{B} \models S(s)$ gilt.

Wir können ein solches Gegenbeispiel wie folgt definieren. Es sei:

- B die Menge aller Lebewesen,
- $\mathcal{I}(s)$ gleich Torsten Schatz,
- $\mathcal{I}(M)$ die Relation „ist Mensch“ und
- $\mathcal{I}(S)$ die Relation „ist Spanier“.

Da es ein Element von B gibt, auf dass die Relation $\mathcal{I}(M)$ und die Relation $\mathcal{I}(S)$ zutrifft, gilt $\mathfrak{B} \models \exists x\,(M(x) \wedge S(x))$.
Außerdem trifft die Relation $\mathcal{I}(M)$ auf das Element $\mathcal{I}(s)$ aus B zu, also gilt auch $\mathfrak{B} \models M(s)$.
Dagegen trifft die Relation $\mathcal{I}(S)$ nicht auf das Element $\mathcal{I}(s)$ zu, d. h. $\mathfrak{B} \not\models S(s)$.
Somit gilt: $\exists x\,(M(x) \wedge S(x)), M(s) \not\models S(s)$.

Zwei Formeln mit der Eigenschaft, dass jede aus der anderen folgt, heißen (wie schon in der Aussagenlogik) logisch–äquivalent:

Definition 3.15 Zwei prädikatenlogische Formeln φ und ψ heißen *logisch–äquivalent*, falls sowohl $\varphi \models \psi$ als auch $\psi \models \varphi$ gilt.
Wir schreiben dann: $\varphi \dashv\models \psi$.

Auch der Begriff Tautologie wird analog zur Aussagenlogik erklärt:

Definition 3.16 Eine prädikatenlogische Formel φ heißt *Tautologie* (oder *allgemeingültig*), wenn für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung β

$$V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi) = \mathrm{w}$$

gilt.
Wir schreiben dann: $\models \varphi$.

Tautologien sind also Formeln, die in jeder Struktur gelten.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass auch das prädikatenlogische Export–Import–Theorem gilt.

Satz 3.17 (Export–Import–Theorem)
Seien $\varphi, \psi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ prädikatenlogische Formeln. Dann gilt:
(i) $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$ genau dann, wenn $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$ eine Tautologie ist.
(ii) φ und ψ sind genau dann logisch–äquivalent, wenn $\varphi \longleftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist.

Der Beweis ist völlig analog zum Beweis der aussagenlogischen Variante dieses Theorems durchführbar.

3.4 Tautologien

Da wir die Prädikatenlogik als direkte Erweiterung der Aussagenlogik erklärt haben, sind alle aussagenlogischen Tautologien auch prädikatenlogische Tautologien. Wir haben somit weiterhin den Satz vom ausgeschlossenen Dritten, den Satz vom Widerspruch, die Negations–Regel, die Kommutativ–, die Assoziativ– und die Distributivgesetze sowie die Ockham–De Morgan–Regeln, die Kontrapositionsregel usw. zur Verfügung (vgl. Satz 2.13).

Wir wenden uns nun Tautologien zu, die auch Quantoren enthalten. Zunächst folgt daraus, wie wir den Existenzquantor inhaltlich definiert haben, dass eine Existenzaussage in folgendem Sinn eine negierte Allaussage ist:

Satz 3.18 *Für jede prädikatenlogische Formel φ sind die folgenden Formeln Tautologien:*

(i) $\exists x\, \varphi \longleftrightarrow \neg \forall x\, \neg\varphi$

(ii) $\forall x\, \varphi \longleftrightarrow \neg \exists x\, \neg\varphi$

Beweis: (i): Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und β eine Belegung.
Zu zeigen ist: $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x\, \varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta}(\neg\forall x\, \neg\varphi)$.
<u>1. Fall:</u> $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x\, \varphi) = $ w.

Dann gibt es ein Element a in A mit $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\varphi) = \text{w}$. Folglich ist $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\neg\varphi) = \text{f}$. Damit ist auch $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\, \neg\varphi) = \text{f}$, d. h. $V_{\mathfrak{A},\beta}(\neg\forall x\, \neg\varphi) = \text{w}$.
2. Fall: $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x\, \varphi) = \text{f}$.
Dann gibt es kein Element a in A mit $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\varphi) = \text{w}$. Folglich ist $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\neg\varphi) = \text{w}$ für jedes Element a aus A . Damit ist $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\, \neg\varphi) = \text{w}$, d. h. $V_{\mathfrak{A},\beta}(\neg\forall x\, \neg\varphi) = \text{f}$.

(ii) zeigt man analog. □

Beispiel:

(1) $\forall x\, (M(x) \to S(x)) \;\;=\!\!|\!\models\;\; \neg\exists x\, \neg(M(x) \to S(x)) \;\;=\!\!|\!\models$
$\neg\exists x\, \neg(\neg M(x) \vee S(x)) \;\;=\!\!|\!\models\;\; \neg\exists x\, (M(x) \wedge \neg\, S(x))$
Wobei wir neben obigem Satz die Nicht–Oder–Umformung der Implikation und die Ockham–De Morgan–Regeln benutzt haben.

Wenn wir dies inhaltlich deuten, wobei wir M durch „ist Mensch" und S „ist sterblich" interpretieren, so ist die Aussage, dass jeder Mensch sterblich ist, logisch–äquivalent dazu, dass es keinen Menschen gibt, der nicht sterblich ist.

(2) $\exists x\, (M(x) \wedge S(x)) \;\;=\!\!|\!\models\;\; \neg\forall x\, \neg(M(x) \wedge S(x)) \;\;=\!\!|\!\models$
$\neg\forall x\, (\neg\, M(x) \vee \neg\, S(x))$

Wenn wir M durch „ist Mango" und S „ist sauer" interpretieren, so besagt dies, dass die Aussage, dass einige Mangos sauer sind, logisch–äquivalent dazu ist, dass nicht für alle Dinge gilt, dass sie keine Mangos oder nicht sauer sind.

Obwohl die Behauptung des obigen Satzes intuitiv einleuchtet, ist sie philosophisch bedeutsam. Denn sie besagt, dass wir die Existenz eines Objekts mit einer gewissen Eigenschaft dadurch beweisen können, dass wir zeigen, dass es nicht sein kann, dass alle Objekte diese Eigenschaft nicht haben. Und dies gilt auch, wenn der betrachtete Individuenbereich unendlich viele Elemente aufweist und wir somit nicht von allen Elementen überprüfen können, ob sie die Eigenschaft haben oder nicht.

Man könnte statt dessen auch die stärkere Forderung stellen, dass man von der Existenz eines Objekts mit einer gewissen Eigenschaft nur dann sprechen darf, wenn man ein solches Objekt auch explizit angeben kann.
Diese Forderung stellt die sogenannte konstruktivistische Logik. Die klassische Logik, mit der wir uns hier beschäftigen, vertritt dagegen den Standpunkt, dass wenn eine Eigenschaft nicht auf alle Elemente eines Individuenbereichs nicht zutrifft, es notwendigerweise ein Element geben muss, auf das sie zutrifft — und dies völlig unabhängig davon, ob wir ein solches Element konkret angeben können.

Die nächste Tautologie, die wir betrachten wollen, besagt, dass man gleichartige Quantoren vertauschen darf und dass man von $\exists\,\forall$ zu $\forall\,\exists$ übergehen darf:

Satz 3.19 *Für jede prädikatenlogische Formel φ sind die folgenden Formeln Tautologien:*

(i) $(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) \longleftrightarrow (\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi)$

(ii) $(\exists x_1\, \exists x_2\, \varphi) \longleftrightarrow (\exists x_2\, \exists x_1\, \varphi)$

(iii) $(\exists x_1\, \forall x_2\, \varphi) \to (\forall x_2\, \exists x_1\, \varphi)$

Beweis: (i): Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und β eine Belegung.
<u>1. Fall:</u> $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) = \mathrm{w}$.
Dann gilt für alle Elemente a und für alle Elemente b aus dem Individuenbereich A: $V_{\mathfrak{A},\beta[x_1/a][x_2/b]}(\varphi) = \mathrm{w}$. Folglich gilt auch $V_{\mathfrak{A},\beta[x_2/b][x_1/a]}(\varphi) = \mathrm{w}$, da $\beta[x_1/a][x_2/b]$ und $\beta[x_2/b][x_1/a]$ die gleichen Belegungen sind.
Also gilt $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi) = \mathrm{w}$.
<u>2. Fall:</u> $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) = \mathrm{f}$.
Angenommen es wäre $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi) = \mathrm{w}$. Dann würde sich analog zum ersten Fall ergeben, dass $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) = \mathrm{w}$ gilt, ein Widerspruch.
Somit muss $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi) = \mathrm{f}$ sein.
Also gilt in beiden Fällen: $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) = V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi)$.

(ii) zeigt man analog.

(iii): Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$ eine Struktur und β eine Belegung.

<u>1. Fall:</u> $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x_1\, \forall x_2\, \varphi) = \mathrm{w}$.
Dann gibt es in A ein Element a, so dass für alle b aus A gilt:
$V_{\mathfrak{A},\beta[x_1/a][x_2/b]}(\varphi) = \mathrm{w}$. Folglich gibt es für alle b aus A immer ein c aus A, so dass $V_{\mathfrak{A},\beta[x_2/b][x_1/c]}(\varphi) = \mathrm{w}$ ist. Denn wir können als c immer das Element a nehmen. Also gilt $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x_2\, \exists x_1\, \varphi) = \mathrm{w}$.
Somit ist auch $V_{\mathfrak{A},\beta}((\exists x_1\, \forall x_2\, \varphi) \to (\forall x_2\, \exists x_1\, \varphi)) = \mathrm{w}$.
<u>2. Fall:</u> $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x_1\, \forall x_2\, \varphi) = \mathrm{f}$.
Dann gilt $V_{\mathfrak{A},\beta}((\exists x_1\, \forall x_2\, \varphi) \to (\forall x_2\, \exists x_1\, \varphi)) = \mathrm{w}$ nach Definition der Implikation. □

Die Umkehrung von (iii), also der Übergang von $\forall\ \exists$ zu $\exists\ \forall$ gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel ist die Formel aus Aufgabe (1) von Blatt 10.
Man kann sich den Sachverhalt auch an folgenden Aussagen klar machen:
Für jedes Problem gibt es eine Lösung.
Es gibt eine Lösung für alle Probleme.
Die erste Aussage folgt aus der zweiten. Aber die zweite Aussage folgt nicht aus der ersten.

Wir benötigen im Folgenden den Begriff der Substitution. Wenn wir die Formel $M(x)$ haben, wobei M ein einstelliges Prädikatsymbol und x eine Individuenvariable ist, so gibt es Situationen, in denen man das x durch eine Individuenkonstante ersetzen möchte, um beispielsweise die Formel $M(s)$ zu erhalten. Eine solche Ersetzung von einer oder mehrereren Variablen nennt man *Substitution*.

Notation: Sei φ eine Formel, die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als freie Variable enthält und seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme. Dann ist $\varphi(x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n)$ diejenige Formel, die aus φ entsteht, wenn man simultan die Variablen x_i überall, wo sie frei auftreten, durch t_i ersetzt (für $1 \leq i \leq n$).

Beispiel: Wenn φ die Formel

$$\forall x_1\ (M(x_1) \vee S(x_2)) \wedge \exists x_3\ (M(x_3) \to (M(x_1) \wedge S(x_2)))$$

ist, dann ist $\varphi(x_1/s, x_2/x_4)$ die Formel

$$\forall x_1\ (M(x_1) \vee S(x_4)) \wedge \exists x_3\ (M(x_3) \to (M(s) \wedge S(x_4)))$$

Wenn man eine Substitution durchführt, so kann sich der Inhalt einer Formel ändern. Wenn wir beispielsweise in der Formel $\exists x_1\ (x_1 = x_2)$ die Variable x_2 durch die Variable x_1 ersetzen, so erhalten wir die Formel $\exists x_1\ (x_1 = x_1)$. Diese hat einen völlig anderen Inhalt. Der Grund liegt darin, dass wir x_2 durch eine Variable ersetzen, die im Wirkungsbereich eines Quantors liegt. Das führt uns zur folgenden Definition:

Definition 3.20 Sei φ eine Formel, x eine Individuenvariable und t ein Term. Wir nennen *t frei einsetzbar für x in φ*,

(i) falls t eine Konstante ist oder

(ii) falls t eine Variable ist und an jeder Stelle von φ, wo x frei vorkommt, gilt, dass x nicht zu einer Teilformel von φ der Form $\forall t \ldots$ oder $\exists t \ldots$ gehört.

Die folgende Tautologie ist das klassische *dictum de omni*, das sich bereits bei Aristoteles findet:
„*Was von jedem gilt, das gilt auch von einigen und von einzelnen.*“

Satz 3.21 *Sei φ eine prädikatenlogische Formel, die x als freie Variable enthält. Sei t ein Term, der frei einsetzbar für x in φ ist. Dann sind die folgenden Formeln Tautologien:*

(i) $\forall x\ \varphi \rightarrow \exists x\ \varphi$,

(ii) $\forall x\ \varphi \rightarrow \varphi(x/t)$.

Beweis: (i): Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und β eine Belegung.
Sei $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi) = \mathrm{w}$. Dann gilt für jedes Element a aus A: $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\varphi) = \mathrm{w}$.
Da A als Individuenbereich einer Struktur eine nicht–leere Menge ist, existiert somit ein Element a aus A mit $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\varphi) = \mathrm{w}$.
Also gilt nach Definition 3.11: $V_{\mathfrak{A},\beta}(\exists x\ \varphi) = \mathrm{w}$.
Somit ist dann $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi \rightarrow \exists x\ \varphi) = \mathrm{w}$.
Falls $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi) = \mathrm{f}$ ist, gilt die Behauptung nach Definition der Implikation.
(ii): Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur und β eine Belegung.
Sei $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi) = \mathrm{w}$. Dann gilt für jedes Element a aus A: $V_{\mathfrak{A},\beta[x/a]}(\varphi) = \mathrm{w}$.

Sei b die Auswertung des Terms t, d. h. $b = w_{\mathfrak{A},\beta}(t)$.
Dann gilt insbesondere für das Element b aus A: $V_{\mathfrak{A},\beta[x/b]}(\varphi) = \mathrm{w}$.
Wie man leicht sieht, bedeutet dies gerade: $V_{\mathfrak{A},\beta}(\varphi(x/t)) = \mathrm{w}$.
Somit ist dann $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi \to \varphi(x/t)) = \mathrm{w}$.
Falls $V_{\mathfrak{A},\beta}(\forall x\ \varphi) = \mathrm{f}$ ist, gilt die Behauptung nach Definition der Implikation.

□

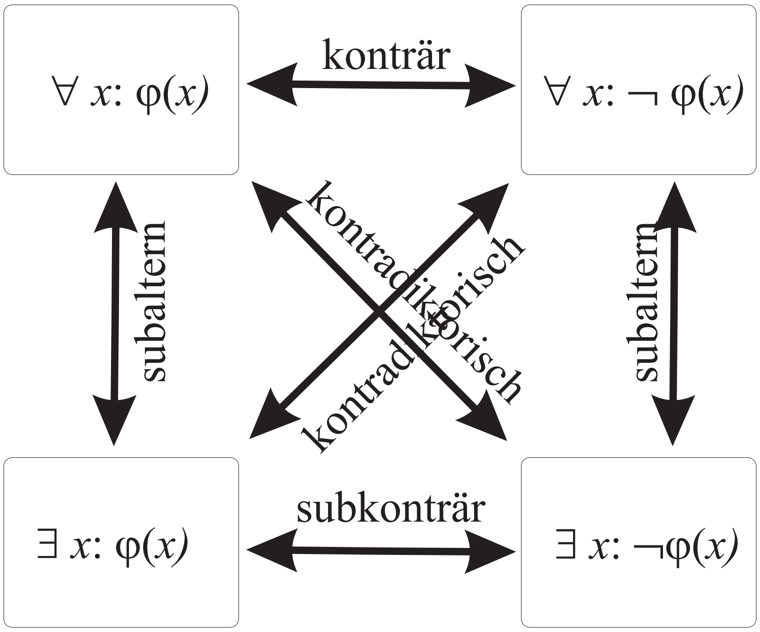
Obiger Satz ist exakt das *dictum de omni*: „*Was von jedem gilt* ($\forall x\ \varphi(x)$), *das gilt auch von einigen* ($\exists x\ \varphi(x)$) *und von einzelnen* ($\varphi(x/t)$).“

3.5 Das logische Quadrat

Im logischen Quadrat kann man ablesen, in welchen Beziehungen die vier Aussagen

$$\forall x\ \varphi(x), \quad \forall x\ \neg\varphi(x), \quad \exists x\ \varphi(x), \quad \exists x\ \neg\varphi(x)$$

stehen.
Dem Inhalt nach findet es sich bereits bei Aristoteles, die Anordnung als Quadrat geht auf Apuleius von Madaura (125 – ca. 175) zurück.



Gemäß dem *dictum de omni* (Satz 3.21 (i)) gilt $\forall x\, \varphi(x) \models \exists x\, \varphi(x)$ und $\forall x\, \neg\varphi(x) \models \exists x\, \neg\varphi(x)$. Daher sagt man, dass $\exists x\, \varphi(x)$ der Aussage $\forall x\, \varphi(x)$ untergeordnet (*subaltern*) ist. Ebenso ist $\exists x\, \neg\varphi(x)$ der Aussage $\forall x\, \neg\varphi(x)$ untergeordnet. Die untergeordneten Aussagen sind also Folgerungen.
Die anderen Aussagen verhalten sich wie folgt zueinander:

Satz 3.22 (Leges oppositarium)

(1) Lex contradictoriarum: *Kontradiktorische Urteile können nicht beide denselben Wahrheitswert haben.*

(2) Lex contrariarum: *Konträre Urteile können nicht beide zugleich wahr sein.*

(3) Lex subcontrariarum: *Subkonträre Urteile können nicht beide zugleich falsch sein.*

Beweis: (i): Nach Satz 3.18 gilt $\exists x\, \varphi(x) \dashv\models \neg\forall x\, \neg\varphi(x)$ und $\forall x\, \varphi(x) \dashv\models \neg\exists x\, \neg\varphi(x)$. Somit gilt für beide Paare kontradiktorischer Aussagen, dass die eine Aussage die Negation der anderen ist. Wenn also die eine Aussage wahr ist, dann ist die andere falsch und umgekehrt.
(ii): Nach Satz 3.21 gilt $\forall x\, \varphi(x) \models \exists x\, \varphi(x)$. Außerdem ist $\exists x\, \varphi(x)$ nach Satz 3.18 logisch–äquivalent zu $\neg\forall x\, \neg\varphi(x)$. Diese Aussage und $\forall x\, \neg\varphi(x)$ können nicht zugleich wahr sein. Folglich können auch $\forall x\, \varphi(x)$ und $\forall x\, \neg\varphi(x)$ nicht beide zugleich wahr sein.
(iii): Wenn $\exists x\, \varphi(x)$ und $\exists x\, \neg\varphi(x)$ zugleich falsch wären, so wären $\neg\exists x\, \varphi(x)$ und $\neg\exists x\, \neg\varphi(x)$ beide wahr. Damit wären nach Satz 3.18 also $\forall x\, \neg\varphi(x)$ und $\forall x\, \varphi(x)$ zugleich wahr. Doch dies ist nach (ii) unmöglich. □

Bemerkung: Konträre Urteile können beide zugleich falsch und subkonträre Urteile können beide zugleich wahr sein.
So sind beispielsweise die konträren Aussagen

Alle natürlichen Zahlen sind gerade.

und

Alle natürlichen Zahlen sind ungerade.

beide zugleich falsch.

Dagegen sind die subkonträren Aussagen

Einige natürlichen Zahlen sind gerade.

und

Einige natürlichen Zahlen sind ungerade.

beide zugleich wahr.

Ein häufiger Fehler bei der Negation einer prädikatenlogischen Aussage ist, dass man die konträre statt der kontradiktorischen Aussage bildet.
Die Negation von

Alle Deutschen trinken gerne Bier.

ist nämlich nicht

Alle Deutschen trinken nicht gerne Bier.

sondern

Es gibt Deutsche, die nicht gerne Bier trinken.

Obigen Fehler findet man in vielen Abhandlungen über die berühmte Kreter–Antinomie (vgl. Felgner [2, § 19]).

3.6 Ein Prädikatenkalkül

Wir wollen nun auch in der Prädikatenlogik dem semantischen Folgerungsbegriff einen syntaktischen Deduktionsbegriff zur Seite stellen, wie wir es bereits in der Aussagenlogik getan haben. Dazu geben wir in diesem Abschnitt einen prädikatenlogischen Kalkül an. Dieser ist korrekt und vollständig, damit ist der Deduktionsbegriff genauso stark wie der Folgerungsbegriff.

3.6.1 Der prädikatenlogische Felgner–Kalkül

Der prädikatenlogische Felgner–Kalkül ist eine Erweiterung des aussagenlogischen Felgner–Kalküls, er enthält sechs Axiome:

Prädikatenlogische Axiome: Für beliebige prädikatenlogische Formeln φ und ψ werden die folgenden Formeln als Axiome bezeichnet:

(Q 1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

(Q 2) $\neg\psi \to (\psi \to \varphi)$,

(Q 3) $(\forall x\ (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \forall x\ \varphi)$,
falls x keine freie Variable von ψ ist,

(Q 4) $(\forall x\ \varphi) \to \varphi(x/t)$,
falls t ein Term ist, der frei einsetzbar für x in φ ist,

(Q 5) $t = t$,
falls t ein Term ist.

(Q 6) $(x_n = x_k) \to (\varphi \to \varphi^*)$,
falls x_n eine freie Variable von φ ist und x_k frei einsetzbar für x_n in φ ist, und falls φ^* dadurch aus φ entsteht, dass man an einigen (nicht notwendig an allen) Stellen, an denen x_n frei vorkommt, x_n durch x_k ersetzt.

Die Axiome (Q 1) und (Q 2) enthielt schon unser Aussagen–Kalkül. Allerdings darf man jetzt für φ und ψ prädikatenlogische Formeln einsetzen, so ist z. B. $\forall x_1\, P(x_1) \to (\exists x_2\, Q(c, x_2) \to \forall x_1\, P(x_1))$ ein prädikatenlogisches Axiom

Wie man sieht, kommen nur zwei Axiome vor, die Quantoren enthalten, nämlich (Q 3) und (Q 4). Beide enthalten den Allquantor. Da wir den Existenzquantor semantisch so definiert haben, dass er sich mit Hilfe des Allquantors und der Negation ausdrücken lässt, benötigen wir keine Axiome, die den Gebrauch des Existenzquantors regeln. Wir fassen $\exists x\, \varphi$ einfach als Abkürzung für $\neg\forall x\, \neg\varphi$ auf.

Wir geben nun die Regeln unseres Kalküls an. Sie erlauben es, bestimmte Sequenzen der Form $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ hinzuschreiben, diese nennen wir wie in der Aussagenlogik *Beweiszeilen*.

Definition 3.23 Der Felgner–Kalkül:

Regel (P 1) Wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist und φ eines der Axiome (Q 1) bis (Q 6) ist, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben.

Regel (P 2) Wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist und φ in dieser Liste vorkommt, dann darf man die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben.

Regel (P 3) (Verdünnungs–Regel) Wenn man $\Delta \vdash \varphi$ hinschreiben darf und Γ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist, in der mindestens alle Formeln aus Δ vorkommen, dann darf man auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ hinschreiben.

Regel (P 4) (Modus ponens) Wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist, φ und ψ prädikatenlogische Formeln sind und man $\Delta \vdash \varphi$ und auch $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \psi$ hinschreiben.

Regel (P 5) (Fallunterscheidung) Wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist, φ und ψ prädikatenlogische Formeln sind und man $\Delta, \varphi \vdash \psi$ und auch $\Delta, \neg\varphi \vdash \psi$ hinschreiben darf, dann darf man auch $\Delta \vdash \psi$ hinschreiben.

Regel (P 6) (Generalisierung) Wenn φ und $\psi_1, \dots \psi_n$ prädikatenlogische Formeln sind und man $\psi_1, \dots \psi_n \vdash \varphi$ hinschreiben darf und wenn x nicht sowohl in φ als auch in einer der Formeln ψ_i (für $1 \leq i \leq n$) als freie Variable vorkommt, dann darf man auch $\psi_1, \dots \psi_n \vdash \forall x\, \varphi$ hinschreiben.

Der Begriff Herleitung wird gleich wie schon in der Aussagenlogik definiert:

Definition 3.24 (i) Eine *Herleitung* (oder *Ableitung* oder *Deduktion*) ist eine endliche Folge von Beweiszeilen, wobei jede dieser Zeilen durch die Anwendung von einer der Regeln (P 1) bis (P 6) gewonnen wurde.

(ii) Seien $\psi_1, \ldots, \psi_n$ und φ prädikatenlogische Formeln. Wir sagen, dass φ *aus* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *herleitbar ist*, wenn es eine Herleitung gibt, in deren letzten Zeile die Sequenz $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ steht.

Wir schreiben auch dafür: $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$

Sämtliche Regeln, die wir im Aussagen–Kalkül zur Verfügung hatten, haben wir auch in unserem Prädikaten–Kalkül zur Verfügung. Damit ist jede Formel, die im Aussagen–Kalkül herleitbar ist, auch im Prädikaten–Kalkül herleitbar.
Es gelten folglich das Deduktions–Theorem, die Propositionen aus Abschnitt 2.9.3 und die Kettenschluss–Regel in ihrer prädikatenlogischen Version, wobei wir die Beweise jeweils direkt übernehmen können:

Satz 3.25 (Deduktions–Theorem)
Für alle prädikatenlogischen Formeln φ und ψ und alle endliche Listen Δ von prädikatenlogischen Formeln gilt:

$$\Delta \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \Delta, \varphi \vdash \psi.$$

Proposition 3.26 *Für jede prädikatenlogische Formel φ gilt:*

(a) $\vdash (\neg\neg\varphi) \to \varphi$,

(b) $\vdash \varphi \to (\neg\neg\varphi)$.

Proposition 3.27 *Für alle prädikatenlogischen Formeln φ, ψ gilt:*

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

Proposition 3.28 (Kettenschluss)
Für alle aussagenlogischen Formeln φ, ψ und alle endlichen Listen Σ, Δ von aussagenlogischen Formeln gilt:
Wenn $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ und $\Delta \vdash \psi \to \theta$ gilt, dann gilt auch $\Sigma, \Delta \vdash \varphi \to \theta$.

Wir geben nun ein Beispiel für die Herleitung einer Formel im Prädikaten–Kalkül:

Proposition 3.29 *Für jede prädikatenlogische Formel φ gilt:*

$$\vdash (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi) \to (\forall x_2\, \forall x_1\, \varphi).$$

Beweis:

(i)	$\vdash$	$\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_2\, \varphi$	nach (Q 4),
(ii)	$\vdash$	$\forall x_2\, \varphi \to \varphi$	nach (Q 4),
(iii)	$\vdash$	$\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \varphi$	(Kettenschluss),
(iv)	$\vdash$	$\forall x_1\, (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \varphi)$	nach (P 6),
(v)	$\vdash$	$\forall x_1\, (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \varphi) \to (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_1\, \varphi)$	nach (Q 3),
(vi)	$\vdash$	$\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_1\, \varphi$	nach (P 4),
(vii)	$\vdash$	$\forall x_2\, (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_1\, \varphi)$	nach (P 6),
(viii)	$\vdash$	$\forall x_2\, (\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_1\, \varphi) \to$ $(\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_2\, \forall x_1\, \varphi)$	nach (Q 3),
(ix)	$\vdash$	$\forall x_1\, \forall x_2\, \varphi \to \forall x_2\, \forall x_1\, \varphi$	nach (P 4).

□

3.6.2 Die Korrektheit und die Vollständigkeit des Kalküls

Wir erinnern daran, dass die Korrektheit des Kalküls Folgendes besagt:
Wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist und φ eine prädikatenlogische Formel ist, so dass φ aus Δ im Kalkül hergleitet werden kann, dann ist φ auch eine Folgerung aus Δ.
Mit anderen Worten: Wenn $\Delta \vdash \varphi$, dann $\Delta \models \varphi$.

Satz 3.30 (Korrektheitssatz)
Der prädikatenlogische Felgner–Kalkül ist korrekt.

Beweisskizze: Wir verzichten auf einen kompletten Beweis und skizziern nur, was zu beweisen ist.
Zunächst muss man zeigen, dass alle prädikatenlogischen Axiome Tautologien sind. Für die ersten beiden haben wir dies bereits im aussagenlogischen Teil

dieser Vorlesung getan und für das Axiom (Q 4) im Satz über das *dictum de omni* (Satz 3.21). Damit ist dann die Korrektheit der Regel (P 1) beweisen. Die Korrektheit der Regeln (P 2), (P 3), (P 4) und (P 5) zeigt man analog zum Beweis der Korrektheit der entsprechenden Regeln im Aussagen–Kalkül. Schließlich ist noch die Korrektheit der Regel (P 6) zu beweisen.
Für einen vollständigen Beweis der Korrektheit des Felgner–Kalküls verweisen wir auf Felgner [2, Satz 12.2]. □

Der Kalkül ist auch vollständig, d. h. wenn Δ eine endliche Liste von prädikatenlogischen Formeln ist und φ eine prädikatenlogische Formel ist, so dass φ aus Δ folgt, dann gibt es auch eine Herleitung von φ aus Δ im Kalkül. Mit anderen Worten: Wenn $\Delta \models \varphi$, dann $\Delta \vdash \varphi$.

Satz 3.31 (Vollständigkeitssatz)
Der prädikatenlogische Felgner–Kalkül ist vollständig.

Ein Beweis des Vollständigkeitssatzes würde den Rahmen dieser Vorlesung bei weitem sprengen.

Die Vollständigkeit eines (zum Felgner–Kalkül gleichwertigen) prädikatenlogischen Kalküls wurde erstmals von dem Logiker Kurt Gödel (1906–1978) im Jahr 1930 bewiesen.

Aus den beiden obigen Sätzen zusammen folgt, dass der Felgner–Kalkül den semantischen Folgerungsbegriff adäquat wiedergibt, in dem Sinn, dass gilt:

$$\Delta \vdash \varphi \text{ genau dann, wenn } \Delta \models \varphi.$$

Literaturverzeichnis

[1] BUCHER, T.: *Einführung in die angewandte Logik*, de Gruyter Verlag, Berlin, New York ^{2}1998.

[2] FELGNER, U.: *Vorlesung über Mathematische Logik*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1998/99 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[3] HOYNINGEN–HUENE, P.: *Formale Logik*, Eine philosophische Einführung, Reclam, Stuttgart 1998.

[4] KAHLE, R.: *Einführung in die Logik*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2001/2002 am Humboldt-Studienzentrum der Universität Ulm.

[5] KUTSCHERA, F. VON; BREITKOPF, A.: *Einführung in die moderne Logik*, Alber, Freiburg, München ^{7}2000.

[6] OBERSCHELP, A.: *Logik für Philosophen*, Verlag Metzler, Stuttgart, Weimar ^{2}1997.

[7] SCHROEDER–HEISTER, P.: *Einführung in die Logik*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1995/96 am Philosophischen Seminar der Universität Tübingen.
(Im Internet verfügbar unter: `http://www.uni-tuebingen.de/philosophie/download/index.htm#logik`.)