Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Arbeitsbereich Logik, Grundlagen
und Geschichte der Mathematik

Prof. Dr. Ulrich Felgner

Die Bedeutung großer Kardinalzahlen für die Determiniertheit von Mengen

Wissenschaftliche Arbeit im Fach Mathematik

vorgelegt von

Torsten Ingo Schatz
Neustadtgasse 10
72070 Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Tübingen, im April 1998.

Einleitung

Große Kardinalzahlen und Determiniertheit sind zwei der Gebiete, auf die sich in den letzten Jahrzehnten das Interesse innerhalb der Mengenlehre konzentriert hat.
Die Beschäftigung mit großen Kardinalzahlen oder starken Unendlichkeitsaxiomen, wie sie auch genannt werden, entstand, nachdem man festgestellt hatte, daß eine Reihe von Problemen der Mathematik nicht auf der Basis des Axiomensystems von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF) unter Hinzunahme des Auswahlaxioms (AC) entscheidbar sind. Das wichtigste und bekannteste dieser Probleme ist die Kontinuumshypothese, die Georg Cantor Ende des letzten Jahrhunderts formuliert hatte.
Wenn ein Axiomensystem nicht zur Beantwortung bestimmter Fragen ausreicht, liegt es nahe, zusätzliche, stärkere Axiome zu suchen, die bei der Lösung der Probleme hilfreich sein können.
In den Axiomen über große Kardinalzahlen fand sich eine ganze Reihe solcher Axiome. Der Begriff „große Kardinalzahl“ kommt daher, daß aus der Gültigkeit solcher Aussagen in ZSF + AC immer die Existenz einer stark–unerreichbaren Kardinalzahl, also einer von immenser Größe, folgt.
Damit fordern große Kardinalzahlen zugleich, daß das Universum aller Mengen sehr groß sein muß, was nicht ohne Auswirkung auf diesbezüglich „kleine“ Mengen wie die reellen Zahlen bleibt.
Man konnte zwar mit Hilfe der großen Kardinalzahlen die Kontinuumshypothese nicht entscheiden, aber auf eine Reihe anderer wichtiger Probleme der Mengenlehre eine Antwort finden.
In einem völlig anderen Zusammenhang entstand die Frage nach der Determiniertheit von Mengen. Die Grundlage dafür liefert ein unendliches Zwei–Personen–Spiel mit perfekter Information, welches abhängig von einer Teilmenge

der reellen Zahlen definiert wird. Die Menge wird als determiniert bezeichnet, falls einer der Spieler im zugehörigen Spiel eine Gewinnstrategie besitzt.
Die Determiniertheit einer Menge hat Konsequenzen, die auch außerhalb der Mengenlehre von Interesse sind.
Bereits früh war bekannt, daß offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ determiniert sind, sich aber andererseits mit Hilfe des Auswahlaxioms die Existenz einer nicht determinierten Menge beweisen läßt. Es stellt sich somit die Frage, wieviel an Determiniertheit man im System ZSF + AC bekommt.
Ein berühmtes Resultat von Donald Martin aus dem Jahr 1975 besagt, daß die Determiniertheit aller Borel–Mengen auf der Basis dieses Systems gezeigt werden kann.
Das Ergebnis ist optimal in dem Sinn, daß die Determiniertheit von $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen, d.h. von Projektionen von Borel–Mengen, in ZSF + AC nicht beweisbar ist.
Man kann sogar zeigen, daß nicht einmal die Konsistenz dieser Aussagen mit ZSF + AC beweisbar ist.
Hier kann man nun große Kardinalzahlen ins Spiel bringen. Martin selbst hatte bereits 1970 bewiesen, daß aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen, und damit, wie man relativ leicht sehen kann, auch die der $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Mengen, folgt.
Dies bedeutet, daß große Kardinalzahlen direkte Auswirkungen auf Teilmengen der reellen Zahlen haben, und daß sie bei der Entscheidung eines Problems helfen können, dessen Formulierung nichts mit der Kardinalzahltheorie zu tun hat.
Außerdem hat es sich gezeigt, daß die Axiome über große Kardinalzahlen eine annähernd lineare Hierarchie bilden, die durch relative Konsistenzstärke geordnet ist. Diese Hierarchie dient als eine Art Meßlatte für die Konsistenzstärke von Aussagen, die nicht in ZSF + AC beweisbar sind. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich auch die $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit in diese Hierarchie einordnen läßt.

Im ersten Kapitel werden zunächst die Grundlagen genannt, auf denen ich aufbauen werde.

In Kapitel zwei führe ich das Spiel ein, welches als Basis der Determiniertheitsbetrachtungen dient. Außerdem wird die Determiniertheit von offenen und abgeschlossenen Mengen bewiesen.

Im dritten Kapitel wird das Resultat von Martin, daß alle Borel–Mengen determiniert sind, vorgestellt.

Die Determiniertheit der $\mathbf{\Sigma}_1^1$-Mengen und die der $\mathbf{\Pi}_1^1$-Mengen sind äquivalente Aussagen; dies folgt aus einer Proposition, die am Ende von Kapitel zwei gezeigt wird. Daß diese nicht auf der Basis der ZSF–Mengenlehre mit Auswahlaxiom beweisbar sind, zeige ich im vierten Kapitel. Dazu wird ausgeführt, daß die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}_1^1$-Mengen zur Folge hat, daß alle diese Mengen entweder abzählbar sind oder eine perfekte Teilmenge enthalten, ein Resultat, welches auch andere interessante Konsequenzen hat.

Das Ziel ist dann der Beweis des Satzes von Martin, daß aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}_1^1$-Mengen folgt. In Kapitel fünf und sechs werden die dafür notwendigen Vorarbeiten geleistet. Zunächst beschäftige ich mich mit meßbaren Kardinalzahlen sowie mit den sogenannten Sharps. Dann stelle ich einige Resultate bereit, die die Darstellung von $\mathbf{\Pi}_1^1$-Mengen durch Bäume betreffen.

In Kapitel sieben erfolgt schließlich der Beweis von Martins Satz. Außerdem wird gezeigt, daß für die $\mathbf{\Pi}_1^1$-Determiniertheit bereits die Existenz der Sharps genügt, d.h. eine schwächere Voraussetzung als die der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl.

In der Arbeit wurde darauf Wert gelegt, jeweils anzugeben, welches Axiomensystem als Basistheorie für die Resultate notwendig ist.

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Vorbemerkung

Die zugrundegelegte Theorie ist für die gesamte Arbeit das Axiomensystem von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF) bestehend aus
- Extensionalitätsaxiom,
- Unendlichkeitsaxiom,
- Paarmengenaxiom,
- Summenaxiom,
- Potenzmengenaxiom,
- Fundierungsaxiom, sowie
- dem Schema der Aussonderungsaxiome und
- dem Schema der Ersetzungsungsaxiome.[1]

Wenn für ein Resultat das Auswahlaxiom (AC) oder andere zusätzliche Annahmen notwendig sind, so wird dies an der betreffenden Stelle angegeben.

Die Verwendung mathematischer Begriffe sowie deren Symbole richtet sich in dieser Arbeit weitgehend nach Felgner [3].

Ω ist die *Klasse aller Ordinalzahlen*, und diese werden im allgemeinen mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnet, wobei ω die erste unendliche Ordinalzahl, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen, ist.
Für eine Ordinalzahl α bezeichnet $cf(\alpha)$ ihre *Konfinalität*, und für eine Kardinalzahl κ symbolisiert κ^+ die *kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist.*

[1]Für die genaue Formulierung dieser Axiome siehe Felgner [3, § 7].

Die *α-te Kardinalzahl* wird mit $\aleph_\alpha$ sowie, falls sie als Ordinalzahl betrachtet wird, mit ω_α bezeichnet.
κ heißt *Limeskardinalzahl*, wenn eine Limesordinalzahl λ existiert, so daß $\kappa = \aleph_\lambda$ ist, und κ heißt *starke Limeskardinalzahl*, wenn für jede Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ auch $2^\lambda < \kappa$ gilt.
Mit $\mathbf{V}$ wird das *Universum aller Mengen* und mit $\mathbf{V}_\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega$ die *von Neumannsche Stufe* der Mengen vom (Mirimanoff-)Rang kleiner als α bezeichnet.
Wenn M eine Menge ist, so stellt $|M|$ ihre *Kardinalität* und $\mathcal{P}(M)$ ihre *Potenzmenge* dar. Wenn die Potenzmengenoperation iteriert wird, so wird dies wie folgt bezeichnet: $\mathcal{P}^0(M) = M$, $\mathcal{P}^{\alpha+1}(M) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^\alpha(M)\big)$ und $\mathcal{P}^\lambda(M) = \bigcup\limits_{\alpha\in\lambda} \mathcal{P}^\alpha(M)$ für Limeszahlen λ.
Für eine Kardinalzahl κ ist $\mathcal{P}_\kappa(M)$ die *Menge aller Teilmengen* von M, die Kardinalität κ haben und $\mathcal{P}_{<\kappa}(M) = \bigcup\limits_{\lambda<\kappa} \mathcal{P}_\lambda(M)$.
Die *Sprache der Mengenlehre* bezeichne ich mit $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$.
Wenn φ eine Formel ist, so schreibe ich $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, wenn die freien Variablen von φ zur Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ gehören. Falls K ein Klassenterm ist, so ist φ^K bzw. $\varphi^K(v_1, \ldots, v_n)$ die *Relativierung* von φ auf K.
Für eine Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$ der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ bedeutet $\mathfrak{M} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]$, daß die Formel φ in $\mathfrak{M}$ gilt, wenn man die v_i durch x_i $(1 \le i \le n)$ ersetzt, wobei die x_i aus M sind.
Ein Element $a \in M$ heißt K-definierbar in $\mathfrak{M}$ für eine Klasse $K \subseteq M$, falls eine Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ sowie $x_1, \ldots, x_n \in K$ existieren, so daß gilt: $\big(\mathfrak{M} \models a$ ist das einzige x_0 mit $\varphi[x_0, x_1, \ldots, x_n]\big)$.
Wenn $\mathfrak{M} = \langle M, \in\rangle$ ein Modell ist, in dem die ZSF–Axiome gelten, so heißt eine Ordinalzahl $\alpha \in M \cap \Omega$ $\mathfrak{M}$-Kardinalzahl, falls $\big(\mathfrak{M} \models \alpha$ ist Kardinalzahl$\big)$.
In dieser Arbeit werden Kenntnisse über das Modell $\mathbf{L}$, die Klasse der konstruktiblen Mengen von Kurt Gödel, vorausgesetzt, wie sie sich etwa bei Felgner [4, § 7–13] finden. Außerdem werden die konstruktiblen Hierarchien $\mathbf{L}[x]$ relativ zu Elementen $x \in \omega^\omega$ benutzt, dazu vgl. Jech [9, § 15].

Wenn M und N Mengen sind und $f: M \to N$ eine Funktion ist, so ist $\mathrm{Dom}(f)$ ihr *Definitionsbereich* und $\mathrm{Im}(f) = \{f(x);\ x \in M\}$ ihr *Bild*.
Für $X \subseteq M$ wird mit $f[X] = \{f(x);\ x \in X\}$ das *Bild der Menge* X unter f bezeichnet. Analog ist $f^{-1}[Y] = \{x \in M;\ f(x) \in Y\}$ das *Urbild* von $Y \subseteq N$.

$f \upharpoonright X = \{\langle x, f(x)\rangle;\ x \in X\}$ ist die *Restriktion* von f auf die Menge X. Analog ist $f \upharpoonright Y$ die Einschränkung des Bildbereichs von f auf $Y \subseteq N$.

Diese Notationen werden auch für Elemente von ω^ω und von $\omega^{<\omega}$ benutzt. Erstere werden häufig mit x, y, z, letztere mit s und t bezeichnet.
Mit $|s|$ werde die *Länge* der endliche Folge s bezeichnet.
Die *Verkettung (Aneinanderreihung) von* $s, t \in \omega^{<\omega}$, bzw. $s \in \omega^{<\omega}$ und $x \in \omega^\omega$ wird wie folgt ausgedrückt: $s\hat{\ }t$ bzw. $s\hat{\ }x$.
Die *Einschränkungen* auf die Länge $n \in \omega$ bzw. $m < |s|$ seien $x \upharpoonright n$ und $s \upharpoonright m$.
Ein $x \in \omega^\omega$ kann in die zwei *Teilfolgen bestehend aus den geraden, bzw. ungeraden Einträgen* x_{I}, bzw. x_{II} aufgespalten werden:

$$x_{\mathrm{I}} = \langle x(2n);\ n \in \omega\rangle, \quad x_{\mathrm{II}} = \langle x(2n+1);\ n \in \omega\rangle.$$

Ebenso können zwei Folgen zu einer verschränkt werden, indem eine die geraden und die andere die ungeraden Einträge der neuen Folge bilden. Diese *Verschränkung* von $x, y \in \omega^\omega$ wird mit $x * y$ bezeichnet.

Die Menge ω^ω versehen mit der Topologie, die von den offenen Basismengen $U_s = \{x \in \omega^\omega;\ s \subset x\}$ für $s \in \omega^{<\omega}$ erzeugt wird, heißt *Baire–Raum.* Dieser wird in der Mengenlehre üblicherweise als Menge der reellen Zahlen bezeichnet.
Ich benutze in dieser Arbeit die Borel– und die projektive Hierarchie auf ω^ω sowie die arithmetische und die analytische Hierarchie relativ zu Elementen von ω^ω. Einen Überblick über diese Hierarchien und eine Reihe von Resultaten aus der Deskriptiven Mengenlehre, welche ich benötige, liefert beispielsweise Kanamori [11, § 12]. Eine Einführung in Kodierungen von Wohlordnungen auf ω durch Elemente von ω^ω findet sich ebenfalls in Kanamori [11, § 13, S. 165f.].

Für die gesamte Arbeit wird nun eine Abzählung der Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen definiert:

$$\Phi : \omega^{<\omega} \to \omega, \quad \begin{cases} \varnothing & \mapsto \quad 0 \\ \langle s(0), \ldots, s(n)\rangle & \mapsto \quad p_0^{s(0)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s(n)+1}, \end{cases}$$

wobei p_i die i-te Primzahl bezeichne ($i \in \omega$).

Diese Abzählung hat die folgenden Eigenschaften:

- $s_0 = \varnothing$ und $|s_i| \leq i$.

- Seien $t_1, t_2 \in \omega^{<\omega}$. Wenn t_2 die Folge t_1 echt verlängert, dann erscheint t_2 in der Abzählung nach t_1.

In den folgenden Abschnitten wird auf einige Grundlagen genauer eingegangen.

1.2 Absolutheit

Definition 1.1 Seien $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \in\rangle$ und $\mathfrak{M}_2 = \langle M_2, \in\rangle$ transitive Klassen mit $M_1 \subseteq M_2$. Dann heißt eine Formel $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ absolut zwischen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, falls

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi[x_1, \dots, x_n]$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in M_1$ gilt.

Formeln bis zu einer bestimmten Quantorenkomplexität sind absolut zwischen transitiven Modellen von ZSF. Ich benutze im folgenden die von Azriel Lévy 1965 eingeführte Hierarchie, die die Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ der Mengenlehre in die Klassen Σ_n^{ZSF} , Π_n^{ZSF} und Δ_n^{ZSF} für $n \in \omega$ einteilt (vgl. dazu Felgner [4, § 9, § 10]).

Es gilt folgendes zusammenfassendes Resultat für Modelle der Mengenlehre.

Proposition 1.2 *Seien* $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \in\rangle$ *und* $\mathfrak{M}_2 = \langle M_2, \in\rangle$ *transitive Modelle von* ZSF *mit* $M_1 \subseteq M_2$. *Dann gilt:*

(i) Jede Σ_1^{ZSF}*-Formel ist nach oben absolut,*

d.h. wenn $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ *eine* Σ_1^{ZSF}*-Formel ist, so folgt:*

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \implies \mathfrak{M}_2 \models \varphi[x_1, \dots, x_n]$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in M_1$.

(ii) Jede Π_1^{ZSF}*-Formel ist nach unten absolut.*

(iii) Jede Δ_1^{ZSF}*-Formel ist absolut zwischen* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$.

Beweis siehe Felgner [4, Prop. 12.2].

Die folgenden Beispiele von Π_1^{ZSF}-Formeln werden wir an späterer Stelle benötigen.

Hilfssatz 1.3 *Die Formeln*

(i) α *ist Kardinalzahl*

(ii) α *ist reguläre Kardinalzahl*

(iii) α *ist Limeskardinalzahl*

sind alle Π_1^{ZSF}.

Beweis:

$$(i) \quad \alpha \text{ ist Kardinalzahl} \iff \alpha \text{ ist Ordinalzahl und für kein } \beta \in \alpha \text{ existiert eine Bijektion von } \beta \text{ nach } \alpha.$$

$$\iff \alpha \text{ ist Ordinalzahl} \wedge \neg\exists\, f\big(f \text{ ist Funktion} \wedge \mathrm{Dom}(f) \in \alpha \wedge \mathrm{Im}(f) = \alpha \wedge \forall\, \beta \in \mathrm{Dom}(f)\ \forall\, \gamma \in \mathrm{Dom}(f)\ (\beta \neq \gamma \Rightarrow f(\beta) \neq f(\gamma))\big).$$

Diese Formel ist Π_1^{ZSF}, da „α ist Ordinalzahl“, „f ist Funktion“, „$y = \mathrm{Dom}(f)$“, „$y = \mathrm{Im}(f)$“, „$y = f(x)$“ alle Δ_0^{ZSF} sind (vgl. Felgner [4, Prop. 9.8]).

$$(ii) \quad \alpha \text{ ist reguläre Kardinalzahl} \iff \alpha \text{ ist Kardinalzahl} \wedge \neg\exists\, f\big(f \text{ ist Funktion} \wedge \mathrm{Dom}(f) \in \alpha \wedge \mathrm{Im}(f) \subseteq \alpha \wedge \forall\, \beta \in \alpha\ \exists\, y \in \mathrm{Im}(f) :\ \beta \in y\big).$$

$$(iii) \quad \alpha \text{ ist Limeskardinalzahl} \iff \alpha \text{ ist Kardinalzahl} \wedge \forall\, \beta \in \alpha\ \exists\, \gamma \in \alpha\ \big(\gamma \text{ ist Kardinalzahl} \wedge \beta \in \gamma\big).$$

□

1.3 Fundierte Relationen

In diesem Abschnitt wird eine Rangfunktion für fundierte Relationen definiert und gezeigt, daß die Eigenschaft „fundiert“ für transitive Modelle von ZSF absolut ist.

Definition 1.4 Eine binäre Relation R auf einer Menge M heißt *fundiert*, falls jede nicht leere Teilmenge $T \subseteq M$ ein R-minimales Element besitzt.

Hilfssatz 1.5 *Sei R eine binäre Relation auf der Menge M.*

(i) Wenn R fundiert ist, so existiert keine unendliche, bezüglich R strikt absteigende Kette von Elementen von M, d.h. eine Folge $\langle x_n;\ n \in \omega \rangle$ in M mit $x_{n+1}\, R\, x_n$ für alle $n \in \omega$.

(ii) Unter der Annahme von AC *gilt:*
Wenn keine unendliche, bezüglich R strikt absteigende Kette von Elementen von M existiert, so ist R fundiert.

Beweis: (*i*) Angenommen es existiert eine solche Kette $\langle x_n;\ n \in \omega \rangle$ mit $x_{n+1}\, R\, x_n$ für alle $n \in \omega$. Dann ist $\{x_n;\ n \in \omega\}$ eine Teilmenge von M ohne R-minimales Element, also ist R nicht fundiert.
(*ii*) Angenommen R ist nicht fundiert. Sei $\varnothing \neq T \subseteq M$ eine Menge ohne R-minimales Element. Mit AC können wir eine Folge $\langle x_n;\ n \in \omega \rangle$ mit $x_{n+1}\, R\, x_n$ für alle $n \in \omega$ auswählen.

□

Bemerkung:

- Um (*ii*) in obigem Hilfssatz zu zeigen, wird nicht das volle Auswahlaxiom benötigt. Es genügt ein schwächeres Prinzip, das *Axiom der abhängigen Auswahlen* (Principle of Dependent Choices, DC) genannt wird. Es wurde 1942 von Paul Bernays eingeführt und lautet folgendermaßen:

  > Sei R eine binäre Relation auf einer nicht leeren Menge M. Wenn für jedes $x \in M$ ein $y \in M$ existiert mit $y\, R\, x$, dann existiert eine Folge $\langle x_n;\ n \in \omega \rangle$ in M, so daß $x_{n+1}\, R\, x_n$ für alle $n \in \omega$ gilt.

  DC ist offenbar äquivalent zur Aussage 1.5 (*ii*).

- DC impliziert das *Abzählbare Auswahlaxiom* (Countable Axiom of Choice, AC_ω):

  > Jede abzählbare Menge nicht leerer Mengen besitzt eine Auswahlfunktion.

- Falls die Menge M wohlgeordnet ist, läßt sich 1.5 (*ii*) in ZSF beweisen.

Definition 1.6 Sei R eine fundierte Relation auf der Menge M. Wir definieren rekursiv eine Rangfunktion $\rho_R : \ M \longrightarrow \Omega$ durch

$$\rho_R(x) = \sup\{\rho_R(y) + 1; \ y \, R \, x\}.$$

Bemerkung: Die Existenz dieser Rangfunktion folgt aus dem Rekursionstheorem für fundierte Relationen (vgl. Felgner [4, § 10]):
Sei die Funktion $G : \ \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ definiert durch

$$G(x) = \bigcup \{y + 1; \ \exists \, z \ \langle z, y \rangle \in x\}$$

Nach dem Rekursionstheorem existiert dann eine Funktion F, so daß für alle $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} F(x) &= G(F \upharpoonright \{y \in M; \ y \, R \, x\}) \\ &= G(\{\langle y, F(y) \rangle; \ y \, R \, x\}) \\ &= \bigcup \{y + 1; \ \exists z \ : z \, R \, x \ \& \ y = F(z)\} \\ &= \bigcup \{F(z) + 1; \ z \, R \, x\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.7 *Sei R eine fundierte Relation auf der Menge M.*

(i) $\rho_R : \ M \longrightarrow \Omega, \ x \mapsto \rho_R(x)$ *ist eine ordnungserhaltende Abbildung, d.h. für $x, y \in M$ gilt:* $x \, R \, y \implies \rho_R(x) < \rho_R(y)$.

(ii) $\mathrm{Im}(\rho_R) = \sup\{\rho_R(x) + 1; \ x \in M\}$ *ist eine Ordinalzahl.*

(iii) Sei $\tilde{R}$ eine binäre Relation auf einer Menge $\tilde{M}$ und es existiere eine Abbildung $\rho : \tilde{M} \longrightarrow \Omega$ mit der Eigenschaft, daß für $x, y \in \tilde{M}$ gilt: $x \, \tilde{R} \, y \implies \rho(x) < \rho(y)$. Dann ist $\tilde{R}$ fundiert.

Beweis: (i) folgt direkt aus der Definition von ρ_R.
(ii) Da M eine Menge ist, folgt aus dem Ersetzungsaxiom, daß $\mathrm{Im}(\rho_R) \neq \Omega$ gilt. Sei $\alpha := \min_<\{\Omega - \mathrm{Im}(\rho_R)\}$. Offensichtlich ist $\alpha \subseteq \mathrm{Im}(\rho_R)$. Angenommen $\mathrm{Im}(\rho_R) \not\subseteq \alpha$. Dann existiert eine kleinste Ordinalzahl $\beta \in \mathrm{Im}(\rho_R) - \alpha$. Wegen $\alpha \notin \mathrm{Im}(\rho_R)$ ist $\beta > \alpha$.
Sei $x \in M$ mit $\rho_R(x) = \beta$. Dann gilt für alle $y \in M$ mit $y \, R \, x : \rho_R(y) < \alpha$.
Dies steht im Widerspruch zur Definition von ρ_R!
Außerdem folgt $\alpha = \sup\{\rho_R(x) + 1; \ x \in M\}$. Denn offensichtlich ist

$\sup\{\rho_R(x)+1;\ x \in M\} \in \Omega - \mathrm{Im}(\rho_R)$ und für alle $x \in M$ ist $\rho_R(x) < \alpha = \mathrm{Im}(\rho_R)$, d.h. $\sup\{\rho_R(x)+1;\ x \in M\} \leq \alpha$.
(iii) Sei $\varnothing \neq T \subseteq \tilde{M}$. Setze $\alpha := \min_<\{\rho(x);\ x \in T\} \subseteq \Omega$. Dann gilt für ein $m \in \{x \in T;\ \rho(x) = \alpha\}$, daß m in T minimal ist bezüglich $\tilde{R}$.

□

Definition 1.8 Die Ordinalzahl $\mathrm{Im}(\rho_R)$ heißt *Höhe* der fundierten Relation R.

Proposition 1.9 *Sei M eine Menge. Die Aussage*

R ist eine fundierte Relation auf M

ist absolut zwischen transitiven Modellen von ZSF.

Beweis: Wir zeigen, daß die Aussage: $(\star)$ „R ist eine fundierte Relation auf M" eine Δ_1^{ZSF}-Formel ist. Die Absolutheit folgt dann aus Proposition 1.2.
Einerseits ist $(\star)$ äquivalent zu

$$R \subseteq M \times M \ \wedge\ \forall T \ \big(\varnothing \neq T \subseteq M \Rightarrow \exists\, m \in T \ \ \forall\, y \in T :\ \neg\, y\, R\, m\big).$$

Dieses ist eine Π_1^{ZSF}-Formel.
Andererseits ist wegen Proposition 1.7 eine binäre Relation R auf M genau dann fundiert, wenn eine ordnungserhaltende Abbildung von M in die Ordinalzahlen existiert.
Somit ist $(\star)$ auch äquivalent zu

$$\begin{aligned} R \subseteq M \times M \ \wedge\ \exists f \ \ \Big(&f \text{ ist Funktion } \wedge\ \mathrm{Dom}(f) = M \ \wedge\ \forall\, x \in \mathrm{Im}(f):\ x \text{ ist} \\ &\text{Ordinalzahl } \wedge\ \forall\, x, y \in M\big(x\, R\, y \rightarrow f(x) \in f(y)\big)\Big). \end{aligned}$$

Diese Formel ist Σ_1^{ZSF}.

□

1.4 Das Reflexionsprinzip

Das ZSF-Reflexionsprinzip besagt, daß jede Formel, deren Interpretation im Universum gilt, bereits in einer der Stufen der kumulativen Hierarchie, also in einer Menge, gilt.

Satz 1.10 (Reflexionsprinzip für ZSF) (Montague–Lévy)
Sei $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ eine Formel. Für jede Ordinalzahl α existiert eine Limesordinalzahl β mit $\alpha < \beta$, so daß für alle $x_1, \dots x_n \in \mathbf{V}_\beta$ gilt:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \iff \mathbf{V}_\beta \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Ein Beweis findet sich bei Jech [9, Theorem 29].

1.5 Bäume

Sei im folgenden Y eine beliebige Menge.

Definition 1.11 Sei $k \in \omega$.
B heißt *Baum auf* $\omega^k \times Y$, falls

(i) $B \subseteq (\omega^{<\omega})^k \times Y^{<\omega}$,

(ii) $\langle s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, u\rangle \in B \quad \Rightarrow \quad |s_0| = |s_1| = \dots = |s_{k-1}| = |u|$,

(iii) $\langle s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, u\rangle \in B$
$\Rightarrow \quad \langle s_0 \restriction m,\ s_1 \restriction m, \dots, s_{k-1} \restriction m,\ u \restriction m\rangle \in B \quad \forall\, m \leq |s_0|$.

Bemerkung:

- Ein Baum auf $\omega^k \times Y$ besteht also aus $(k+1)$-Tupel endlicher Folgen gleicher Länge und ist abgeschlossen unter der Bildung von Anfangssegmenten.
- Für jeden Baum B gilt: $\langle \varnothing, \dots, \varnothing\rangle \in B$.
- Ich werde in dieser Arbeit vor allem
  - Bäume auf Y, d.h. $k = 0$, $B \subseteq Y^{<\omega}$ und
  - Bäume auf $\omega \times Y$, d.h. $k = 1$ und $B \subseteq \omega^{<\omega} \times Y^{<\omega}$

  betrachten.

Definition 1.12 Sei B ein Baum auf $\omega \times Y$ und B' ein Baum auf Y.

- Die Menge der *unendlichen Zweige von* B' bzw. B wird wie folgt definiert:

$$[B'] = \{y \in Y^\omega;\ \forall m \in \omega:\ y \restriction m \in B'\}$$

$$[B] = \{\langle x, y\rangle \in \omega^\omega \times Y^\omega;\ \forall m \in \omega:\ \langle x \restriction m,\ y \restriction m\rangle \in B\}\,.$$

- Sei $x \in \omega^\omega$. Dann ist

$$\begin{aligned} B_x &:= \{u \in Y^{<\omega};\ \exists m \in \omega:\ \langle x \restriction m,\ u\rangle \in B\} \\ &= \{u \in Y^{<\omega};\ \langle\, x \restriction |u|,\ u\,\rangle \in B\} \end{aligned}$$

  ein Baum auf Y.

Kapitel 2

Spiele und Determiniertheit

In diesem Kapitel definiere ich das Spiel $G(A)$ für eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$ und führe eine Reihe von grundlegenden Begriffen und Notationen ein.
Außerdem wird gezeigt, daß für offene und abgeschlossene Mengen A das Spiel $G(A)$ determiniert ist, und daß für die Borel– bzw. die projektive Hierarchie gilt: Die Aussage, daß alle $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$- bzw. $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Mengen determiniert sind, ist äquivalent zur Aussage, daß alle $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$- bzw. $\mathbf{\Pi}^1_n$-Mengen determiniert sind ($\alpha \in \omega_1,\ n \in \omega$).
Die Begriffe und Notationen richten sich im allgemeinen nach Kanamori [11, §§ 27 u. 28].

2.1 Einführung

Schon Anfang dieses Jahrhunderts wurden in der Mathematik Spiele untersucht und die Frage nach Gewinnstrategien für einen der Spieler gestellt. Dabei handelte es sich oftmals um Spiele, die wie zum Beispiel Schach tatsächlich von Menschen im Alltag gespielt werden. Solche Spiele haben die Eigenschaft, daß eine Partie nach endlicher Zeit zuende ist.
Mit unendlichen Spielen beschäftigten sich dann polnische Mathematiker in den 20er und 30er Jahren. Eine erste systematische Betrachtung der Spiele des für diese Arbeit wichtigen Typs $G(A)$ für $A \subseteq \omega^\omega$ publizierten David Gale und Frank Stewart 1953 [7].

Definition 2.1 Sei $A \subseteq \omega^\omega$. Das *Spiel* $G(A)$ ist ein unendliches Zwei–Personen–Nullsummenspiel mit perfekter Information.

Das bedeutet, es gibt zwei Spieler I und II, die abwechselnd ziehen. Eine Partie besteht aus unendlich vielen Zügen und wird von genau einem Spieler gewonnen. Beiden Spielern sind zu jedem Zeitpunkt alle bisher gespielten Züge bekannt.
Die Züge sind natürliche Zahlen. Das heißt, eine Partie wird von Spieler I mit einem $x(0) \in \omega$ begonnen, dann spielt II ein $x(1) \in \omega$, danach ist wieder I an der Reihe usw.
Eine Partie kann somit durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{I} & x(0) & & x(2) & & x(4) & \ldots \\ \mathbf{II} & & x(1) & & x(3) & & \ldots \end{array}$$

Die Partie endet nach ω Zügen. Spieler I gewinnt genau dann, wenn die resultierende Folge $x := \langle x(i);\ i \in \omega \rangle \in \omega^\omega$ in der Menge A liegt.

Definition 2.2

(1) Eine *Strategie für Spieler* I ist eine Funktion $\sigma : \bigcup_{n \in \omega} \omega^{2n} \longrightarrow \omega$.

Eine Strategie für I kann als eine Regel betrachtet werden, die Spieler I jedesmal, wenn er am Zug ist, mitteilt, welches Element von ω er spielen soll.

(2) Spieler I *spielt eine Partie gemäß seiner Strategie* σ, falls die Partie von der Form

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{I} & \sigma(\varnothing) & & \sigma\big(\langle \sigma(\varnothing), x(1) \rangle\big) & & \sigma\big(\langle \sigma(\varnothing), x(1), \sigma\big(\langle \sigma(\varnothing), x(1) \rangle\big), x(3) \big) \ldots \\ \mathbf{II} & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array}$$

ist. Wenn Spieler I gemäß σ und Spieler II die Folge $y \in \omega^\omega$ spielt, so bezeichnet man die resultierende Partie mit $\sigma * y$.

(3) Eine Strategie σ für Spieler I heißt *Gewinnstrategie*, falls

$$\{\sigma * y;\ y \in \omega^\omega\} \subseteq A.$$

Das heißt, Spieler I gewinnt jede Partie, in der er gemäß σ spielt.

(4) Eine *Strategie für Spieler* II ist eine Funktion $\tau : \bigcup_{n \in \omega} \omega^{2n+1} \longrightarrow \omega$.

(5) Spieler II *spielt eine Partie gemäß seiner Strategie* τ, falls die Partie von der Form

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{I} & x(0) & & x(2) & & x(3) \quad \ldots \\ \mathbf{II} & & \tau\big(\langle x(0)\rangle\big) & & \tau\Big(\big\langle x(0), \tau\big(\langle x(0)\rangle\big), x(2)\big\rangle\Big) & \quad\quad \ldots \end{array}$$

ist. Wenn Spieler II gemäß τ und Spieler I die Folge $z \in \omega^\omega$ spielt, so bezeichnet man die resultierende Partie mit $z * \tau$.

(6) Eine Strategie σ für Spieler I heißt *Gewinnstrategie*, falls

$$\{z * \tau;\ z \in \omega^\omega\} \cap A = \varnothing.$$

(7) Das Spiel $G(A)$ heißt *determiniert*, falls einer der Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

(8) Die Menge A heißt determiniert, falls das Spiel $G(A)$ determiniert ist.

(9) Sei Γ eine Klasse von Teilmengen von ω^ω. Dann setzen wir

$$\mathrm{Det}(\Gamma) \ :\Leftrightarrow\ \text{Jede Menge } A \in \Gamma \text{ ist determiniert.}$$

2.2 Offene und abgeschlossene Spiele

Man kann leicht Mengen angeben, die determiniert sind, z.B. $\varnothing$, ω^ω,
$\{x \in \omega^\omega;\ x(17) = 27\}$.
Andererseits konstruierten Gale und Stewart mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Teilmenge von ω^ω, die nicht determiniert ist.

Proposition 2.3 (Gale–Stewart, 1953) [ZSF + AC]
Es existiert ein $A \subseteq \omega^\omega$, so daß das Spiel $G(A)$ nicht determiniert ist.

Beweis: siehe Gale–Stewart [7, Theorem 1].

In derselben Arbeit wird gezeigt, daß offene und abgeschlossene Spiele determiniert sind (vgl. [7, Korollar zu Theorem 6]).

Satz 2.4 (Gale–Stewart, 1953)
Sei $A \subseteq \omega^\omega$ offen. Dann ist das Spiel $G(A)$ determiniert.

Beweis: Angenommen Spieler I hat keine Gewinnstrategie in $G(A)$.
Wir zeigen, daß dann Spieler II eine besitzt.
Der Grund ist, daß offene Spiele die folgende Eigenschaft haben: Wenn Spieler II eine Partie verliert, so steht dies bereits zu einem Zeitpunkt fest, bis zu dem nur endlich viele Züge gespielt worden sind.

Wir betrachten nun das Teilspiel $G(A)\,/\,s$ für

$$s \;=\; \langle\, x(0),\; x(1),\; x(2),\; x(3),\; \ldots\;,\; x(2n-1)\rangle, \qquad n \in \omega.$$

In diesem Spiel beginnt Spieler I, und beide Spieler ziehen nach denselben Regeln wie in $G(A)$. Falls für die resultierende Partie $x \in \omega^\omega$ gilt: $s\,\hat{}\,x \in A$, so gewinnt I; ansonsten gewinnt II.

Wenn Spieler I in $G(A)\,/\,s$ keine Gewinnstrategie hat, dann existiert für alle $i \in \omega$ ein $j \in \omega$, so daß I auch im Spiel $G(A)\,/\,s'$ mit $s' = s\,\hat{}\langle i, j\rangle$ keine Gewinnstrategie hat.
Denn falls ein $i \in \omega$ existiert, für das dies nicht gilt, so ist „Spiele i und dann gemäß der Gewinnstrategie für $G(A)\,/\,s'$ “ eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G(A)\,/\,s$, Widerspruch!

Somit können wir rekursiv eine Strategie τ für Spieler II in $G(A)$ definieren.
Da I keine Gewinnstrategie in $G(A)$ hat, existiert mit obiger Argumentation für alle möglichen Züge $x(0)$ von I ein $x(1) \in \omega$, so daß I im Spiel $G(A)\,/\,\langle\, x(0), x(1)\rangle$ auch keine Gewinnstrategie besitzt.
Sei $\tau(x(0))$ das kleinste $x(1)$ mit dieser Eigenschaft.
Sei nun $s = \langle x(0),\, x(1),\, x(2),\, x(3), \ldots\,,\, x(2n-1)\,\rangle$ für $n \geq 1$. Wir möchten $\tau(s)$ definieren. Wenn Spieler I im Spiel

$$G(A)\,/\langle\, x(0),\; x(1),\; x(2),\; x(3),\; \ldots\;,\; x(2n-1)\,\rangle$$

keine Gewinnstrategie besitzt, so existiert für den Zug $x(2n)$ von Spieler I ein $x(2n+1) \in \omega$, so daß I im Spiel $G(A)\,/s\,\hat{}\langle x(2n),\, x(2n+1)\rangle$ auch keine Gewinnstrategie besitzt.
Setze $\tau(s) := x(2n+1)$, wobei $x(2n+1)$ mit obiger Eigenschaft minimal gewählt ist.
Wenn I im Spiel $G(A)\,/\,\langle\, x(0),\, x(1),\, x(2),\, x(3),\, \ldots\,,\, x(2n-1)\,\rangle$ eine Gewinnstrategie besitzt, so setze $\tau(s) := 0$.

Wir zeigen nun, daß τ eine Gewinnstrategie für II ist.
Angenommen II spielt gemäß τ und verliert. Dann liegt die resultierende Partie x in A, und da A offen ist, existiert eine endliche Folge $s \in \omega^{<\omega}$ mit $s \subset x$ und $U_s \subseteq A$. Das heißt, daß jede Folge, die s verlängert, in A liegt, und somit hätte II bereits im $|s|$-ten Zug verloren. Dann hatte aber Spieler I eine Gewinnstrategie im Spiel $G(A)\,/s$ im Widerspruch zur Definition von τ!
Also ist $G(A)$ determiniert.

$\square$

Bemerkung:

- Die Determiniertheit von abgeschlossenen Spielen folgt mit derselben Argumentation.
- Dieser Beweis läßt sich auf alle Spiele anwenden, in denen gewährleistet ist, daß wenn einer der beiden Spieler verliert, dies bereits zu einem endlichen Zeitpunkt feststeht.

Wenn offene, d.h. $\mathbf{\Sigma}^0_1$, und abgeschlossene, d.h. $\mathbf{\Pi}^0_1$, Mengen determiniert sind, so liegt die Frage nahe, ob dies auch für weitere Stufen der Borel–Hierarchie gilt. Diese Frage werde ich im nächsten Kapitel beantworten.
Zuvor erwähne ich noch ein Resultat, das zeigt, daß der enge Zusammenhang zwischen der Determiniertheit offener und abgeschlossener Mengen auch für alle anderen Stufen der Borel- und der projektiven Hierarchie besteht (vgl. Moschovakis [27, Theorem 6A.4]).

Hilfssatz 2.5 *Sei* $\mathbf{\Gamma}$ *eine der folgenden Klassen von Teilmengen von* ω^ω*:*
$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha,\ \mathbf{\Pi}^0_\alpha,\ \mathbf{\Sigma}^1_n,\ \mathbf{\Pi}^1_n,$ *für* $\alpha \in \omega_1$ *und* $n \in \omega$.
Sei $\neg\mathbf{\Gamma} = \{A \subseteq \omega^\omega;\ \omega^\omega - A \in \mathbf{\Gamma}\}$. *Dann gilt:*

$$\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma}) \iff \mathrm{Det}(\neg\mathbf{\Gamma})\ .$$

Beweis: Sei $\mathbf{\Gamma}$ wie in der Voraussetzung und $A \subseteq \omega^\omega$.
Wir setzen $\hat{A} := \{\langle i\rangle\hat{\ }x \in \omega^\omega;\ i \in \omega\ \ \&\ \ x \in A\}$.

<u>Beh. 1:</u> Wenn $\hat{A}$ determiniert ist, so ist auch $\omega^\omega - A$ determiniert.
Angenommen Spieler I habe eine Gewinnstrategie $\hat{\sigma}$ in $G(\hat{A})$.

Dann kann man damit wie folgt eine Gewinnstrategie τ für Spieler II im Spiel $G(\omega^\omega - A)$ definieren:
$\tau(\langle x(0)\rangle) := \hat{\sigma}(\langle\hat{\sigma}(\emptyset), x(0)\rangle)$ und
$\tau(\langle x(0), x(1), \ldots, x(2n)\rangle) := \hat{\sigma}(\langle\hat{\sigma}(\emptyset), x(0), x(1), \ldots, x(2n)\rangle)$ für $n > 0$.
Wenn II eine Partie x gemäß τ spielt, so gilt: $\hat{\sigma}(\emptyset)\hat{\ }x \in \hat{A}$ und damit $x \in A$.
Also gewinnt II in $G(\omega^\omega - A)$.

Angenommen Spieler II habe eine Gewinnstrategie $\hat{\tau}$ in $G(\hat{A})$. Man bekommt durch
$\sigma(\emptyset) := \hat{\tau}(\langle 0\rangle)$ und
$\sigma(\langle x(0), x(1), \ldots, x(2n+1)\rangle) := \hat{\tau}(\langle 0, x(0), x(1), \ldots, x(2n+1)\rangle)$ für $n \geq 0$
eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G(\omega^\omega - A)$. Denn für eine Partie y, in der I gemäß σ spielt, gilt: $0\hat{\ }y \in \omega^\omega - \hat{A} = \{\langle i\rangle\hat{\ }x \in \omega^\omega;\ i \in \omega \ \ \&\ \ x \notin A\}$, d.h. $y \in \omega^\omega - A$.

Beh. 2: $A \in \mathbf{\Gamma} \iff \hat{A} \in \mathbf{\Gamma}$.
„$\Rightarrow$“ Sei $A \in \mathbf{\Gamma}$.
Die Abbildung $f : \omega^\omega \to \omega^\omega, \langle x(0), x(1), x(2), \ldots\rangle \mapsto \langle x(1), x(2), \ldots\rangle$ ist stetig.
$\hat{A} = f^{-1}(A) \in \mathbf{\Gamma}$, weil $\mathbf{\Gamma}$ abgeschlossen ist unter der Bildung stetiger Urbilder.
„$\Leftarrow$“ Sei $\hat{A} \in \mathbf{\Gamma}$.
Die Abbildung $f_i : \omega^\omega \to \omega^\omega, x \mapsto \langle i\rangle\hat{\ }x$ ist für jedes $i \in \omega$ stetig.
Falls $\mathbf{\Gamma} \in \{\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n\}$, wobei $\alpha \in \omega_1$ und $n \in \omega$ ist, so ist $\mathbf{\Gamma}$ abgeschlossen unter der Bildung stetiger Urbilder und abzählbarer Vereinigungen.
Es folgt: $A = \bigcup_{i\in\omega}\{x \in \omega^\omega;\ \langle i\rangle\hat{\ }x \in \hat{A}\} = \bigcup_{i\in\omega} f_i^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{\Gamma}$.
Falls $\mathbf{\Gamma} \in \{\mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n\}$, wobei $\alpha \in \omega_1$ und $n \in \omega$ ist, so ist $\mathbf{\Gamma}$ abgeschlossen unter der Bildung stetiger Urbilder und abzählbarer Schnitte.
Es folgt: $A = \bigcap_{i\in\omega}\{x \in \omega^\omega;\ \langle i\rangle\hat{\ }x \in \hat{A}\} = \bigcap_{i\in\omega} f_i^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{\Gamma}$.

Wegen $\omega^\omega - \hat{A} = \widehat{\omega^\omega - A}$, folgt aus Beh. 1 und Beh. 2: $\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma}) \iff \mathrm{Det}(\neg\mathbf{\Gamma})$.

$\square$

Bemerkung: Wenn $\Gamma = \Sigma^1_n(a)$ oder $\Gamma = \Pi^1_n(a)$ für ein $a \in \omega^\omega$ und ein $n \in \omega$ ist, so gilt ebenfalls

$$\mathrm{Det}(\Gamma) \iff \mathrm{Det}(\neg\Gamma)\ .$$

Der Beweis geht analog, weil f und f_i $(i \in \omega)$ sogenannte rekursive Funktionen sind und diese Klassen Γ unter der Bildung von Urbildern unter rekursiven Funktionen abgeschlossen sind.

Kapitel 3

Borel–Determiniertheit

3.1 Einleitung

In ihrem Artikel von 1953, in dem David Gale und Frank Stewart die Determiniertheit von offenen und abgeschlossenen Mengen zeigten, formulierten sie die Frage, ob auch die Determiniertheit von $\mathbf{\Sigma}_2^0$- und $\mathbf{\Pi}_2^0$-Mengen beweisbar ist (vgl. [7, S.246]).
Bereits 1955 zeigte Philip Wolfe [32], daß $\mathbf{\Sigma}_2^0$-Mengen und damit nach 2.5 auch $\mathbf{\Pi}_2^0$-Mengen determiniet sind.
Morton Davis erweiterte die Aussage 9 Jahre später auf $\mathbf{\Sigma}_3^0$-Mengen [1, Theorem 2.1], und 1971 konnte Jeffrey Paris [28] $\mathbf{\Sigma}_4^0$-Determiniertheit zeigen.
1970 publizierte Donald Martin [19] den Beweis, daß unter der Annahme, daß eine meßbare Kardinalzahl existiert, $\mathbf{\Pi}_1^1$- und $\mathbf{\Sigma}_1^1$-Mengen (und damit auch Borelmengen) determiniert sind (vgl. Kapitel 7 dieser Arbeit). Damit war ein Axiomensystem gegeben, aus dem die Borel–Determiniertheit beweisbar ist. Es stellte sich die Frage, ob auch eine schwächere Voraussetzungen als die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl ausreicht.
Allerdings hatte Harvey Friedman [6] bereits 1968 gezeigt, daß die Determiniertheit von Borelmengen nicht in der Zermeloschen Mengenlehre, d.h. dem Axiomensystem ZSF ohne Ersetzungsaxiom, beweisbar ist.
1975 gelang es Martin [20], die Borel–Determiniertheit nur aus den Axiomen von ZSF+AC zu beweisen. Aus dem Resultat von Friedman folgt, daß dabei das Fraenkelsche Ersetzungsaxiom in seiner vollen Stärke eingehen muß.
Eine überarbeitete und direktere Version des Beweises von 1975 publizierte Mar-

tin 1985 [21]. Im Jahr 1990 erweiterte er das Resultat auf eine größere Klasse von Spielen.

Eine ähnliche Geschichte hat sich auch bei der Determiniertheit von Blackwell–Spielen zugetragen. Dieser Typ von Spielen entstammt der ökonomischen Spieltheorie; es handelt sich um unendliche Spiele ohne perfekte Information.
Nach einem Resultat von John von Neumann von 1928 sind offene Blackwell–Spiele determiniert.
David Blackwell zeigte 1969 die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^0_2$-Blackwell–Spielen und M. Vervoort 1996 die $\mathbf{\Sigma}^0_3$-Blackwell–Determiniertheit.
1996/97 hat sich dann Donald Martin der Problematik angenommen und konnte in ZSF + AC beweisen, daß alle Borel–Blackwell–Spiele determiniert sind (vgl. Martin [23]).

Satz 3.1 (Martin, 1975) [ZSF + AC]
Sei $A \subseteq \omega^\omega$ eine Borel-Menge. Dann ist das Spiel $G(A)$ determiniert.

Die Idee des Beweises ist, dem Spiel $G(A)$ ein Hilfsspiel $G_{X^*}(A^*)$ zuzuordnen, das determiniert ist, und in dem man aus einer Gewinnstrategie für Spieler I bzw. II eine Gewinnstategie in $G(A)$ für I bzw. II ableiten kann.
Die Züge im Spiel $G_{X^*}(A^*)$ bestehen im wesentlichen aus denen vom Spiel $G(A)$, bereichert um weitere Objekte, die gewährleisten, daß die Determiniertheit von A^* sichtbar wird. Das heißt, man bekommt eine „kanonische Projektion“ von A^* auf A, anhand derer die Gewinnstrategien übertragen werden.
Mit einer solchen Konstruktion bewies Martin 1975, daß aus $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_k)$ für $k \in \omega$ $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_{k+1})$ folgt. Um $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ für $\omega \leq \alpha < \omega_1$ zu zeigen, mußte er die Konstruktion transfinit iterieren. In seinem Beweis von 1985 arbeitet Martin mit einer Eigenschaft von Mengen, die die Determiniertheit impliziert und wies diese Eigenschaft für Borel-Mengen nach. Dazu formulierte er die beteiligten Spiele mit Hilfe von Bäumen neu.

Ich stelle im folgenden die Argumentation von Martin [21] dar, vgl. außerdem Martin [20] sowie Kechris [13, § 20].
Als Basistheorie für dieses Kapitel dient ZSF + AC.

3.2 Das Konzept der Überdeckungen

Definition 3.2 Sei Y eine Menge.

- Sei $B \subseteq Y^{<\omega}$ ein Baum.
  B enthält keine Sackgassen $:\Leftrightarrow (\forall\, s \in B:\ \exists\, t \in B:\ s \subset t)$.

- Sei B ein Baum ohne Sackgassen.
  Für $A \subseteq [B]$ ist das Spiel $G_B(A)$ wie folgt definiert:
  Spieler I und II spielen wie üblich $\langle x(0), x(1), x(2), \dots \rangle$, wobei
  $\langle x(0), x(1), x(2), \dots, x(n) \rangle \in B$ für alle $n \in \omega$ gelten muß.
  I gewinnt, falls gilt: $\langle x(0), x(1), x(2), \dots \rangle \in A$.

Bemerkungen:

- Die Eigenschaft, keine Sackgassen zu besitzen, gewährleistet, daß in jeder Position der Spieler, der an der Reihe ist, eine Zugmöglichkeit besitzt, die den Spielregeln entspricht.

- Die Begriffe *Strategie*, *Gewinnstrategie* und *Determiniertheit* werden wie gewohnt definiert.

- Die bisher betrachteten Spiele $G(A)$ lassen sich wie folgt als Spiele über einem Baum formulieren:
  Setze $B := \omega^{<\omega}$. Dann ist $A \subseteq [B] = \omega^\omega$. Damit ist das Spiel $G_B(A)$ identisch mit $G(A)$.

- Die Topologie auf ω^ω läßt sich für einen beliebigen Baum B ohne Sackgassen auf $[B]$ übertragen.
  Die Mengen $U_s := \{x \in [B];\ s \subseteq x\}$ für $s \in B$ bilden die Basis der Topologie.
  Damit definiert man die Borel–Hierarchie für Teilmengen von $[B]$ auf die übliche Weise.

- Der Beweis von Gale und Stewart [7] läßt sich auf offene Spiele obiger Form übertragen. Das heißt, wenn $A \subseteq [B]$ eine offene Menge ist, so ist das Spiel $G_B(A)$ determiniert.

Definition 3.3 Sei B ein Baum ohne Sackgassen.
Ein Baum $B' \subseteq B$ heißt ein *von I gesteuerter Teilbaum von B* bzw. eine *Quasistrategie für I*, falls B' keine Sackgassen enthält und für alle $n \in \omega$ gilt:
$\langle x(0), \ldots, x(2n)\rangle \in B'$ und $\langle x(0), \ldots, x(2n), x(2n+1)\rangle \in B$
$\Longrightarrow \langle x(0), \ldots, x(2n), x(2n+1)\rangle \in B'$.

Ein Baum $B' \subseteq B$ heißt ein *von I gesteuerter Teilbaum von B ab der Höhe k* ($k \in \omega$), falls B' keine Sackgassen enthält und obige Definition für alle $n \in \omega$ mit $2n \leq k$ gilt.

Bemerkung:

- Weil B' keine Sackgassen enthält, gibt es, falls $\langle x(0), \ldots, x(\ell)\rangle \in B'$, für $\ell \in \omega$, für den Spieler, der an der Reihe ist, ein $x(\ell+1)$ mit $\langle x(0), \ldots, x(\ell), x(\ell+1)\rangle \in B'$.
  Spieler II stehen sogar alle Zugmöglichkeiten offen, die er in B besitzt.

- Ein *von II gesteuerter Teilbaum von B* bzw.*von II gesteuerter Teilbaum von B ab der Höhe k* ($k \in \omega$) wird entsprechend definiert.

Spielt Spieler I einen von I gesteuerten Teilbaum (ab der Höhe k), so bestimmt er damit, in welchem Teil des Baumes das Spiel weiter verlaufen wird, ohne dabei die Zugmöglichkeiten für II einzuschränken. Die Wahl eines solchen Teilbaums entspricht einer Auswahl bzw. einem Einfärben der entsprechenden Zweige.
Solange die Züge von I in diesem Teilbaum bleiben, weiß man, daß das Spiel diesen Bereich nicht verlassen kann. Im Hilfsspiel kann durch die Wahl solcher Teilbäume jeweils ein „kleineres Spielfeld“ mit eventuell einfacherer Struktur abgesteckt werden.
Dem Spiel $G_B(A)$ wird ein Hilfsspiel zugeordnet, das auch über einem Baum $\tilde{B}$ gespielt wird. Damit die Determiniertheit von $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ auf $G_B(A)$ übertragen werden kann, muß $\tilde{B}$ einige Voraussetzungen erfüllen.

Definition 3.4 Sei B ein Baum ohne Sackgassen.
Eine *Überdeckung von B* ist ein Tripel $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ mit

(1) $\tilde{B}$ ist ein Baum ohne Sackgassen.

(2) $\pi : [\tilde{B}] \longrightarrow [B]$ ist eine Abbildung, wobei für alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in [\tilde{B}]$ gilt:

$\tilde{x}\upharpoonright n = \tilde{y}\upharpoonright n \Rightarrow \pi(\tilde{x})\upharpoonright n = \pi(\tilde{y})\upharpoonright n$,

d.h. $\pi(\tilde{x})\upharpoonright n$ hängt nur von $\tilde{x}\upharpoonright n$ ab.

(3) φ ist eine Abbildung von Strategien in $\tilde{B}$ nach Strategien in B, wobei $\varphi(\tilde{\sigma})$ eine Strategie für denselben Spieler ist wie $\tilde{\sigma}$ in $\tilde{B}$. Dabei muß gelten, daß die Strategie $\varphi(\tilde{\sigma})$ eingeschränkt auf Positionen bis zur Länge n nur von der Strategie $\tilde{\sigma}$ eingeschränkt auf Positionen bis zur Länge n abhängt.

(4) Wenn $\tilde{\sigma}$ eine Strategie in $\tilde{B}$ ist und $x \in [B]$ eine Partie gemäß $\varphi(\tilde{\sigma})$, dann existiert eine Partie $\tilde{x} \in [\tilde{B}]$ gemäß $\tilde{\sigma}$, so daß gilt: $\pi(\tilde{x}) = x$.

Bemerkung:

- Aus (2) ist ersichtlich, daß man π auch als Abbildung: $\pi' : \tilde{B} \rightarrow B$ auffassen kann.

  [Sei $\tilde{s} \in \tilde{B}$ mit $|\tilde{s}| = n$. Definiere $\pi'(\tilde{s}) = \pi(\tilde{x})\upharpoonright n$, wobei $\tilde{s} \subset \tilde{x} \in [\tilde{B}]$. Dann gilt für alle $\tilde{s} \in \tilde{B}$: $|\tilde{s}| = |\pi'(\tilde{s})|$.]

  Im folgenden werden wir zwischen π' und π nicht mehr unterscheiden.

- π ist monoton, denn für alle $s, t \in \tilde{B}$ gilt:

  $s \subseteq t \Rightarrow s = t\upharpoonright |s| \Rightarrow \pi(s) \subseteq \pi(t)$.

- $\pi : [\tilde{B}] \rightarrow [B]$ ist stetig, denn: Sei $s \in B$.

  $$\pi^{-1}(\{x \in [B];\ s \subset x\}) = \{y \in [\tilde{B}];\ s \subset \pi(y)\} = \bigcup_{t \in \pi^{-1}(\{s\})} \{y \in [\tilde{B}];\ t \subset y\},$$

  d.h. das Urbild einer offenen Menge ist offen.

Bemerkung 3.5 Falls B ein Baum ohne Sackgassen ist, der eine Überdeckung $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ besitzt und $A \subseteq [B]$, so kann man dem Spiel $G_B(A)$ ein Spiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ zuordnen, wobei $\tilde{A} = \pi^{-1}(A) \subseteq [\tilde{B}]$.
<u>Beh.:</u> Falls $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ determiniert ist, so gilt dies auch für $G_B(A)$.

Beweis: Sei $\tilde{\sigma}$ eine Gewinnstrategie in $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ für Spieler I. Sei x eine Partie in $G_B(A)$ gemäß $\varphi(\tilde{\sigma})$. Dann existiert nach (4) eine Partie $\tilde{x} \in [\tilde{B}]$ gemäß $\tilde{\sigma}$ mit $\pi(\tilde{x}) = x$. Da $\tilde{\sigma}$ eine Gewinnstrategie für I ist, gilt $\tilde{x} \in \tilde{A}$.

Also folgt $x \in \pi(\tilde{A}) = \pi(\pi^{-1}(A)) \subseteq A$.
Damit ist $\varphi(\tilde{\sigma})$ eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G_B(A)$.
Analog gilt: Falls $\tilde{\tau}$ eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ ist, so ist $\varphi(\tilde{\tau})$ eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G_B(A)$.

Das Konzept der Überdeckung kann also das Gewünschte leisten. In unserem Fall stellt sich nun die Frage, wie eine solche Überdeckung $\tilde{B}$ genau aussehen muß. Zum einen soll B in $\tilde{B}$ „enthalten sein“, zum anderen soll $\tilde{B}$ eine Borelmenge $\tilde{A}$ „vereinfachen“, so daß deren Determiniertheit offensichtlich wird.
Dies kann so geschehen: Der Baum B wird in Teilbäume B_i $(i \in I)$ (die nicht disjunkt sein müssen!) zerlegt, so daß sich jeder Zweig von B in einem der B_i findet und jedes $A \cap [B_i]$ in $[B_i]$ von „einfacher Bauart“ ist. Stellt man sich die B_i in übereinandergetürmten Ebenen vor, so ergibt die „Projektion von oben“ den Baum B und es gilt: $A = \bigcup_{i \in I} (A \cap [B_i])$.
Der Überdeckungsbaum $\tilde{B}$ ist dann als ganzes Gebilde komplizierter als B, hat man sich aber auf eine konkrete Spielebene geeinigt, so wird die Sachlage vereinfacht.
Die Rolle der Teilbäume werden u.a. von I bzw. II gesteuerte Teilbäume übernehmen, da sie gewährleisten, daß die Spieler in der einmal gewählten Ebene bleiben. A findet sich in $\tilde{B}$ in Form von $\pi^{-1}(A)$, also seines Urbilds unter der „Projektion“ π, wieder. Eine optimale Vereinfachung von A ist dann erreicht, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in $[\tilde{B}]$ ist.

Definition 3.6 Sei B ein Baum ohne Sackgassen, $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ eine Überdeckung von B und $A \subseteq [B]$.
$(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ *entwirrt* A, falls $\pi^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in $[\tilde{B}]$ ist.

Bemerkung 3.7

- Wenn die Überdeckung $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ die Teilmenge $A \subseteq [B]$ entwirrt, so entwirrt sie auch $[B] - A$.
- Sei $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ eine Überdeckung von B, $A \subseteq [B]$, $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

  Dann ist π stetig und somit auch $\pi^{-1}(A) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

Proposition 3.8 *Sei $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ eine Überdeckung von B, die $A \subseteq [B]$ entwirrt. Dann ist das Spiel $G_B(A)$ determiniert.*

Beweis: $\pi^{-1}(A)$ ist offen, also ist $G_{\tilde{B}}(\pi^{-1}(A))$ determiniert und somit nach Bemerkung 3.5 auch $G_B(A)$.

□

Proposition 3.9 *Sei (B_1, π_1, φ_1) eine Überdeckung von B_0, und sei (B_2, π_2, φ_2) eine Überdeckung von B_1.*
Dann ist $(B_2,\ \pi_1 \circ \pi_2,\ \varphi_1 \circ \varphi_2)$ eine Überdeckung von B_0.

□

Korollar 3.10 *Sei $A \subseteq [B_0]$. Sei $(B_1,\ \pi_1,\ \varphi_1)$ eine Überdeckung von B_0, die A entwirrt und $(B_2,\ \pi_2,\ \varphi_2)$ eine Überdeckung von B_1.*
Dann wird A von $(B_2,\ \pi_1 \circ \pi_2,\ \varphi_1 \circ \varphi_2)$ entwirrt.

□

Wenn wir für jede Borelmenge $A \subseteq [B]$ zeigen können, daß B eine Überdeckung $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ besitzt, die A entwirrt, so folgt mit Proposition 3.8 die Borel–Determiniertheit. Die Stetigkeit von π spielt dabei eine wichtige Rolle, führt allein aber noch nicht zum Ziel. Um die Borel–Determiniertheit durch transfinite Induktion für alle $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Mengen, $\alpha \in \omega_1$, durchführen zu können, muß eine Kette von Überdeckungen verwendet werden. Diese soll so beschaffen sein, daß zuerst B in Ebenen von Teilbäumen zerlegt wird, welche selbst wieder in Ebenen zerlegt werden usw. bis die Struktur des Urbilds von A hinreichend einfach wird.
Um zu erreichen, daß diese Kette einen „Limes-Baum“ besitzt, werden die Überdeckungsbäume so gewählt, daß sie bis zu einer immer größeren Höhe identisch sind.
Aus diesem Grund wird das Konzept der Überdeckungen leicht verschärft:

Definition 3.11 Eine Überdeckung $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ von B heißt k-Überdeckung , falls

(5) $\tilde{B} \restriction k = B \restriction k$ und
$\pi \restriction (\tilde{B} \restriction k)$ die Identität ist, wobei $\tilde{B} \restriction k = \{s \in \tilde{B};\ |s| \leq k\}$.

Bemerkung: Wenn $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ eine k-Überdeckung von B ist, so sind für $A \subseteq [B]$ die ersten k Züge einer Partie im zugehörigen Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\pi^{-1}(A))$ gleich wie in $G_B(A)$. Außerdem gilt für eine Strategie $\tilde{\sigma}$ für einen der Spieler in $\tilde{B}$: $\varphi(\tilde{\sigma})$ eingeschränkt auf Positionen bis zur Länge $k-1$ ist gleich $\tilde{\sigma}$ eingeschränkt auf Positionen bis zur Länge $k-1$. Dies folgt direkt aus (4).

3.3 Beweis der Borel–Determiniertheit

Proposition 3.12 *Sei B ein Baum ohne Sackgassen, $k \in \omega$ und $A \subseteq [B]$ abgeschlossen.*
Dann existiert eine k-Überdeckung von B, die A entwirrt.

Beweisidee: Die gesuchte k-Überdeckung soll gewährleisten, daß für jedes $x \in [B]$ eine Ebene mit einem Teilbaum B_i in $\tilde{B}$ existiert, so daß $\pi^{-1}(x) \in [B_i]$.
Für jede solche Ebene soll gelten: Ihr Teilbaum führt entweder ganz nach A oder ganz nach $[B] - A$. Dann ist A die Vereinigung über alle $[B_i]$, welche ganz in A liegen. $\pi^{-1}(A)$ ist offen in $\tilde{B}$, wenn alle diese $[B_i]$ offen in $\tilde{B}$ sind. Weil π stetig ist, falls die Überdeckung $\tilde{B}$ die Bedingungen (1)–(5) erfüllt, ist $\pi^{-1}(A)$ automatisch abgeschlossen.
Offenen Mengen in $[\tilde{B}]$ sind dadurch charakterisiert, daß zu einem endlichen Zeitpunkt bereits feststeht, daß eine Folge in der Menge liegt.
Das Ziel wird also sein, die Simulation so zu führen, d.h. die Teilbäume so zu wählen, daß zu einem endlichen Zeitpunkt eine Ebene festgelegt wird, in der das Spiel fortan verläuft.

Beweis: Da jede k-Überdeckung von B auch eine $(k-1)$-Überdeckung von B ist, reicht es, die Behauptung für gerades k zu zeigen. Sei also k gerade.
Wir beschreiben $\tilde{B}$ in der Form, daß wir die Spiele, die über $\tilde{B}$ möglich sind, angeben, wobei die legalen Züge dieser Spiele den Baum $\tilde{B}$ definieren.
Zu $A \subseteq [B]$ definieren wir das folgende Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ über $\tilde{B}$:

$$\begin{array}{lllllllll}
\textbf{I} & x(0) \;\ldots & & x(k-2) & & \langle x(k), B_{\mathrm{I}} \rangle & & x(k+2) \;\ldots & \\
\textbf{II} & & x(1) \;\ldots & & x(k-1) & & \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1) \rangle & & x(k+3) \;\ldots
\end{array}$$

Dabei muß gelten:

- $\langle x(0), x(1), \ldots, x(j) \rangle \in B \quad \forall j < k$,
  d.h. bis zur Höhe k sind die Bäume B und $\tilde{B}$ identisch.

- Im $(k+1)$-ten Zug spielt Spieler I die Zahl $x(k)$ und B_{I}, einen von I gesteuerten Teilbaum von B ab der Höhe k, wobei gelten muß:

  $\langle x(0), x(1), \ldots, x(k) \rangle \in B$ und

$\forall s \in B_{\mathrm{I}}: \ \langle x(0), \ldots, x(k)\rangle \subseteq s$ oder $s \subseteq \langle x(0), \ldots, x(k)\rangle$,

d.h. B_{I} beginnt mit $\langle x(0), \ldots, x(k)\rangle$.

- Im $(k+2)$-ten Zug hat II zwei Optionen:

  (1) II spielt B_{II}, einen von II gesteuerten Teilbaum von B_{I} ab der Höhe $k+1$ mit $[B_{\mathrm{II}}] \subseteq A$, und ein $x(k+1)$, so daß gilt: $\langle x(0), x(1), \ldots, x(k), x(k+1)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$.

  (2) II spielt einen Teilbaum B_{II} von B_{I} der Form: $B_{\mathrm{II}} = \{s \in B_{\mathrm{I}};\ s \subseteq t$ oder $t \subseteq s\}$ für ein $t \in B_{\mathrm{I}}$, so daß $\langle x(0), x(1), \ldots, x(k)\rangle \subseteq t$ und $\{x \in [B_{\mathrm{I}}];\ t \subset x\} \cap A = \varnothing$, und ein $x(k+1)$, so daß $\langle x(0), x(1), \ldots, x(k), x(k+1)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$.

- Ab dem $k+3$-ten Zug spielen I und II wieder abwechselnd natürliche Zahlen $x(i)$ für $i \geq k+2$, so daß gilt: $\langle x(0), \ldots, x(k), x(k+1), \ldots x(i)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$.

$\tilde{B}$ besteht also aus den Elementen des folgenden Typs:

$$\Big\langle x(0), \ldots, x(k-1),\ \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle,\ \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle,\ x(k+2), \ldots x(\ell)\Big\rangle \qquad (\ell \in \omega),$$

wobei für $x(i)$ $(i \leq \ell)$, B_{I} und B_{II} obige Bedingungen erfüllt sein müssen.

Das so definierte $\tilde{B}$ ist offensichtlich ein Baum.

$\tilde{B}$ besitzt keine Sackgassen, d.h. in jeder Position hat der sich an der Reihe befindende Spieler eine Zugmöglichkeit:
Weil B keine Sackgassen enthält, ist dies für die ersten k Züge und für den $(k+1)$-ten Zug $\langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle$ klar:
Spieler I kann z.B. $B_{\mathrm{I}} = \{s \in B;\ \langle x(0), \ldots, x(k)\rangle \subseteq s$ oder $s \subseteq \langle x(0), \ldots, x(k)\rangle\}$ spielen.
Für den $(k+2)$-ten Zug $\langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle$ gilt:

<u>Fall 1:</u> Es existiert ein $x \in [B_{\mathrm{I}}] - A$.
Dann ist $\langle x(0), \ldots, x(k)\rangle \subseteq x$, und da $[B_{\mathrm{I}}] - A$ offen ist, gibt es ein $t \in B_{\mathrm{I}}$ mit $\langle x(0), \ldots, x(k)\rangle \subseteq t \subset x$ und $\{y \in [B_{\mathrm{I}}];\ t \subset y\} \cap A = \varnothing$. Dann kann II im $(k+2)$-ten Zug Option (2) wählen.

<u>Fall 2:</u> Ein solches x existiert nicht, d.h. es ist $[B_{\mathrm{I}}] \subseteq A$ und II kann Option (1) mit $B_{\mathrm{II}} = B_{\mathrm{I}}$ wählen.

Da B_{II} nach Definition keine Sackgassen enthält, gilt für die nachfolgenden Züge, daß der sich an der Reihe befindende Spieler stets eine Zugmöglichkeit hat. Somit erfüllt $\tilde{B}$ Bedingung (1) aus der Definition von Überdeckungen.

Die Abbildung $\pi : [\tilde{B}] \longrightarrow [B]$ wird auf naheliegende Weise definiert:
$\pi\Big(\big\langle x(0), \dots, x(k-1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle, \langle B_{II}, x(k+1)\rangle, x(k+2), \dots\big\rangle\Big)$
$= \big\langle x(0), \dots, x(k), x(k+1), x(k+2), \dots\big\rangle.$
Offensichtlich erfüllt π die Bedingung (2) für Überdeckungen.

Als nächstes definieren wir φ, indem wir ausgehend von einer Strategie $\tilde{\sigma}$ in $\tilde{B}$ die Strategie $\varphi(\tilde{\sigma}) = \sigma$ in B definieren. Sei dazu $\hat{A} := \pi^{-1}(A)$.

<u>Fall 1:</u> $\tilde{\sigma}$ ist eine Strategie für I in $\tilde{B}$.
Zum Spiel $G_B(A)$ simulieren wir das Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$.
Auf allen Positionen bis zur Länge $(k-1)$ soll $\varphi(\tilde{\sigma}) = \sigma$ mit $\tilde{\sigma}$ übereinstimmen. Wenn $\tilde{\sigma}$ im $(k+1)$-ten Zug $\langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle$ vorgibt, dann sei $x(k)$ der entsprechende Zug gemäß σ.

σ soll möglichst denselben Zug vorgeben wie $\tilde{\sigma}$ im zugehörigen simulierten Hilfsspiel in $\tilde{B}$. Das Problem liegt im $(k+2)$-ten Spielzug. Im Hilfsspiel hat II eine Entscheidungsmöglichkeit, die den gesamten weiteren Spielverlauf, also auch die Züge von II beeinflußt. Im Spiel $G_B(A)$ unterliegt II diesen Beschränkungen nicht. Ziel ist es nun, eine Entscheidung im $(k+2)$-ten Spielzug in $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ so zu simulieren, daß unabhängig davon wie II in $G_B(A)$ im folgenden spielt, das simulierte Spiel das Spiel in $G_B(A)$ treffend beschreibt und außerdem den Regeln für Spiele in $\tilde{B}$ entspricht.

Wir betrachten dazu das Spiel $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)$. Dieses ist determiniert, da $[B_{\mathrm{I}}] - A$ offen in $[B_{\mathrm{I}}]$ ist.

A) I hat eine Gewinnstrategie σ' in $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)$.
Ab dem $(k+3)$-ten Spielzug $x(k+2)$ hält sich σ vorerst an σ'. Damit wird gewährleistet, daß $\langle x(0), \dots, x(k), x(k+1), \dots\rangle \in [B_{\mathrm{I}}] - A$, denn da B_{I} ab der Höhe k ein von I gesteuerter Teilbaum von B ist, bleibt die Folge in B_{I}, unabhängig davon wie II in $G_B(A)$ spielt. Weil $[B_{\mathrm{I}}] - A$ offen ist, existiert ein $n \in \omega$, n gerade, mit

$$\big\langle x(0), x(1), \dots, x(k), x(k+1), x(k+2), \dots, x(n)\big\rangle =: t,$$

$$A \cap \{x \in [B_{\mathrm{I}}];\ t \subset x\} = \varnothing,$$

und n ist minimal mit dieser Eigenschaft.
Ab dem $(n+3)$-ten Spielzug entspricht σ wieder $\tilde{\sigma}$, allerdings in einem nach obigen Wünschen simulierten Spiel, in dem bisher

$$\big\langle x(0), x(1), \ldots, x(k+1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle, x(k+2), \ldots, x(n)\big\rangle$$

gespielt wurde mit $B_{\mathrm{II}} = \{s \in B;\ s \subseteq t \text{ oder } t \subseteq s\}$. II hat also Option (2) im $(k+2)$-ten Spielzug gewählt.
Somit können die in $G_B(A)$ legalen Spielzüge von II nun im Hilfsspiel nachgespielt werden, ohne daß die Regeln in $\tilde{B}$ verletzt werden.

B) II hat eine Gewinnstrategie τ' in $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)$.
Für $s \in B_{\mathrm{I}}$ sei das Teilspiel $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)\,/\,s$ wie im Beweis von 2.4 definiert. Falls $|s|$ gerade ist, beginnt Spieler I; ansonsten beginnt II. Spieler I gewinnt, falls für die resultierende Partie x gilt: $s\hat{\ }x \in [B_{\mathrm{I}}] - A$.
Sei

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{II}} = \{s \in B_{\mathrm{I}};\ & \text{Im Spiel } G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)\,/\,s \text{ hat I keine Gewinnstrategie, und für} \\ & \text{alle } t \subseteq s \text{ gilt: In } G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)\,/\,t \text{ hat I keine Gewinnstrategie}\}. \end{aligned}$$

Da I keine Gewinnstrategie im Spiel $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}]-A)$ hat, ist $\varnothing \in B_{\mathrm{II}}$, d.h. $B_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$.
Nach Definition ist B_{II} ein Teilbaum von B_{I}.
B_{II} hat keine Sackgassen, denn:

- Falls $s \in B_{\mathrm{II}}$, $|s|$ gerade, dann ist I am Zug. Für jedes $x(\ell)$, das I spielen kann, gilt $s\hat{\ }\langle x(\ell)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$.

- Falls $s \in B_{\mathrm{II}}$, $|s|$ ungerade, dann ist II am Zug, und es existiert ein $x(\ell+1)$ mit $s\hat{\ }\langle x(\ell+1)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$.

Sonst hätte I jeweils an der Position s bereits eine Gewinnstrategie.

Diese Argumentation liefert ebenfalls:
B_{II} ist ab der Höhe $k+1$ ein von II gesteuerter Teilbaum von B_{I}.

Es gilt $[B_{\mathrm{II}}] \subseteq A$. Denn angenommen es existiert ein $x \in [B_{\mathrm{II}}] - A$, so gibt es, da $x \in [B_{\mathrm{I}}] - A$ und $[B_{\mathrm{I}}] - A$ offen, ein $n \in \omega$ mit $x \restriction n \in B_{\mathrm{I}}$ und

$$\{y \in [B_{\mathrm{I}}];\ x \restriction n \subset y\} \cap A = \varnothing.$$

Also hat I eine Gewinnstragtegie in $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A) \,/\, x\!\upharpoonright\! n$.
Aber $x \in [B_{\mathrm{II}}]$, d.h. $x\!\upharpoonright\! n \in B_{\mathrm{II}}$, im Widerspruch zur Definition von B_{II}.

Spielt II im Spiel $G_B(A)$ die Zahl $x(k+1)$, so daß gilt $\langle x(0), \dots, x(k+1)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$, so entspricht σ der Strategie $\tilde{\sigma}$ in dem Hilfsspiel, in dem II Option (1) im $(k+2)$-ten Spielzug gewählt hat und bisher $\big\langle x(0), x(1), \dots, x(k+1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle\big\rangle$ gespielt wurde.
Die Antworten von σ entsprechen auch im folgenden denen von $\tilde{\sigma}$, solange II Züge $x(\ell)$ spielt, so daß $\langle x(0), \dots, x(k+1), \dots, x(\ell)\rangle \in B_{\mathrm{II}}$ bleibt.

Falls II ein $x(\ell)$ spielt, so daß $\langle x(0), \dots, x(k+1), \dots, x(\ell)\rangle \notin B_{\mathrm{II}}$, so bedeutet dies nach Definition von B_{II}, daß $\langle x(0), \dots, x(k+1), \dots, x(\ell)\rangle$ eine Position ist, ab der I eine Gewinnstrategie im Spiel $G_{B_{\mathrm{I}}}([B_{\mathrm{I}}] - A)$ hat.
I kann nun wie im Fall A weiterspielen.

Fall 2: $\tilde{\tau}$ ist eine Strategie für II in $\tilde{B}$.
Wir simulieren wieder das Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$. Auf allen Positionen bis zur Länge k soll $\varphi(\tilde{\tau}) =: \tau$ mit $\tilde{\tau}$ übereinstimmen.
Sei $x(k)$ der nächste Zug von I.

Nun hat I im simulierten Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ die Möglichkeit, ein Teilspiel zu wählen, was den weiteren Spielverlauf und insbesondere die Entscheidung für eine der Optionen von II im nächsten Zug beeinflußt. An dieses Teilspiel ist I aber im Spiel $G_B(A)$ nicht gebunden.

Seien

$S := \{B_{\mathrm{I}};\ B_{\mathrm{I}}$ ist ab der Höhe k ein von I gesteuerter Teilbaum von B, der mit $\langle x(0), \dots, x(k)\rangle$ beginnt$\}$

$T := \big\{t \in B;\ \langle x(0), \dots, x(k)\rangle \subseteq t,$ und es existiert $B_{\mathrm{I}} \in S$, so daß gilt: Wenn I im Spiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ das Paar $\langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle$ spielt, dann antwortet $\tilde{\tau}$ mit der Option (2) und spielt das Paar $\langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle$, wobei $B_{\mathrm{II}} = \{s \in B_{\mathrm{I}};\ s \subseteq t \text{ oder } t \subseteq s\}\big\}$

$$\text{Sei } D := \{x \in [B];\ \exists\, t \in T:\ t \subset x\} = \bigcup_{t \in T} \{x \in [B];\ t \subset x\}.$$

Somit ist D offen in $[B]$ und das Spiel $G_B([B] - D)$ determiniert.

A) II hat eine Gewinnstrategie τ' in $G_B([B]-D)$.
Wenn II nach τ' spielt und die zugehörige Partie $x \in D$ ist, also ein $t \in B$ existiert mit $t \subset x$, dann gilt $\langle x(0),\dots,x(k)\rangle \subset x$ und $x \notin A$, denn II hat Option (2) gewählt.
τ folgt vorerst τ'.
Im Spiel $G_B(A)$ wird somit eine Position

$$t \;=\; \langle x(0),\dots,x(k),\dots,x(\ell)\rangle \in B$$

erreicht, wobei $\ell > k$ minimal gewählt ist. D.h. es existieren $B_{\mathrm{I}} \in S$ und eine Partie im Hilfsspiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$, in der $\langle x(0), x(1),\dots,x(k+1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle,$ $\langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle,\dots,x(\ell)\rangle$ gespielt wurde, wobei $B_{\mathrm{II}} = \{s \in B_{\mathrm{I}};\ s \subseteq t \text{ oder} t \subseteq s\}$, und II gemäß $\tilde{\tau}$ gespielt hat.

Im folgenden reagiert τ in $G_B(A)$ wie $\tilde{\tau}$ in $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$. Dieses Spiel simuliert wie gewünscht das Spiel $G_B(A)$.

B) I hat eine Gewinnstrategie σ' in $G_B([B]-D)$.
Sei

$$B_{\mathrm{I}} = \Big\{s \in B;\ \big(\langle x(0),\dots,x(k)\rangle \subseteq s \text{ und II hat keine Gewinnstrategie in } G_B([B]-D)\,/\,s, \text{ und für alle } t \subseteq s \text{ gilt: II hat keine Gewinnstrategie in } G_B([B]-D)\,/\,t\big) \text{ oder } \big(s \subseteq \langle x(0),\dots,x(k)\rangle\big)\Big\}.$$

Wie im Fall 1 B folgt, daß B_{I} ab der Höhe k ein von I gesteuerter Teilbaum von B ist.

Im Spiel $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ spiele I nun $\langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle$. $\tilde{\tau}$ kann darauf nicht mit Option (2) reagieren und $B_{\mathrm{II}} = \{s \in B_{\mathrm{I}};\ t \subseteq s \text{ oder} s \subseteq t\}$ für ein $t \in B_{\mathrm{I}}$ spielen.

Angenommen doch, dann wäre $t \in U$, was bedeutet, daß unabhängig davon wie die folgenden Züge aussehen, Spieler I in $G_B([B]-D)$ verliert, da die zugehörige Partie x in D liegt. Also hat II in $G_B([B]-D)\,/\,t$ eine Gewinnstrategie, im Widerspruch zu $t \in B_{\mathrm{I}}$!

Also wählt $\tilde{\tau}$ die erste Möglichkeit und spielt $\langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle$, wobei B_{II} ab der Höhe k ein von II gesteuerter Teilbaum von B_{I} ist mit $[B_{\mathrm{II}}] \subseteq A$.

Im Spiel $G_B(A)$ spielt τ nun dieses $x(k+1)$ und im weiteren folgt τ vorerst $\tilde{\tau}$ solange $\big\langle x(0),\dots x(k-1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}}\rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1)\rangle, x(k+2),\dots x(\ell)\big\rangle \in B_{\mathrm{II}}$ ist (für $k < \ell$).

Falls für $\ell > k$ Spieler I ein $x(\ell)$ spielt, so daß

$$\big\langle x(0), \dots x(k-1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}} \rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1) \rangle, x(k+2), \dots x(\ell) \big\rangle \notin B_{\mathrm{II}},$$

so ist, da B_{II} ab der Höhe k ein von II gesteuerter Teilbaum von B_{I} ist,

$$\big\langle x(0), \dots x(k-1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}} \rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1) \rangle, x(k+2), \dots x(\ell) \big\rangle \notin B_{\mathrm{I}}.$$

Somit hat II an der Position $\langle x(0), \dots, x(k-1), x(k), x(k+1), \dots, x(\ell) \rangle$ eine Gewinnstrategie im Spiel $G_B([B]-D)$ und kann wie im Fall A weiterspielen.

Die so definierte Abbildung φ erfüllt offensichtlich die Bedingung (3) aus Definition 3.4.
Aus der Konstruktion von φ ist ersichtlich, daß auch Eigenschaft (4) erfüllt ist.

Da die Bäume B und $\tilde{B}$ bis zur Höhe k übereinstimmen, ist auch (5) aus Definition 3.11 erfüllt und $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ eine k-Überdeckung von B.

Damit ist π stetig und somit $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen.
Wir zeigen nun, daß $\pi^{-1}(A)$ auch offen ist.
$\tilde{B}$ wurde so definiert, daß Elemente von $[\tilde{B}]$ Partien entsprechen, die gemäß den Regeln von $G_{\tilde{B}}(\tilde{A})$ gespielt wurden.
Darum folgt für $\tilde{x} \in [\tilde{B}]$, daß $\pi(\tilde{x}) \in [B_{\mathrm{II}}]$ und somit folgende Äquivalenz gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \in \pi^{-1}(A) &\Leftrightarrow \pi(\tilde{x}) \in A \\ &\Leftrightarrow \text{II nimmt im } k+1\text{-ten Zug Option (1) (d.h } [B_{\mathrm{II}}] \subseteq A). \end{aligned}$$

Sei also $\tilde{x} = \big\langle x(0), \dots x(k-1), \langle x(k), B_{\mathrm{I}} \rangle, \langle B_{\mathrm{II}}, x(k+1) \rangle, x(k+2), \dots \big\rangle \in \pi^{-1}(A)$.
Dann ist $\{\tilde{y} \in [\tilde{B}];\ \tilde{y}(i) = \tilde{x}(i)\ \forall i \leq k+1\} \subseteq \pi^{-1}(A)$, also eine offene Umgebung in $\pi^{-1}(A)$ von $\tilde{x}$. Somit ist $\pi^{-1}(A)$ auch offen.

Insgesamt folgt: $(\tilde{B}, \pi, \varphi)$ ist eine k-Überdeckung von B, die A entwirrt.

□

Korollar 3.13 *Sei B ein Baum ohne Sackgassen, $k \in \omega$ und $A \subseteq [B]$ offen. Dann existiert eine k-Überdeckung von B, die A entwirrt.*

□

Das Konzept der k-Überdeckungen bewirkt, daß eine Kette (B_i, π_i, φ_i) von $(k+i)$-Überdeckungen einen „Limesbaum“ besitzt, welcher alle B_i überdeckt.

Proposition 3.14 (Existenz der inversen Limiten)
Sei $k \in \omega$. Sei $(B_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ eine $(k+i)$-Überdeckung von B_i für alle $i \in \omega$. Dann existieren ein Baum $\tilde{B}$ ohne Sackgassen und Abbildungen $\tilde{\pi}_i$ und $\tilde{\varphi}_i$ $(i \in \omega)$, so daß für alle $i \in \omega$ gilt:
$(\tilde{B}, \tilde{\pi}_i, \tilde{\varphi}_i)$ ist eine $(k+i)$-Überdeckung von B_i, $\tilde{\pi}_i = \pi_{i+1} \circ \tilde{\pi}_{i+1}$ und $\tilde{\varphi}_i = \varphi_{i+1} \circ \tilde{\varphi}_{i+1}$.

Beweis: Wegen Eigenschaft (5) der k-Überdeckung (vgl.3.11) gilt:
$B_i \upharpoonright (k+i) = B_{i+1} \upharpoonright (k+i) \quad \forall\, i \in \omega$, also auch
$B_i \upharpoonright (k+i) = B_j \upharpoonright (k+i) \qquad \forall\, j \geq i$.
Somit setzen wir für eine endliche Folge s:

$$\begin{aligned} s \in \tilde{B} \;:\Longleftrightarrow\; & s \in B_i \quad \text{für alle } i \in \omega \text{ mit } |s| \leq k+i \\ \Longleftrightarrow\; & s \in B_i \quad \text{für } i \in \omega \text{ minimal mit } |s| \leq k+i. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\tilde{B}$ ein Baum ohne Sackgassen und für alle $i \in \omega$ gilt:
$\tilde{B} \upharpoonright (k+i) = B_i \upharpoonright (k+i) = B_j \upharpoonright (k+i) \quad \forall\, j \geq i$.

Wir definieren nun $\tilde{\pi}_i : \tilde{B} \to B_i$ für $i \in \omega$.
Sei $s \in \tilde{B}$.

- Falls $|s| \leq k+i$, so ist $s \in B_i$ und wir setzen $\tilde{\pi}_i(s) = s$.
- Falls $k+i < |s| \leq k+j$ mit $j \in \omega$, so ist $s \in B_j$ und wir setzen $\tilde{\pi}_i(s) = \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_j(s) \in B_i$.

Diese Definition ist für $|s| \leq k+j$ unabhängig von j, da $\pi_j \upharpoonright \big(B_j \upharpoonright (k+j-1)\big)$ die Identität ist.
Also ist für $k+i < |s| \leq k+j_1 < k+j_2$: $\pi_{j_1+1} \circ \ldots \circ \pi_{j_2-1} \circ \pi_{j_2}(s) = s$.

Damit ist für jedes $i \in \omega$ auch $\tilde{\pi}_i : [\tilde{B}] \longrightarrow [B_i]$ definiert durch
$(\tilde{\pi}_i(\tilde{x}))(k) = \big(\tilde{\pi}_i(\tilde{x} \upharpoonright (k+1))\big)(k)$ für $\tilde{x} \in [\tilde{B}]$ und $k \in \omega$.

Ferner gilt $\tilde{\pi}_i = \pi_{i+1} \circ \tilde{\pi}_{i+1}$.
Denn falls $|s| \leq k+i$, so ist $\tilde{\pi}_i(s) = s = \pi_{i+1} \circ \tilde{\pi}_{i+1}(s)$,
und falls $k+i < |s| \leq k+j$, so ist $\tilde{\pi}_i(s) = \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_j(s) = \pi_{i+1} \circ \tilde{\pi}_{i+1}(s)$.
$\tilde{\pi}_i$ erfüllt nach Definition die Eigenschaften (2) und (5).

Als nächstes definieren wir für $i \in \omega$ die Abbildung $\tilde{\varphi}_i$ von Strategien in $\tilde{B}$ nach Strategien in B_i wie folgt:

Sei $\tilde{\sigma}$ eine Strategie auf $\tilde{B}$.
$\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ stimmt mit $\tilde{\sigma}$ auf Positionen bis zur Länge $k+i$ überein. Diese Definition ist möglich, da $\tilde{B}\upharpoonleft(k+i) = B_i\upharpoonleft(k+i)$ ist.
Nun möchten wir $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ auf Positionen der Länge $m > k+i$ betrachten.

Sei dazu $j > i$ und $k+i < m \leq k+j$. Da $\tilde{B}\upharpoonleft(k+j) = B_j\upharpoonleft(k+j)$, kann man eine Position in $\tilde{B}$ bis zur Länge $k+j$ auch als Position in B_j auffassen.
Deshalb und wegen der Eigenschaft (3) von Überdeckungen macht es Sinn $\tilde{\sigma}$ als Strategie in B_j zu betrachten. $\varphi_j(\tilde{\sigma})$ ist dann eine Strategie in B_{j-1} eingeschränkt auf Positionen der Länge $\leq k+j$. Für Positionen der Länge m und $k+i < m \leq k+j$ soll $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ gleich wie $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_j(\tilde{\sigma})$ reagieren.
$\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ ist für Positionen der Länge $\leq k+j$ eine Strategie in B_i. Diese Definition ist unabhängig von j für $m \leq k+j$:
Da $\pi_{j+1}\upharpoonleft\big(B_{j+1}\upharpoonleft(k+j)\big)$ die Identität ist, folgt aus (3) und (4) für eine Strategie σ_{j+1} auf B_{j+1}, daß sie und $\varphi_{j+1}(\sigma_{j+1})$ auf Positionen bis zur Länge $k+j$ übereinstimmen.
Iterativ folgt also, daß für $k+i < m \leq k+j_1 < k+j_2$ die Strategien $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_{j_1}(\tilde{\sigma})$ und $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_{j_2}(\tilde{\sigma})$ auf Positionen der Länge $\leq k+j_1$ übereinstimmen.

Nach Konstruktion von φ ist klar, daß Eigenschaft (3) erfüllt ist.

Wegen $\tilde{B}\upharpoonleft(k+i) = B_i\upharpoonleft(k+i) = B_{i+1}\upharpoonleft(k+i)$ stimmt auch $(\varphi_{i+1} \circ \tilde{\varphi}_{i+1})(\tilde{\sigma})$ mit $\tilde{\sigma}$ auf Postitionen bis zur Länge $k+i$ überein. Für Positionen der Länge m mit $k+i < m$ reagiert $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ wie $(\varphi_{i+1} \circ \tilde{\varphi}_{i+1})(\tilde{\sigma})$. Also gilt für alle $i \in \omega$:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_{i+1} \circ \tilde{\varphi}_{i+1}.$$

Nun bleibt noch (4) zu zeigen:
Sei $i \in \omega$. Sei $x_i \in [B_i]$ eine Partie, die gemäß $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma})$ gespielt wurde.
Wegen $\tilde{\varphi}_i(\tilde{\sigma}) = \varphi_{i+1}(\tilde{\varphi}_{i+1}(\tilde{\sigma}))$ und (4) für φ_{i+1} existiert eine Partie $x_{i+1} \in [B_{i+1}]$ gemäß $\tilde{\varphi}_{i+1}(\tilde{\sigma})$ mit $\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$.
Da $\tilde{\varphi}_{i+1}(\tilde{\sigma}) = \varphi_{i+2}(\tilde{\varphi}_{i+2}(\tilde{\sigma}))$, existiert eine Partie $x_{i+2} \in [B_{i+2}]$ gemäß $\tilde{\varphi}_{i+2}(\tilde{\sigma})$, so daß $\pi_{i+2}(x_{i+2}) = x_{i+1}$ gilt.

Sukzessive erhält man auf diese Weise für jedes $j > i$ eine Partie $x_j \in [B_j]$, die gemäß $\tilde{\varphi}_j(\tilde{\sigma})$ gespielt wurde und für die gilt: $\pi_j(x_j) = x_{j-1}$.

Für jedes $j \in \omega$ ist π_{j+1} eingeschränkt auf Positionen bis zur Länge $k+j$ die Identität. Also folgt:
$x_{j+1}\restriction(k+j) = x_j\restriction(k+j)$ und iterativ $x_\ell\restriction(k+j) = x_j\restriction(k+j)$ für $j \leq \ell$.
Das heißt, die Glieder der Folge $\langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\rangle$ stimmen auf immer größer werdenden Anfangsabschnitten überein und wir können $\tilde{x} \in [\tilde{B}]$ definieren durch:

$$\tilde{x}\restriction(k+j) = x_j\restriction(k+j) \quad \text{für } j \geq i.$$

Außerdem gilt: $\tilde{x}$ ist ein Spielverlauf, der nach $\tilde{\sigma}$ gespielt wurde, denn:

Für $j \geq i$ gilt $\tilde{x}\restriction(k+j) = x_j\restriction(k+j)$, $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\varphi}_j(\tilde{\sigma})$ stimmen auf Positionen bis zur Länge $k+j$ überein und x_j wurde gemäß $\tilde{\varphi}_j(\tilde{\sigma})$ gespielt.

Schließlich ist $\tilde{\pi}_i(\tilde{x}) = x_i$. Denn nach Definition ist $\tilde{\pi}_i$ auf den ersten $k+i$ Stellen die Identität und für $\ell \in \omega$ mit $k+i < \ell \leq k+j$ ($j \in \omega$ beliebig) gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_i(\tilde{x}\restriction\ell) &= \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_{j-1} \circ \pi_j(\tilde{x}\restriction\ell) \\
&= \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_{j-1} \circ \pi_j(x_j\restriction\ell) \\
&= \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_{j-1}(x_{j-1}\restriction\ell) \\
&= \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_{j-2}(x_{j-2}\restriction\ell) \\
&= x_i\restriction\ell.
\end{aligned}$$

□

Wir haben nun alle Hilfsmittel, um induktiv die Determiniertheit der Borel–Mengen zu zeigen. Zu $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ konstruieren wir eine Folge von Überdeckungen, die sukzessive die Komponenten von A entwirren. Mit Proposition 3.14 besitzt diese Folge einen „Limes-Baum“.

Satz 3.15 *Sei B ein Baum ohne Sackgassen und $A \subseteq [B]$ eine Borelmenge. Dann existiert für jedes $k \in \omega$ eine k-Überdeckung von B, die A entwirrt.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch transfinite Induktion für jede $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Menge, $\alpha \in \omega_1$.

Die Behauptung für $\mathbf{\Sigma}^0_1$-Mengen und für $\mathbf{\Pi}^0_1$-Mengen folgt aus Proposition 3.12 bzw. Korollar 3.13.

Sei $1 < \alpha \in \omega_1$.

<u>Ind. Voraussetzung:</u> Für alle $\beta < \alpha$ gelte: Sei B ein Baum ohne Sackgassen, $A \subseteq [B]$ eine $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$- oder $\mathbf{\Pi}^0_\beta$- Menge. Sei $k \in \omega$. Dann existiert eine k-Überdeckung von B, die A entwirrt.

<u>Ind. Schritt:</u> Wir zeigen die Behauptung für $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-Mengen. Daraus folgt sie dann mit Hilfe der Bemerkung 3.7 für $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-Mengen.
Sei also B ein Baum ohne Sackgassen, $A \subseteq [B]$ und $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ sowie $k \in \omega$.
Dann ist $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ mit $A_i \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_i}$ und $\beta_i < \alpha$ für alle $i \in \omega$.
Nach der Induktionsvoraussetzung existiert eine k-Überdeckung (B_1, π_1, φ_1) von $B_0 := B$, die A_0 entwirrt.
Dann ist π_1 stetig und somit

$$\pi_1^{-1}(A_i) \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_i}, \qquad \forall\, i \in \omega.$$

Also existiert nach Induktionsvoraussetzung eine $k+1$-Überdeckung (B_2, π_2, φ_2) von B_1, die $\pi_1^{-1}(A_1) \subseteq [B_1]$ entwirrt.
Wir iterieren das und wählen für jedes $i \in \omega$ eine $k+i$-Überdeckung $(B_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ von B_i, die $\pi_i^{-1} \circ \pi_{i-1}^{-1} \circ \ldots \circ \pi_1^{-1}(A_i) \subseteq [B_i]$ entwirrt.
Sei $(\tilde{B}, \tilde{\pi}_i, \tilde{\varphi}_i)$ für alle $i \in \omega$ die durch Proposition 3.14 gegebene $k+i$-Überdeckung von B_i. Nach Definition von $\tilde{\pi}_0$ gilt für jedes $i \in \omega$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0^{-1}(A_i) &= (\tilde{\pi}_1^{-1} \circ \pi_1^{-1})\,(A_i) \\
&= (\tilde{\pi}_2^{-1} \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1})\,(A_i) = \ldots \\
&= (\tilde{\pi}_{i+1}^{-1} \circ \pi_{i+1}^{-1} \circ \pi_i^{-1} \circ \ldots \circ \pi_1^{-1})\,(A_i).
\end{aligned}$$

Da $(\pi_{i+1}^{-1} \circ \pi_i^{-1} \circ \ldots \circ \pi_1^{-1})(A_i)$ offen und abgeschlossen in $[B_{i+1}]$, und $\tilde{\pi}_{i+1}^{-1}$ stetig ist, ist auch $\tilde{\pi}_0^{-1}(A_i) \subseteq [\tilde{B}]$ offen und abgeschlossen.

Somit entwirrt $(\tilde{B},\ \tilde{\pi}_0,\ \tilde{\varphi}_0)$ die Menge A_i für jedes $i \in \omega$.
Folglich ist $\tilde{\pi}_0^{-1}(A) = \bigcup_{i\in\omega} \tilde{\pi}_0^{-1}(A_i)$ offen in $[\tilde{B}]$.
Nach Korollar 3.13 existiert eine k-Überdeckung (B^*, π^*, φ^*) von $\tilde{B}$, die $\tilde{\pi}_0^{-1}(A)$ entwirrt. Damit ist mit Proposition 3.9 $(B^*, \tilde{\pi}_0 \circ \pi^*, \tilde{\varphi}_0 \circ \varphi^*)$ eine k-Überdeckung von B. Diese entwirrt A.

$\square$

Korollar 3.16 *Sei B ein Baum ohne Sackgassen und $A \subseteq [B]$ eine Borel–Menge.*
Dann ist das Spiel $G_B(A)$ determiniert.

□

Damit ist der Satz 3.1 bewiesen.

Bemerkung: Am Anfang des Kapitels erwähnte ich, daß Friedman bewiesen hatte, daß die Borel–Determiniertheit nicht ohne Verwendung des Ersetzungsaxioms beweisbar ist.
Ich möchte kurz darlegen, an welcher Stelle Martins Beweis das Ersetzungsaxiom verwendet:
Sei $B \subseteq \omega^{<\omega}$ ein Baum auf ω und $A \subseteq [B]$ eine abgeschlossene Menge. Um eine k-Überdeckung von B zu erhalten, die A entwirrt, konstruieren wir in 3.12 einen Baum B_1, dessen Elemente aus Elementen von ω sowie aus Teilbäumen von B, d.h. Teilmengen von $\omega^{<\omega}$, bestehen. Damit dies möglich ist, muß die Existenz von $\mathcal{P}(\omega)$ gewährleistet sein.
Um zu beweisen, daß zu jeder Borel–Menge eine Überdeckung existiert, die diese entwirrt, wird die Konstruktion iteriert.
Für die Konstruktion des Baumes B_2, der B_1 überdeckt, sind als Züge u.a. Teilbäume von B_1 erforderlich, d.h. Teilmengen von $\mathcal{P}(\omega)$. Somit muß die Menge $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\omega)\big)$ existieren.
Für jeden weiteren Iterationsschritt wird ein neuer Baum benötigt, der einen Teilbaum des vorigen beinhaltet. Dazu ist jeweils eine weitere Iteration der Potenzmengenoperation nötig.
Um die Determiniertheit aller Borel–Mengen zu zeigen, benötigen wir im Beweis folglich die Existenz von $\mathcal{P}^\alpha(\omega)$ für alle $\alpha \in \omega_1$.
Dies erfordert die Existenz der kumulativen Hierarchie bis $\mathbf{V}_{\omega_1}$ und diese ist aufgrund der rekursiven Definition nicht ohne das Ersetzungsaxiom beweisbar (vgl. Friedman [6]).

Kapitel 4

Die Nicht–Beweisbarkeit von $\mathbf{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$

In diesem Kapitel zeige ich, daß die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen in ZSF + AC nicht beweisbar ist. Dazu wird zunächst mit Hilfe eines Spieles bewiesen, daß Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) impliziert, daß jede überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge eine perfekte Teilmenge enthält.
Mit einem Resultat, das auf Kurt Gödel zurückgeht, folgt dann, daß diese Aussage in ZFS + AC nicht beweisbar sein kann.
Die Eigenschaft, eine perfekte Menge zu enthalten, war vor allem deswegen interessant, weil man (in ZSF + AC) zeigen kann, daß jede perfekte Teilmenge von ω^ω die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat. Dieses Resultat bewies bereits Georg Cantor im Zusammenhang mit seinen Anstrengungen, einen Beweis für die Kontinuumshypothese zu finden (vgl. dazu Felgner [3, § 17]).

4.1 Perfekte Mengen und das Spiel $G_{\mathcal{C}}(A)$

Sei $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.

Definition 4.1

(i) $x \in A$ heißt *Häufungspunkt von A*, falls für jede offene Umgebung $U \subseteq X$ mit $x \in U$ gilt: $(A \cap U) - \{x\} \neq \varnothing$.

(ii) $x \in A$ heißt *isolierter Punkt von A*, falls $x \in A$ und x kein Limespunkt von A ist.

Bemerkung: $x \in A$ ist also genau dann ein isolierter Punkt von A, wenn es eine offene Umgebung U gibt, mit : $A \cap U = \{x\}$.

Definition 4.2 A heißt *perfekt*, falls A nicht leer und abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt.

Sei $\mathbf{\Gamma} \in \{\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n;\ n \in \omega\}$ eine Klasse aus der Projektiven Hierarchie von ω^ω.
Ich zeige nun: Wenn alle Mengen aus $\mathbf{\Gamma}$ determiniert sind, so besitzen alle überabzählbaren $\mathbf{\Gamma}$-Mengen eine perfekte Teilmenge.

Dazu werden wir zunächst ein Spiel auf dem Cantor-Raum $\mathcal{C} = 2^\omega$ betrachten und dann das Ergebnis auf ω^ω übetragen.
Dieses Spiel und sein Zusammenhang mit perfekten Mengen wurde das erste Mal von Davis 1964 publiziert [1, § 4].

$\mathcal{C}$ ist ein polnischer Raum. Die Basis der offenen Mengen in $\mathcal{C}$ wird dabei von den $U_s := \{x \in 2^\omega;\ s \subset x\}$ für $s \in 2^{<\omega}$ gebildet. Auf $\mathcal{C}$ kann man dieselbe Metrik wie auf ω^ω definieren. Diese erzeugt gerade die hier betrachtete Topologie.
$\mathcal{C}$ ist somit ein Teilraum des Baire–Raums ω^ω.

Sei $A \subseteq \mathcal{C}$. Das Spiel $G_{\mathcal{C}}(A)$ sei wie folgt definiert:

- Spieler I spielt Elemente $s_{2i} \in 2^{<\omega}$, $i \in \omega$, also endliche Folgen von 0 und 1, und

- Spieler II spielt Elemente $k_{2i+1} \in 2$, $i \in \omega$.

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbf{I} & s_0 & & s_2 & & s_4 & \ldots & \\ \mathbf{II} & & k_1 & & k_3 & & k_5 & \ldots \end{array}$$

Sei $x = s_0\hat{\ }\langle k_1\rangle\hat{\ }s_2\hat{\ }\langle k_3\rangle\hat{\ }\ldots \in 2^\omega$ die Verkettung der Spielzüge beider Spieler.
Spieler I gewinnt, falls $x \in A$ gilt, ansonsten gewinnt II.
Allgemein sei für endliche Folgen $s = \langle s_0,\, k_1,\, s_2, \ldots ,\, s_{2n}\rangle$, bzw.
$t = \langle s_0,\, k_1,\, s_2, \ldots ,\, k_{2n+1}\rangle$ die Verkettung wie folgt bezeichnet:
$s_* := s_0\hat{\ }\langle k_1\rangle\hat{\ }s_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }s_{2n}$, bzw. $t_* := s_0\hat{\ }\langle k_1\rangle\hat{\ }s_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\langle k_{2n+1}\rangle$.

Proposition 4.3 *Sei $A \subseteq \mathcal{C}$. Dann gilt:*

(i) A ist abzählbar $\Longleftrightarrow$ Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $G_{\mathcal{C}}(A)$.

(ii) A besitzt eine perfekte Teilmenge $\Longleftrightarrow$ *Spieler I hat eine Gewinnstrategie in* $G_{\mathcal{C}}(A)$.

Beweis: (i) „ $\Rightarrow$ “ Sei $A = \{a_i;\ i \in \omega\}$ abzählbar. Die Gewinnstrategie für II wird durch ein Diagonalargument gebildet, das für alle $\ell \in \omega$ im ℓ-ten Zug von II sicherstellt, daß die resultierende verkette Partie $x \in \mathcal{C}$ von a_ℓ verschieden ist: Für $s = \langle s_0,\, k_1,\, s_2, \ldots,\, s_{2n}\rangle$ mit $|s_*| = \ell \quad (n, \ell \in \omega)$ sei

$$\tau(s) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } a_n(\ell) = 1 \\ 1 & \text{, falls } a_n(\ell) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist τ eine Gewinnstrategie.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, Spieler II hat eine Gewinnstrategie τ. Sei $\{t_i;\ i \in \omega\}$ eine Abzählung von $2^{<\omega}$. Sei im folgenden $p = \langle s_0,\, k_1,\, s_2, \ldots,\, k_{2n+1}\rangle$ eine Teilpartie, in der II gemäß τ gespielt hat. Sei

$$D_p := \Big\{x \in 2^\omega;\ p_* \not\subseteq x \text{ oder } \big(p_* \subset x \ \ \&\ \ \exists\, t \in 2^{<\omega}\ (p_*{}^\frown t^\frown\langle\tau(p^\frown\langle t\rangle)\rangle \subset x)\big)\Big\}.$$

Sei $x \in \bigcap\{D_p;\ p$ ist eine Teilpartie, in der II gemäß τ gespielt hat$\}$.
Wir konstruieren x nun rekursiv als Verkettung einer Partie, in der II gemäß τ gespielt hat.
Wegen $x \in D_\varnothing$ existiert ein $t \in 2^{<\omega}$, das I spielen kann, so daß gilt: $t^\frown\langle\tau(\langle t\rangle)\rangle \subset x$.
Sei $s_0 := t_i$, wobei i minimal ist, so daß t_i diese Eigenschaft besitzt.
Sei bereits $p = \langle s_0,\, k_1,\, s_2, \ldots,\, k_{2n-1}\rangle$ konstruiert. Nach der Definition von D_p existiert nun wieder ein Zug $t \in 2^{<\omega}$ von Spieler I mit der Eigenschaft: $p_*{}^\frown t^\frown\langle\tau(p^\frown\langle t\rangle)\rangle \subset x$.
Sei $s_{2n} := t_i$, wobei i minimal ist, so daß t_i diese Eigenschaft besitzt.
Dann gilt: $x = s_0{}^\frown\langle\tau(\langle s_0\rangle)\rangle^\frown s_2{}^\frown \ldots$ und, da τ eine Gewinnstrategie ist: $x \notin A$.
Daraus folgt: $A \subseteq \bigcup\limits_p(\mathcal{C} - D_p)$.

Wir zeigen nun, daß für alle Teilpartien p, in denen II gemäß τ gespielt hat, $\mathcal{C} - D_p$ einelementig ist:
Nach der Definition von D_p gilt:

$$x_p \in C - D_p \iff p_* \subset x_p \ \ \&\ \ \forall\, t \in 2^{<\omega}\ \big(p_*{}^\frown t^\frown\langle\tau(p^\frown\langle t\rangle)\rangle \not\subseteq x_p\big).$$

Daraus folgt nun, daß x_p eindeutig bestimmt ist: Sei $|p_*| = m$.

Für $x_p \in \mathcal{C} - D_p$ muß gelten:

$$x_p \upharpoonright m = p_* \quad \& \quad x_p(m) = 1 - \tau(p\hat{\ }\langle\varnothing\rangle)$$
$$x_p(\ell) = 1 - \tau(p\hat{\ }\langle x_p(m), \dots, x_p(\ell-1)\rangle), \quad \text{für } \ell > m.$$

Damit ist $A \subseteq \bigcup_p(\mathcal{C} - D_p) = \bigcup_p\{x_p\}$ abzählbar.

(ii) „ $\Rightarrow$ “ Angenommen A hat eine perfekte Teilmenge P.
Wir können $G_{\mathcal{C}}(A)$ als Spiel auf dem binären Baum $2^{<\omega}$ auffassen. Dabei zieht abwechselnd Spieler I ein beliebiges endliches Stück und Spieler II genau einen Knotenpunkt weiter. Die unendlichen Zweige des Baumes sind die Elemente von 2^ω. Ist die Partie ein Element von A, so gewinnt I, ansonsten II.
Die offenen Umgebungen U_s, für $s \in 2^{<\omega}$, bestehen aus denjenigen unendlichen Zweigen x für die gilt: $x \upharpoonright |s| = s$.
Zu P bilden wir den Teilbaum B, dessen unendlichen Zweige gerade die Elemente von P sind:

$$B := \{x \upharpoonright n;\ x \in P \ \ \&\ \ n \in \omega\}.$$

Da P eine perfekte Teilmenge von A ist, hat P keine isolierten Punkte. Das heißt, es existiert kein $x \in P$ mit $P \cap U_s = \{x\}$, für ein $s \in B$.
Das bedeutet aber, daß für alle $s \in B$ gilt: $|P \cap U_s| > 1$. Zu jeder endlichen Teilpartie in $G_{\mathcal{C}}(A)$, die in B liegt, existiert also eine Verlängerung s', bei der sich B verzweigt: $|\{x \in P;\ x \upharpoonright |s'| = s'\}| > 1$.
Die Gewinnstrategie für I lautet dann in Worten: „Spiele immer bis zur nächsten Verzweigung von B.“
Sei also $\sigma(\varnothing) = s_0 := t_i$, wobei i minimal gewählt ist mit der Eigenschaft, daß t_i die folgende Bedingung erfüllt:

$$t_i \in B \ \ \&\ \ t_i\hat{\ }\langle 0\rangle \in B \ \ \&\ \ t_i\hat{\ }\langle 1\rangle \in B.$$

Sei $s = \langle s_0, k_1, s_2, \dots, k_{2n-1}\rangle$, für $n \in \omega$. Sei

$$\sigma(s) = \begin{cases} t_i & \text{, falls } s \in B \\ \varnothing & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei i minimal gewählt ist mit

$$s\hat{\ }t_i \in B \ \ \&\ \ s\hat{\ }t_i\hat{\ }\langle 0\rangle \in B \ \ \&\ \ s\hat{\ }t_i\hat{\ }\langle 1\rangle \in B.$$

Mit einem Argument wie in Satz 2.4 zeigt man nun, daß σ eine Gewinnstrategie ist:
Da P eine perfekte Teilmenge von A ist, ist P abgeschlossen. Wenn also I gemäß σ spielt und die verkettete resultierende Partie x nicht in P liegt, so steht dies bereits zu einem endlichen Zeitpunkt fest. Dies ist aber, da P keine isolierten Punkte besitzt, ein Widerspruch zur Definition von σ!

„ $\Leftarrow$ “ Sei σ eine Gewinnstrategie von Spieler I. Betrachte

$$P := \{\sigma * y;\ y \in 2^\omega\},$$

wobei $\sigma * y$ als die verkettete Folge in 2^ω aufgefaßt wird.
<u>Beh.:</u> P ist eine perfekte Teilmenge von A.
Beweis: Wegen $\mathcal{C} \neq \varnothing$ ist $P \neq \varnothing$.
P enthält keine isolierten Punkte, denn angenommen doch, dann existiert ein $n \in \omega$ und ein $s = s_0\hat{}\langle k_1\rangle\hat{}\ldots\hat{}s_{2n} \in 2^{<\omega}$ mit $P \cap U_s = \{x\}$. Es ist $x = \sigma * y$ für ein passendes $y \in \mathcal{C}$ und $s \subset x$.
Wenn Spieler II dann $k_1, \ldots, k_{2n-1}$ und dann $k_{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x(|s|) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
spielt, so wäre die resultierende Partie nicht in P, im Widerspruch zur Definition von P!
P ist abgeschlossen, denn P ist das Bild von $\mathcal{C}$ unter der stetigen Bijektion
$f:\ P \to 2^\omega:\ \sigma * y \mapsto y.$

□

Korollar 4.4 *Sei $A \subseteq 2^\omega$. Dann gilt:*
Das Spiel $G_{\mathcal{C}}(A)$ ist genau dann determiniert, wenn A abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.

□

4.2 Übertragung auf den Baire–Raum

Im vorigen Abschnitt haben wir Teilmengen des Cantor–Raumes betrachtet. Unser Ziel ist jedoch das folgende Resultat für beliebige Stufen $\mathbf{\Gamma}$ der projektiven Hierarchie auf dem Baire–Raum ω^ω:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma}) & \Rightarrow & \text{Jede überabzählbare } \mathbf{\Gamma}\text{-Teilmenge von } \omega^\omega \\ & & \text{hat eine perfekte Teilmenge.} \end{array}$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Determiniertheit der Spiele auf ω^ω, die wir in dieser Arbeit betrachten, und den Spielen des hier definierten Typs $G_{\mathcal{C}}(A)$ für $A \subseteq 2^\omega$ zu erhalten, benötigen wir zuerst eine Abbildung zwischen dem Baire–Raum ω^ω und dem Cantor–Raum $\mathcal{C}$, die die topologische Struktur weitgehend erhält (vgl. Lévy [17, Kapitel VII, § 3]).

Definition 4.5

- Ein Element x von $\mathcal{C}$ heißt *stagnierend*, falls ein $m \in \omega$ existiert, so daß gilt: $x(n) = x(m) \ \ \forall\, n \geq m$.
- Für $n, k \in \omega$ sei a^k_n dasjenige $n+1$-Tupel, das aus n Einsen und einer Null, wenn k gerade ist, und aus n Nullen und einer Eins, wenn k ungerade ist, besteht:
$$a^k_n = \begin{cases} \overbrace{\langle 1, \ldots, 1, 0\rangle}^{n+1} & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ \overbrace{\langle 0, \ldots, 0, 1\rangle}^{n+1} & \text{, sonst.} \end{cases}$$
- Sei $\Psi : \omega^\omega \longrightarrow \mathcal{C}$ definiert durch
$$\Psi(x) = a^0_{x(0)} {}^\frown a^1_{x(1)} {}^\frown a^2_{x(2)} {}^\frown \ldots .$$

Proposition 4.6

(i) Die Menge S der stagnierenden Elemente von $\mathcal{C}$ ist abzählbar.

(ii) Ψ ist ein Homöomorphismus zwischen ω^ω und $\mathcal{C} - S$ versehen mit der Spurtopologie, die von der Topologie auf $\mathcal{C}$ induziert wird.

Beweis: (i) klar.
(ii) - Ψ ist injektiv: Seien $x, y \in \omega^\omega$ mit $x \neq y$.
Für $m := \min\{i \in \omega;\ x(i) \neq y(i)\}$ gilt dann

$$a^0_{x(0)} {}^\frown a^1_{x(1)} {}^\frown \ldots {}^\frown a^m_{x(m)} \ \neq\ a^0_{y(0)} {}^\frown a^1_{y(1)} {}^\frown \ldots {}^\frown a^m_{y(m)},$$

also auch $\Psi(x) \neq \Psi(y)$.

- Ψ ist surjektiv: $\mathrm{Im}(\Psi) \subseteq 2^\omega - S$ ist offensichtlich. Sei nun $u \in 2^\omega - S$. Wir konstruieren rekursiv ein $x \in \omega^\omega$ mit $\Psi(x) = u$:

  - Halte die erste Null in u fest:
    $x(0)$ ist ist die Anzahl der Einsen in u, die vor dieser Null stehen.

  - Halte die erste auf diese Null folgende Eins in u fest:
    $x(1)$ ist ist die Anzahl der Nullen in u, die vor dieser Eins und hinter der im vorigen Schritt festgehaltenen Null stehen.
    Allgemein für $n \in \omega$:

  - Falls n gerade ist, so halte die erste auf die im vorigen Schritt festgehaltene Eins folgende Null fest:
    $x(n)$ ist die Anzahl der Einsen in u, die vor dieser Null und hinter der im vorigen Schritt festgehaltenen Eins kommen.

  - Falls n ungerade ist, so halte die erste auf die im vorigen Schritt festgehaltene Null folgende Eins fest:
    $x(n)$ ist die Anzahl der Nullen in u, die vor dieser Eins und hinter der im vorigen Schritt festgehaltenen Null kommen.

Das auf diese Weise konstruierte x ist tatsächlich ein Element von ω^ω, denn u ist nicht stagnierend, d.h. auf jede Null folgt irgendwann eine Eins und umgekehrt. Es gilt $\Psi(x) = u$.

- Ψ ist offensichtlich stetig und aus der Argumentation, mit der die Surjektivität von Ψ gezeigt wurde, sieht man, daß auch Ψ^{-1} stetig ist.

□

Die Determiniertheit der üblicherweise von uns betrachteten Spiele auf ω^ω läßt sich wie folgt auf die Spiele der Form $G_{\mathcal{C}}(A)$ mit $A \subseteq 2^\omega$ übertragen (vgl. Moschovakis [27, Ex. 6A.9.]):

Proposition 4.7 *Sei* $\mathbf{\Gamma} \in \{\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n;\ \alpha \in \omega_1, n \in \omega\}$.
Wenn jede $\mathbf{\Gamma}$*-Teilmenge von* ω^ω *determiniert ist, dann ist auch das Spiel* $G_{\mathcal{C}}(A)$ *determiniert, wobei* A *eine beliebige* $\mathbf{\Gamma}$*-Teilmenge von* 2^ω *ist.*

Beweis: Sei $A \subseteq 2^\omega$ eine $\mathbf{\Gamma}$-Menge. Definiere die Abbildung $g : \omega^\omega \longrightarrow 2^\omega$ wie folgt:

$$\big(g(x)\big)(n) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } x(n) = 0 \\ 1 & , \quad \text{falls } x(n) \geq 1 \end{cases}$$

und analog $g' : \omega^{<\omega} \longrightarrow 2^{<\omega}$.
Sei $\{\langle i, s_i \rangle;\ i \in \omega\}$ die Δ^0_0-Abzählung von $\omega^{<\omega}$ aus 1.1. Setze

$$B := \big\{x \in \omega^\omega;\ g\big(s_{x(0)}\hat{\ }\langle x(1)\rangle\hat{\ }s_{x(2)}\hat{\ }\langle x(3)\rangle\hat{\ }\dots\big) \in A\big\}.$$

B ist somit das Urbild einer $\mathbf{\Gamma}$-Teilmenge von 2^ω unter der stetigen Abbildung g, also ist B eine $\mathbf{\Gamma}$-Teilmenge von ω^ω.
Nach Voraussetzung ist das Spiel $G(B)$ determiniert.

Beh.: Das Spiel $G_\mathcal{C}(A)$ ist determiniert.
Beweis: Angenommen Spieler I hat eine Gewinnstrategie σ in $G(B)$. Betrachte folgende Strategie von I in $G_\mathcal{C}(A)$:
I beginnt mit $t_0 := g'(s_{\sigma(\varnothing)})$, also der Folge aus $2^{<\omega}$, die aus $s_{\sigma(\varnothing)}$ entsteht, wenn alle Einträge ungleich Null durch Eins ersetzt werden.
Wenn bisher $\langle t_0, k_1, \dots, k_{2n+1}\rangle$ gespielt wurde, $n \in \omega$, so antwortet I mit $t_{2n+2} := g'(s_{\sigma(\langle t_0,k_1,\dots,k_{2n+1}\rangle)})$, also der Folge aus $2^{<\omega}$, die aus $s_{\sigma(\langle t_0,k_1,\dots,k_{2n+1}\rangle)}$ entsteht, wenn alle Einträge ungleich Null durch Eins ersetzt werden.
Wenn I im Spiel $G_\mathcal{C}(A)$ nach dieser Strategie spielt, so ist die resultierende Partie gerade

$$g\big(s_{x(0)}\hat{\ }\langle k(1)\rangle\hat{\ }s_{x(2)}\hat{\ }\langle k(3)\rangle\hat{\ }\dots\big).$$

Da σ eine Gewinnstrategie ist, liegt die Folge $y \in \omega^\omega$ mit $y(2i) = x(2i)$ und $y(2i+1) = k_{2i+1}$ für $i \in \omega$ in der Menge B. Also ist

$$g\big(s_{y(0)}\hat{\ }\langle y(1)\rangle\hat{\ }s_{y(2)}\hat{\ }\langle y(3)\rangle\hat{\ }\dots\big) = g\big(s_{x(0)}\hat{\ }\langle k(1)\rangle\hat{\ }s_{x(2)}\hat{\ }\langle k(3)\rangle\hat{\ }\dots\big) \in A.$$

Somit ist obige Strategie eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G_\mathcal{C}(A)$.
Analog erhält man aus einer Gewinnstrategie für Spieler II in $G(B)$ eine im Spiel $G_\mathcal{C}(A)$.

□

Bemerkung: Wir sind nun in der Lage, beweisen zu können, daß aus Det($\mathbf{\Gamma}$), wobei $\mathbf{\Gamma}$ eine Klasse aus der Borel- oder der Projektiven Hierarchie von ω^ω ist, folgt, daß jede überabzählbare $\mathbf{\Gamma}$-Menge eine perfekte Teilmenge enthält.

Diese Aussage ist nur interessant, wenn $\mathbf{\Gamma}$ zu den Klassen $\mathbf{\Sigma}^1_n$ für $n \geq 2$ bzw. $\mathbf{\Pi}^1_n$ für $n \geq 1$ gehört, denn nach einem Resultat der klassischen Deskriptiven Mengenlehre, das auf Suslin zurückgeht, enthält jede überabzählbare $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge von ω^ω, also insbesondere auch jede Borel–Menge, eine perfekte Teilmenge (vgl. Kechris [13, Theorem 29.1]).

Satz 4.8 *Sei* $\mathbf{\Gamma} \in \{\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n;\ n \in \omega\}$.
Dann impliziert Det($\mathbf{\Gamma}$)*, daß jede überabzählbare* $\mathbf{\Gamma}$*-Teilmenge von* ω^ω *eine perfekte Teilmege enthält.*

Beweis: Es gelte Det($\mathbf{\Gamma}$). Aus Proposition 4.3 und 4.7 folgt, daß jede $\mathbf{\Gamma}$-Teilmenge von $\mathcal{C}$ entweder abzählbar ist oder eine perfekte Teilmenge enthält.
Sei nun $A \subseteq \omega^\omega$ eine überabzählbare $\mathbf{\Gamma}$-Menge in ω^ω. Es ist zu zeigen, daß A eine perfekte Teilmenge enthält.
Betrachte das Bild von A unter der Abbildung $\Psi:\ \omega^\omega \to 2^\omega$.

Beh. 1: $\Psi[A]$ ist eine $\mathbf{\Gamma}$-Teilmenge von $\mathcal{C}$.
Beweis: Falls A eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Teilmenge von ω^ω für $n \geq 2$ ist, so ist nach Proposition 4.6 $\Psi[A]$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Teilmenge von $\mathcal{C}$.
Falls A eine $\mathbf{\Pi}^1_n$-Teilmenge von ω^ω für $n \geq 1$ ist, so ist $\omega^\omega - A \in \mathbf{\Sigma}^1_n$. Wie oben folgt, daß $2^\omega - \Psi[A] = \Psi[\omega^\omega - A]$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_n$-Teilmenge von $\mathcal{C}$ ist. Also ist $\Psi[A]$ eine $\mathbf{\Pi}^1_n$-Teilmenge von $\mathcal{C}$.

Weil Ψ eine Injektion ist, ist $\Psi[A]$ überabzählbar. Also folgt, daß $\Psi[A]$ eine perfekte Teilmenge $P \subseteq 2^\omega$ enthält.
Betrachte $B := \Psi^{-1}[P] \subseteq \omega^\omega$.

Beh. 2: $B \subseteq A$ ist eine perfekte Menge.
Beweis: $B \subseteq A$ folgt aus $\Psi[B] = P \subseteq \Psi[A]$.
Da $P \subseteq \Psi[A] \subseteq 2^\omega - S$ und $\Psi \restriction 2^\omega - S$ eine Bijektion ist, folgt $B \neq \varnothing$.
B ist als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge P selbst abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, daß B keine isolierten Punkte hat.
Angenommen $x \in \omega^\omega$ wäre ein isolierter Punkt von B, d.h. es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \omega^\omega$ von X mit $B \cap U = \{x\}$.
Dann folgt $\Psi[B] \cap \Psi[U] = \Psi[B \cap U] = \Psi[\{x\}] = \{\Psi(x)\}$.
Weil $\Psi \restriction 2^\omega - S$ ein Homöomorphismus ist, ist $\Psi[U]$ offen in $2^\omega - S$, d.h. es existiert eine Menge $O \subseteq 2^\omega$, die offen in $\mathcal{C}$ ist, so daß gilt: $\Psi[U] = O \cap (2^\omega - S) = O - S$.

Doch $P \cap O = \Psi[B] \cap O = \Psi[B] \cap (O - S) = \{\Psi(x)\}$, da $\Psi[B] \cap S = \varnothing$ ist. Somit wäre $\Psi(x)$ ein isolierter Punkt von P im Widerspruch dazu, daß P eine perfekte Teilmenge von $\mathcal{C}$ ist!

□

4.3 Die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen ist in ZSF+AC nicht beweisbar

Aus Satz 4.8 kann man mit Hilfe eines Resultats, das auf Kurt Gödel zurückgeht, zeigen, daß die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen in ZSF + AC nicht beweisbar ist.
Es gilt sogar, daß unter der Annahme der Konsistenz von ZSF + AC die Konsistenz von diesem System zusammen mit Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) nicht beweisbar ist.
Wir benötigen dazu:

Satz 4.9 (Gödel 1938, Addison 1959)
Sei $a \in \omega^\omega$. Wenn $\aleph_1^{\mathbf{L}[a]} = \aleph_1$ ist, dann existiert eine überabzählbare $\Pi^1_1(a)$-Menge, die keine perfekte Teilmenge enthält.

Im ersten Artikel von 1938, den Gödel über die Klasse $\mathbf{L}$ der konstruktiblen Mengen publizierte, erwähnt er, daß das Axiom $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ die Existenz einer überabzählbaren $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge ohne perfekte Teilmenge impliziert. Einen detaillierten Beweis für obiges Resultat veröffentlichte John Addison 1959.
Ich möchte an dieser Stelle lediglich eine Beweisidee formulieren.
Vollständige Beweise stehen z.B. bei Kanamori [11, Theorem 13.12] und Jech [9, Korollar 3 zu Theorem 97].

Beweisidee: Man möchte eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$ konstruieren, die zu jeder Ordinalzahl $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}[a]}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a]$ enthält, das eine Wohlordnung vom Ordnungstyp α kodiert.
Da das Modell $\mathbf{L}[a]$ eine kanonische Wohlordnung $<_{\mathbf{L}[a]}$ besitzt, kann man zu $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}[a]}$ jeweils das kleinste $x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a]$ mit $\|x\| = \alpha$ auswählen.
Sei also

$$A = \big\{x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a];\ x \in \mathrm{WO}\ \ \&\ \ \forall\, y \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a]\ \ \big(y <_{\mathbf{L}[a]} x \Rightarrow \|y\| \neq \|x\|\big)\big\}.$$

Beh. 1: A ist überabzählbar.
Beweis: Für jedes $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}[a]}$ existiert ein $x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a]$ mit $\|x\| = \alpha$. Also ist nach Voraussetzung $|A| \geq \aleph_1^{\mathbf{L}[a]} = \aleph_1$.

Beh. 2: A enthält keine perfekte Teilmenge.
Beweis: Eine perfekte Teilmenge von ω^ω ist überabzählbar (vgl. Felgner [3, Satz 17.1]). Da jede perfekte Teilmenge nach Definition abgeschlossen ist, ist sie insbesondere eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge.
Es gilt jedoch, daß jede $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Teilmenge von A abzählbar ist.
Denn sei $B \subseteq A$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge. Da $A \subseteq$ WO ist, folgt mit Jech [9, Korollar 2 (Boundedness Lemma) zu Lemma 40.4], daß ein $\beta < \omega_1$ existiert mit

$$\{\|x\|;\ x \in B\} \subseteq \beta.$$

Da die Menge A nach Konstruktion für jedes $\alpha < \omega_1$ genau ein $x \in \omega^\omega$ mit $\|x\| = \alpha$ enthält, ist $|\{\ \|x\|;\ x \in B\}| = |B|$. Also ist B abzählbar.

Die Menge A ist nun leider nicht $\Pi^1_1(a)$. Die kanonische Wohlordnung $<_{\mathbf{L}[a]} \cap \left(\omega^\omega\right)^2$ von ω^ω in $\mathbf{L}[a]$ selbst ist bereits eine $\Sigma^1_2(a)$-Menge.
Man kann jedoch ausgehend von der Idee, welche der Definition von A zugrunde liegt, ein $\tilde{A} \subseteq \omega^\omega$ bekommen, das die Behauptungen 1 und 2 erfüllt und eine $\Pi^1_1(a)$-Menge ist.
Dazu benutzt man abzählbare Modelle für die $\langle \mathbf{L}_\delta, \in \rangle$ für Limesordinalzahlen δ.
Dieses Verfahren ist in Kanamori [11, Theorem 13.12] ausgeführt.
Eine andere Möglichkeit ist, ausgehend von A durch die Anwendung des Uniformisierungs–Theorems für Π^1_1-Mengen von Kondô, eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten (vgl. dazu Jech [9, Korollar 2 und 3 zu Theorem 97]).

Wir erhalten nun die Nicht–Beweisbarkeit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit.

Satz 4.10

(i) Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) *ist nicht in* ZSF + AC *beweisbar.*

(ii) Wenn ZSF *konsistent ist, so ist nicht (in* ZSF + AC*) beweisbar, daß* ZSF + AC + Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) *konsistent ist.*

Beweis: (i) In Satz 4.8 wurde gezeigt, daß Det($\mathbf{\Pi}^1_1$) impliziert, daß jede überabzählbare $\mathbf{\Pi}^1_1$-Teilmenge von ω^ω eine perfekte Teilmenge enthält.

Es gilt $\mathbf{\Pi}_1^1 = \bigcup_{a \in \omega^\omega} \Pi_1^1(a)$. Daher folgt mit obigem Satz:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1) \implies \forall\, a \in \omega^\omega : \ \aleph_1^{\mathbf{L}[a]} < \aleph_1 .$$

Damit impliziert die $\mathbf{\Pi}_1^1$-Determiniertheit, daß $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ ist. Weil aber ZSF + AC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ konsistent ist, ist Teilbehauptung (i) bewiesen.
(ii) Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1) &\implies \forall\, a \in \omega^\omega : \ \aleph_1^{\mathbf{V}} \text{ ist stark–unerreichbar in } \mathbf{L}[a] \\ &\implies \aleph_1^{\mathbf{V}} \text{ ist stark–unerreichbar in } \mathbf{L} \\ &\implies \left(\mathbf{V}_{\aleph_1^{\mathbf{V}}}\right)^{\mathbf{L}} \models \mathrm{ZSF} + \mathrm{AC}. \end{aligned}$$

Denn für eine stark–unerreichbare Kardinalzahl κ ist $\mathbf{V}_\kappa$ ein Modell von ZSF + AC (vgl. Felgner [4, Satz 3.7]).
Aus dieser Argumentation folgt:
Die Konsistenz von ZSF + AC ist in ZSF + AC + Det($\mathbf{\Pi}_1^1$) beweisbar.
Wir nehmen an, daß ZSF konsistent ist. Wenn wir nun annehmen, daß die Konsistenz von ZSF + AC die Konsistenz von ZSF + AC + Det($\mathbf{\Pi}_1^1$) impliziert, so folgt

$$\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1) \ \vdash \ \mathrm{Con}\big(\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1)\big).$$

Daraus folgt mit dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz[1], daß ZSF + AC + Det($\mathbf{\Pi}_1^1$) inkonsistent ist.
Doch wir haben angenommen, daß die Konsistenz dieses Systems aus der Konsistenz von ZSF + AC folgt. Also wäre ZSF + AC und damit auch ZSF selbst inkonsistent.

□

[1]Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, daß die Konsistenz einer axiomatischen Theorie, die widerspruchsfrei und in einem bestimmten logischen Sinn mindestens genauso stark wie die Peano–Arithmetik ist, nicht auf der Basis dieser Theorie selbst bewiesen werden kann (vgl. Ebbinghaus [2, Kap. X Satz 7.10])

Kapitel 5

Meßbare Kardinalzahlen und Sharps

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß Det($\mathbf{\Pi}_1^1$) nicht in ZSF + AC beweisbar ist. Unser Ziel ist nun der Satz von Donald Martin, daß unter der zusätzlichen Annahme der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die $\mathbf{\Pi}_1^1$-Determiniertheit gilt. Bevor ich einen Beweis dieses Satzes geben kann, sind eine Reihe von vorbereitenden Resultaten nötig.
In diesem Kapitel werden meßbare Kardinalzahlen eingeführt und ein Satz von Frederick Rowbottom über die Gültigkeit einer bestimmten Partitionsrelation unter der Annahme der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl bewiesen.
Im letzten Abschnitt folgt eine kurze Einführung in die Theorie der Sharps.

5.1 Meßbare Kardinalzahlen

Zu diesem Abschnitt vgl. Jech [9, § 27], Kanamori [11, § 2] und Moschovakis [27, 6G].

Die Maßtheorie geht auf Arbeiten von Henri Lebesgue zurück, der 1902 [16] die folgende Frage formulierte:
Gibt es eine Funktion μ, die jeder beschränkten Menge reeller Zahlen X eine nicht negative reelle Zahl $\mu(X)$ zuordnet, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) μ ist nicht die Nullabbildung.

(2) μ ist translationsinvariant.

D.h. wenn $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $Y = \{x + a;\ x \in X\}$, so ist $\mu(X) = \mu(Y)$.

(3) μ ist abzählbar additiv.

D.h. wenn $\{X_n;\ n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, wobei die X_n paarweise disjunkte, beschränkte Mengen sind, so ist $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n)$.

Es stellte sich heraus, daß eine solche Funktion auf $\mathbb{R}$ nicht existieren kann. Stefan Banach verallgemeinerte Lebesgues Frage, indem er (2) ersetzte durch:

(2') $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun ist das Problem unabhängig von der Gruppenstruktur der reellen Zahlen formulierbar. Die Frage kann somit auf die abstraktere Form reduziert werden, ob für eine beliebige Menge $M \neq \varnothing$ eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$ existiert mit

(M1) $\mu(M) = 1$

(M2) $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in M$ und

(M3) für paarweise disjunkte $\{X_n;\ n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n)$.

Definition 5.1 Sei $M \neq \varnothing$ und $\mu : \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$ eine Funktion, die (M1), (M2) und (M3) erfüllt. Dann heißt μ ein *Maß auf* M.

Definition 5.2 Sei μ ein Maß auf einer nicht leeren Menge M.

- μ heißt *κ-additiv*, falls $\mu\big(\bigcup_{\alpha\in\gamma} X_\alpha\big) = \sum_{\alpha\in\gamma} \mu(X_\alpha)$ für $\gamma < \kappa$ und paarweise disjunkte $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
- μ heißt *zweiwertig*, falls $\mu : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0,1\}$.

Die folgende Proposition stellt den Zusammenhang zwischen zweiwertigen Maßen und Ultrafiltern her.

Proposition 5.3 *Sei M eine nicht leere Menge und κ eine Kardinalzahl.*

(i) Sei μ ein zweiwertiges Maß auf M. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{X \subseteq M;\ \mu(X) = 1\}$$

ein freier, σ-vollständiger Ultrafilter auf M.

$\mathcal{U}$ ist κ-vollständig, falls μ κ-additiv ist.

(ii) Sei $\mathcal{U}$ ein freier, σ-vollständiger Ultrafilter auf M. Dann ist

$$\mu : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0,1\},\ X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } X \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein zweiwertiges Maß auf M.

μ ist κ-additiv, falls $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist.

Beweis: (i) Aus (M1) und (M3) folgt, daß $\mu(M) = 1$ und $\mu(\varnothing) = 0$ und somit $M \in \mathcal{U}$ sowie $\varnothing \notin \mathcal{U}$ gilt.

Seien $X \in \mathcal{U}$ und $Y \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$. Dann ist $\mu(Y) = \mu\big((Y - X) \dot\cup X\big) = \mu(Y - X) + \mu(X) = 1$, also $Y \in \mathcal{U}$.

Seien $X, Y \in \mathcal{U}$. Angenommen $X \cap Y \notin \mathcal{U}$, dann folgt $\mu(X \cap Y) = 0$. Aus $\mu(X) = \mu(Y) = 1$ folgt $\mu(X - Y) = \mu(Y - X) = 1$ und somit $\mu(X \cup Y) = 2$, Widerspruch!

Sei $X \subseteq M$. Angenommen $X \notin \mathcal{U}$, dann ist $\mu(X) = 0$. Es folgt $\mu(M - X) = 1$, d.h. $M - X \in \mathcal{U}$.

Also ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter.
Wegen (M2) ist $\mathcal{U}$ frei.

Sei $\{X_n;\ n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ mit $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$. Sei $Y_0 := X_0$ und $Y_n := X_n - \bigcup\limits_{i\in n} X_i$ für $n \in \omega$. Dann sind die Y_n paarweise disjunkt und es gilt $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} Y_n$, d.h. $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\omega} Y_n\right) = \sum\limits_{n\in\omega} \mu(Y_n) = 1$.
Also existiert ein $j \in \omega$ mit $\mu(Y_j) = 1$, d.h. $Y_j \in \mathcal{U}$. Damit ist auch $X_j \in \mathcal{U}$. Damit folgt, daß $\mathcal{U}$ σ-vollständig ist.

Falls μ ein κ-additives Maß ist, so folgt analog die κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$.

(*ii*) Wegen $M \in \mathcal{U}$ ist (M1) erfüllt, und da $\mathcal{U}$ frei ist, gilt auch (M2).
Sei $\{X_n;\ n \in \omega\}$ eine Menge paarweise disjunkter Teilmengen von M.

<u>1.Fall:</u> $\bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{U}$.

Dann ist nach Definition $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = 1$ und, weil $\mathcal{U}$ σ-vollständig ist, existiert ein $i \in \omega$ mit $X_i \in \mathcal{U}$. Da die X_n $(n \in \omega)$ paarweise verschieden sind, gilt für alle $j \in \omega - \{i\}$: $X_j \notin \mathcal{U}$. Damit ist auch $\sum_{n\in\omega} \mu(X_n) = 1$.

<u>2.Fall:</u> $\bigcup_{n\in\omega} X_n \notin \mathcal{U}$.

Dann ist nach Definition $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = 0$. Für alle $i \in \omega$ ist $X_i \subseteq \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Also folgt aus der Filtereigenschaft $X_i \notin \mathcal{U}$, d.h. es gilt auch $\sum_{n\in\omega} \mu(X_n) = 0$.

Somit ist (M3) erfüllt.
Analog folgt die κ-Additivität von μ aus der κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$.

□

Hilfssatz 5.4 *Sei M eine Menge, auf der ein Maß μ existiert.*
Wenn N eine Menge mit $|N| = |M|$ ist, so existiert auch ein Maß auf N.
Falls μ κ-additiv ist für eine Kardinalzahl κ, so ist das zugehörige Maß auf N ebenfalls κ-additiv.

Beweis: Sei μ ein Maß auf M und sei $\varphi : N \longrightarrow M$ eine Bijektion.
Wir setzen

$$\mu' : \mathcal{P}(N) \longrightarrow [0,1], \quad Y \mapsto \mu\big(\varphi[Y]\big).$$

<u>Beh.:</u> μ' ist ein Maß auf N.
(M1) $\mu'(N) = \mu\big(\varphi[N]\big) = \mu(M) = 1$.
(M2) Für $y \in N$ ist $\mu'(\{y\}) = \mu\big(\varphi[\{y\}]\big) = \mu\big(\{\varphi(y)\}\big) = 0$.
(M3) Sei $\{Y_n;\ n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(N)$, wobei die Y_n paarweise disjunkt sind.
Dann ist $\{\varphi[Y_n];\ n \in \omega\}$ eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von M.
Es folgt:

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\omega} Y_n\right) = \mu\left(\varphi\left[\bigcup_{n\in\omega} Y_n\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} \varphi[Y_n]\right) = \sum_{n\in\omega} \mu\big(\varphi[Y_n]\big) = \sum_{n\in\omega} \mu'(Y_n).$$

Falls μ κ-additiv ist, so folgt analog die κ-Additivität von μ'.

□

Diese Konstruktion ist die bekannte Konstruktion des Bildfilters.
Wenn M eine Menge der Kardinalität κ und λ eine beliebige Kardinalzahl ist, so ist somit die Frage, ob ein (λ-additives) Maß auf M existiert, äquivalent zur Frage, ob es ein (λ-additives) Maß auf κ gibt. Insofern kann man sich auf Maße auf Kardinalzahlen beschränken.

Definition 5.5 Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *meßbar*, falls ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ existiert.

Mit Hilfe der Auswahlaxioms kann man zeigen, daß freie Ultrafilter auf ω existieren. Diese sind dann natürlich $\aleph_0$-vollständig, da dies jeder Filter ist.
Wenn man in der Definition einer meßbaren Kardinalzahl die Forderung „überabzählbar“ wegließe, so wäre $\aleph_0$ meßbar. Obige Definition ist insofern die Verallgemeinerung dieses Sachverhalts.
Es wird sich aber herausstellen, daß die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl in ZSF + AC nicht beweisbar ist.

Definition 5.6 Ein Maß μ auf einer Kardinalzahl κ heißt *normal*, wenn es die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$(\star)\quad \forall\, f \in \kappa^\kappa \quad \Big(\mu\big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\}\big) = 1 \\ \Longrightarrow \exists\, \eta_0 \in \kappa : \mu\big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \eta_0\}\big) = 1\Big).$$

Das heißt, wenn eine Funktion f von κ nach κ auf einer Teilmenge von κ mit Maß 1 regressiv ist, dann existiert eine Teilmenge von κ mit Maß 1 auf der f konstant ist.

Wir zeigen nun daß die Definitionen der Normalität von Maßen und von Filtern[1] verträglich sind:

Proposition 5.7 *Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf einer Kardinalzahl κ. Sei μ das nach Proposition 5.3 zugehörige Maß. Es gilt:*

$$\mathcal{U} \text{ ist normal} \iff \mu \text{ ist normal.}$$

[1]Eine Filter $\mathcal{F}$ auf einer Kardinalzahl κ heißt *normal*, wenn er unter Diagonalschnittbildung abgeschlossen ist, d.h. für $X_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in \kappa$, gilt: $\Delta_{\alpha\in\kappa} X_\alpha = \{\alpha \in \kappa;\ \alpha \in \bigcap_{\beta\in\alpha} X_\beta\} \in \mathcal{F}$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“ Sei $\mathcal{U}$ normal. Angenommen μ wäre nicht normal. Dann existiert ein $f \in \kappa^\kappa$ mit $\mu\big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\}\big) = 1$ und $\mu\big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \gamma\}\big) = 0$ für alle $\gamma \in \kappa$.
Also folgt für $X_\gamma := \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \neq \gamma\}$ und für alle $\gamma \in \kappa: \quad \mu(X_\gamma) = 1$.
Mit Proposition 5.3 folgt

$$X_\gamma \in \mathcal{U} \qquad \forall\, \gamma \in \kappa.$$

Da $\mathcal{U}$ normal ist, folgt:

$$\begin{aligned}\Delta_{\gamma\in\kappa} X_\gamma &= \{\eta \in \kappa;\ \eta \in \bigcap_{\gamma\in\eta} X_\gamma\} \subseteq \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \neq \gamma\ \ \forall\, \gamma \in \eta\} \\ &= \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \geq \eta\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Damit ist $\varnothing = \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\} \cap \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \geq \eta\} \in \mathcal{U}$, Widerspruch!

„$\Leftarrow$“ Sei μ normal. Sei $\{X_\gamma;\ \gamma \in \kappa\} \subseteq \mathcal{U}$.
Angenommen $X := \Delta_{\gamma\in\kappa} X_\gamma = \{\eta \in \kappa;\ \eta \in \bigcap_{\gamma\in\eta} X_\gamma\} \notin \mathcal{U}$. Dann ist $\kappa - X$ ein Element von $\mathcal{U}$ und es gilt:

$$\forall \eta \in \kappa - X\ \ \exists\, \gamma \in \eta: \quad \eta \notin X_\gamma.$$

Wir definieren eine Funktion $f : \kappa \to \kappa$, auf die wir die Normalität von μ anwenden können:

$$f(\eta) = \begin{cases} \gamma & \text{, falls } \eta \in \kappa - X \text{ und } \gamma \in \eta \text{ minimal mit der Eigenschaft } \eta \notin X_\gamma \\ 0 & \text{, falls } \eta \in X. \end{cases}$$

Dann gilt $\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\} = \kappa - \{0\} \in \mathcal{U}$.
Nach Voraussetzung existiert nun ein $\eta_0 \in \kappa$, so daß gilt:
$Y := \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \eta_0\} \in \mathcal{U}$.
Dann ist $Y \cap X_{\eta_0} \in \mathcal{U}$ und wegen $\kappa - X \in \mathcal{U}$ auch $(\kappa - X)\ \cap\ Y\ \cap\ X_{\eta_0} \in \mathcal{U}$.
Sei $\eta \in (\kappa - X)\ \cap\ Y\ \cap\ X_{\eta_0}$.
Aus $\eta \in Y$ folgt $f(\eta) = \eta_0$. Nach der Definition von f gilt wegen $\eta \in \kappa - X$: $\eta \notin X_{\eta_0}$ im Widerspruch zur Wahl von η !

□

Ich möchte als nächstes zeigen, daß alle Elemente von κ-vollständigen, freien Ultrafiltern auf einer Kardinalzahl κ die Mächtigkeit κ haben und als Folgerung daraus, daß jede meßbare Kardinalzahl regulär ist.

Proposition 5.8 *Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ.*

(i) $\forall H \in \mathcal{U}: \quad |H| = \kappa.$

(ii) *κ ist regulär.*

Beweis: (i) Sei $H \in \mathcal{U}$. Dann ist $H \subseteq \kappa$ und somit wohlgeordnet. Angenommen es existiert ein $H \in \mathcal{U}$ mit $|H| = \gamma < \kappa$. Dann gilt $H = \{x_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} = \bigcup\limits_{\alpha \in \gamma} \{x_\alpha\}$. Da $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter ist, folgt $\kappa - \{x_\alpha\} \in \mathcal{U}$ für alle $\alpha \in \gamma$ und somit $\kappa - H = \bigcap\limits_{\alpha \in \gamma} \big(\kappa - \{x_\alpha\}\big) \in \mathcal{U}$ (wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$) im Widerspruch zur Filtereigenschaft!
(ii) Angenommen κ wäre singulär. Dann ist $\lambda := cf(\kappa) < \kappa$ und es existieren Mengen $A_\alpha \subseteq \kappa$ mit $|A_\alpha| < \kappa$ für alle $\alpha \in \lambda$, so daß $\kappa = \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} A_\alpha$. Wegen (i) können die A_α, $\alpha \in \lambda$, keine Elemente von $\mathcal{U}$ sein. Doch dann ist $\varnothing = \kappa - \kappa = \bigcap\limits_{\alpha \in \lambda} (\kappa - A_\alpha) \in \mathcal{U}$, Widerspruch!

□

Wir werden nun zeigen, daß jede meßbare Kardinalzahl stark–unerreichbar ist. Insbesondere ist somit die Existenz meßbarer Kardinalzahlen in ZSF + AC nicht beweisbar. Mit einer Argumentation wie in Satz 4.10 folgt, daß auch die Konsistenz von „ZSF + AC + $\exists\, \kappa:\ \kappa$ meßbar“ nicht beweisbar ist.

Satz 5.9 [ZSF + AC]
Jede meßbare Kardinalzahl ist stark-unerreichbar.

Beweis: Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Nach Proposition 5.8 ist κ regulär.
Angenommen κ wäre kein starker Limes. Dann existiert mit AC ein $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$.
Folglich existiert eine Menge von Funktionen $M = \big\{f_\alpha : \lambda \longrightarrow \{0,1\};\ \alpha < \kappa\big\}$ mit $|M| = \kappa$. Sei $\mathcal{U}'$ ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ. Dann ist mittels $f : \kappa \longrightarrow M,\ \alpha \mapsto f_\alpha$ der Bildfilter

$$U := f_*(\mathcal{U}') = \big\{X \subseteq M;\ f^{-1}[X] \in \mathcal{U}'\big\}$$

auf M definiert, und nach Hilfssatz 5.4 ist $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf M.

Für $\alpha < \lambda$ sei $X_\alpha = \begin{cases} \{f \in M;\ f(\alpha) = 0\} & \text{, falls } \{f \in M;\ f(\alpha) = 0\} \in U \\ \{f \in M;\ f(\alpha) = 1\} & \text{sonst.} \end{cases}$

Damit ist für alle $\alpha < \lambda$ die Menge $X_\alpha \in \mathcal{U}$.

Für $\alpha < \lambda$ sei: $\delta_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{, falls } X_\alpha = \{f \in M;\ f(\alpha) = 0\} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Da $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, gilt $X := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}$. Damit müßte X nach 5.8 Mächtigkeit κ haben.
Aber X besteht nur aus einen Element, nämlich $f : \lambda \longrightarrow \{0,1\},\ \alpha \mapsto \delta_\alpha$, Widerspruch!

□

5.2 Normale Ultrafilter und ein Satz von Rowbottom

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, daß auf einer meßbaren Kardinalzahl sogar ein normaler, κ-vollständiger Ultrafilter existiert (vgl. Jech [9, 28.4, 28.10, 28.11], Martin–Kechris [24, 4.2] und Moschovakis [27, 6G]).
Mit diesem Resultat kann man dann den Satz von Frederick Rowbottom beweisen, der entscheidend in Martins Beweis der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit unter der Annahme der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl eingeht (vgl. Rowbottom [29] und Kanamori [11, Theorem 7.17]).

Proposition 5.10 [ZSF + DC]
Sei κ eine meßbare Kardinalzahl.
Dann existiert ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter $\mathcal{U}^*$ auf κ mit der Eigenschaft:
($\star$) $\forall\ f \in \kappa^\kappa\ \big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\} \in \mathcal{U}^* \implies \exists\ \eta_0 \in \kappa : \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \eta_0\} \in \mathcal{U}^*\big)$.

Um diese Proposition zu beweisen, definieren wir mit Hilfe des Ultrafilters auf κ, der aufgrund der Meßbarkeit existiert, eine Relation auf κ^κ.

Definition 5.11 Sei κ meßbar und $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ.
Die Relation $\leq_\mathcal{U}$ auf κ^κ ist wie folgt definiert: Seien $f, g \in \kappa^\kappa$.

$$f \leq_\mathcal{U} g \ :\Longleftrightarrow\ \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \leq g(\eta)\} \in \mathcal{U}.$$

Proposition 5.12 [ZSF + DC]
Sei $\mathcal{U}$ ein σ-vollständiger Ultrafilter auf der Kardinalzahl κ.
Dann ist die Relation $\leq_{\mathcal{U}}$ auf κ^κ reflexiv, transitiv und fundiert. Außerdem sind je zwei Elemente bezüglich $\leq_{\mathcal{U}}$ vergleichbar.

Beweis: Seien $f, g, h \in \kappa^\kappa$.

- Es ist $f \leq_{\mathcal{U}} f$ wegen $\kappa \in \mathcal{U}$. Somit ist $\leq_{\mathcal{U}}$ reflexiv.
- Seien $f \leq_{\mathcal{U}} g \leq_{\mathcal{U}} h$. Wegen

  $$\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \leq g(\eta)\} \cap \{\eta \in \kappa;\ g(\eta) \leq h(\eta)\} \subseteq \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \leq h(\eta)\} \in \mathcal{U}$$

  folgt $f \leq_{\mathcal{U}} h$. Damit ist $\leq_{\mathcal{U}}$ transitiv.
- Angenommen $f \not\leq_{\mathcal{U}} g$. Dann ist $\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \leq g(\eta)\} \notin \mathcal{U}$, und weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\{\eta \in \kappa;\ g(\eta) < f(\eta)\} \subseteq \{\eta \in \kappa;\ g(\eta) \leq f(\eta)\} \in \mathcal{U}$, also $g \leq_{\mathcal{U}} f$.
- Angenommen $\leq_{\mathcal{U}}$ wäre nicht fundiert. Dann gibt es nach 1.5 eine unendliche, bezüglich $\leq_{\mathcal{U}}$ echt absteigende Folge in κ^κ: $f_0 > f_1 > f_2 > \dots$

  Sei $A_n := \{\eta \in \kappa;\ f_n(\eta) > f_{n+1}(\eta)\} \in \mathcal{U}$. Wegen der σ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ ist $A := \bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{U}$, insbesondere $A \neq \varnothing$.

  Für $\gamma \in A$ gilt dann: $f_0(\gamma) > f_1(\gamma) > f_2(\gamma) > \dots$, d.h. die Teilmenge $\{f_n(\gamma);\ n \in \omega\}$ von κ hat kein kleinstes Element im Widerspruch dazu, daß κ bezüglich $<$ wohlgeordnet ist!

□

Bemerkung: Die Fundiertheit der Relation $\leq_{\mathcal{U}}$ ist ohne DC nicht beweisbar. Die Relation entstammt der Konstruktion der Ultrapotenz eines Modells der Sprache der Mengenlehre. Die Fundiertheit der Relation $\leq_{\mathcal{U}}$ ist gerade die Fundiertheit der Ultapotenz und diese gilt nur, wenn DC angenommen wird (vgl. Spector [31, § 2]).

Bemerkung: Weil die Relation $\leq_{\mathcal{U}}$ (mit DC) fundiert ist, kann man mit ihr gemäß 1.6 auf κ^κ eine Rangfunktion definieren: $\rho_{\mathcal{U}} : \kappa^\kappa \longrightarrow \Omega$

$$\rho_{\mathcal{U}}(f) = \sup\{\rho_{\mathcal{U}}(g) + 1;\ g \leq_{\mathcal{U}} f\}.$$

Dann gilt: $\rho_{\mathcal{U}}(f) \leq \rho_{\mathcal{U}}(g) \;\Leftrightarrow\; f \leq_{\mathcal{U}} g \;\Leftrightarrow\; \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) \leq g(\eta)\} \in \mathcal{U}$.

Die Eigenschaft ($\star$) in Proposition 5.10 besagt also:

> ($\star\star$) Wenn $f \in \kappa^\kappa$ bezüglich $\leq_{\mathcal{U}^*}$ kleiner als die Identität ist, dann gelten $f \leq_{\mathcal{U}^*} c_{\eta_0}$ und $c_{\eta_0} \leq_{\mathcal{U}^*} f$, für ein $\eta_0 < \kappa$, wobei c_{η_0} die Funktion mit konstantem Wert η_0 ist.

Beweisidee für Proposition 5.10:
Da κ meßbar ist, existiert ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ.
Nach 5.12 ist $\leq_{\mathcal{U}}$ fundiert. Also hat die nicht leere Menge aller Elemente von κ^κ, die bezüglich $\leq_{\mathcal{U}}$ größer als alle konstanten Funktionen sind, ein $\leq_{\mathcal{U}}$-minimales Element f_0.
Ersetzt man in der Eigenschaft ($\star$) (bzw. in ($\star\star$)) die Identität durch f_0 und $\mathcal{U}^*$ durch $\mathcal{U}$, so erhält man eine wahre Aussage.
Der Bildfilter $\mathcal{U}^*$ von $\mathcal{U}$ unter der Abbildung f_0 erfüllt dann die Bedingung ($\star$), und $\mathcal{U}^*$ ist nach Konstruktion ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ.
Aus der Wahl von f_0 folgt, daß f_0 auf keinem Element von $\mathcal{U}$ konstant ist, also der Bildfilter unter f_0 frei sein muß.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ und $\rho_{\mathcal{U}}$ obige Rangfunktion.
Für $\gamma \in \kappa$ sei $c_\gamma \in \kappa^\kappa$ die konstante Funktion mit Wert γ: $c_\gamma(\eta) = \gamma \quad \forall \eta \in \kappa$.
Offensichtlich gilt für $\gamma < \gamma' \in \kappa$:

$$\rho_{\mathcal{U}}(c_\gamma) < \rho_{\mathcal{U}}(c_{\gamma'})$$

und somit

$$\rho_{\mathcal{U}}(c_\gamma) \geq \gamma \;\; \forall\, \gamma \in \kappa.$$

Außerdem gilt: $\{\eta \in \kappa;\ c_\gamma(\eta) \leq \gamma\} = \kappa - \gamma = \bigcap_{\eta \in \gamma} (\kappa - \{\eta\}) \in \mathcal{U}$ und damit $c_\gamma \leq_{\mathcal{U}} Id$ für alle $\gamma \in \kappa$.
Es folgt für alle $\gamma \in \kappa$: $\rho_{\mathcal{U}}(Id) > \rho_{\mathcal{U}}(c_\gamma)$, d.h. $\rho_{\mathcal{U}}(Id) \geq \kappa$.
Die Menge $\big\{f \in \kappa^\kappa;\ \ \forall\, \gamma \in \kappa\ \big(\rho_{\mathcal{U}}(c_\gamma) < \rho_{\mathcal{U}}(f) \leq \rho_{\mathcal{U}}(Id)\big)\big\}$ ist nicht leer, da sie Id enthält. also besitzt sie, weil $\leq_{\mathcal{U}}$ fundiert ist, ein minimales Element f_0.
Sei $\mathcal{U}^*$ der Bildfilter von $\mathcal{U}$ unter f_0, d.h. für $X \subseteq \kappa$ gilt:

$$X \in \mathcal{U}^* \iff f_0^{-1}[X] = \{\eta \in \kappa;\ f_0(\eta) \in X\} \in \mathcal{U}.$$

Nach Hilfssatz 5.4 ist $\mathcal{U}^*$ ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ.

$\mathcal{U}^*$ ist frei. Denn angenommen es existiert ein $\alpha \in \kappa$ mit $\{\alpha\} \in \mathcal{U}^*$, dann ist $\{\eta \in \kappa;\ f_0(\eta) = \alpha\} \subseteq \{\eta \in \kappa;\ f_0(\eta) \leq c_\alpha(\eta)\} \in \mathcal{U}$ und somit $\rho_{\mathcal{U}}(f_0) \leq \rho_{\mathcal{U}}(c_\alpha)$ im Widerspruch zur Wahl von f_0!

$\mathcal{U}^*$ erfüllt die Eigenschaft $(\star)$: Sei $f \in \kappa^\kappa$ und sei $\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\} \in \mathcal{U}^*$. Nach der Definition von $\mathcal{U}^*$ heißt das $\{\eta \in \kappa;\ f\big(f_0(\eta)\big) < f_0(\eta)\} \in \mathcal{U}$.
Sei $g = f \circ f_0 \in \kappa^\kappa$. Dann gilt $\rho_{\mathcal{U}}(g) < \rho_{\mathcal{U}}(f_0) = \kappa$, d.h.
$\exists\ \gamma \in \kappa :\ \rho_{\mathcal{U}}(g) = \gamma \leq \rho_{\mathcal{U}}(c_\gamma)$.
Daraus folgt
$\{\eta \in \kappa;\ g(\eta) \leq c_\gamma(\eta)\} = \{\eta \in \kappa;\ g(\eta) \leq \gamma\} = \dot{\bigcup}_{\alpha \leq \gamma} \{\eta \in \kappa;\ g(\eta) = \alpha\} \in \mathcal{U}$, und wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ existiert ein η_0 mit $\{\eta \in \kappa;\ g(\eta) = \eta_0\} \in \mathcal{U}$.
Mit der Definition von $\mathcal{U}^*$ folgt $\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \eta_0\} \in \mathcal{U}^*$.

□

Korollar 5.13 [ZSF + DC]
Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Dann existiert ein normaler, κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ.

Beweis: Da κ meßbar ist, existiert nach Proposition 5.10 ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter $\mathcal{U}^*$ auf κ, der die Eigenschaft
$(\star)\ \forall\ f \in \kappa^\kappa\ \big(\{\eta \in \kappa;\ f(\eta) < \eta\} \in \mathcal{U}^* \implies \exists\ \eta_0 < \kappa : \{\eta \in \kappa;\ f(\eta) = \eta_0\} \in \mathcal{U}^*\big)$
erfüllt. Mit Proposition 5.7 folgt die Behauptung.

□

Ich komme nun zum angekündigten Resultat, das auf Frederick Rowbottom zurückgeht. Es besagt, daß für eine Partition der endlichen Teilmengen einer meßbaren Kardinalzahl κ und für einen normalen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ eine Menge $H \in \mathcal{U}$ existiert, die homogen für die Partition ist.

Satz 5.14 (Rowbottom, 1964)
Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und $\mathcal{U}$ ein normaler, κ-vollständiger Ultrafilter auf κ.
Sei $\mathcal{P}_{<\omega}(\kappa) = \dot{\bigcup}_{\nu \in \gamma} A_\nu$ eine Partition der endlichen Teilmengen von κ mit $\gamma < \kappa$.
Dann existiert eine Menge $H \in \mathcal{U}$, so daß für alle $n \in \omega$ ein $\nu_n < \gamma$ existiert mit:

$$\mathcal{P}_n(H) \ \subseteq\ A_{\nu_n}.$$

Beweis: Sei $f : \mathcal{P}_{<\omega}(\kappa) \to \gamma$ definiert durch :

$$f(T) = \nu \iff T \in A_\nu.$$

Wir zeigen: Sei $n \in \omega$ und $f_n : \mathcal{P}_n(\kappa) \to \gamma$ eine beliebige Abbildung. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $H_n \in \mathcal{U}$, das homogen für f_n ist, d.h. $|f[\mathcal{P}_n(H_n)]| = 1$. $(\star)$

Mit $f_n := f \upharpoonright \mathcal{P}_n(\kappa)$ bekommen wir dann für jedes $n \in \omega$ eine Menge $H_n \in \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, folgt $H := \bigcap_{n\in\omega} H_n \in \mathcal{U}$, und für jedes $n \in \omega$ gilt wegen $\mathcal{P}_n(H) \subseteq \mathcal{P}_n(H_n)$ somit $|f[\mathcal{P}_n(H)]| = 1$. Daraus folgt die Behauptung.
Da die H_n für jedes $n \in \omega$ eindeutig bestimmt sind, wird für den Beweis das Auswahlaxiom nicht benötigt.

Wir beweisen $(\star)$ durch vollständige Induktion nach n.
<u>Beweisidee:</u> Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei für $n > 1$ die Behauptung bewiesen und eine Abbildung f_{n+1} von $\mathcal{P}_{n+1}(\kappa)$ nach γ gegeben. Wir wollen für jedes $S \in \mathcal{P}_n(\kappa)$ eine Abbildung von κ nach γ definieren, indem wir aus S durch hinzufügen eines $\beta \in \kappa$ mit $\beta > \max(S)$ ein Element von $\mathcal{P}_{n+1}(\kappa)$ machen und dessen Bild unter f_{n+1} betrachten. Zwar ist offensichtlich dieser Bildwert abhängig von dem gewählten β, doch es zeigt sich, daß ein $Y_S \in \mathcal{U}$ existiert, so daß für jedes $\beta \in Y_S$ der Wert von $S \cup \{\beta\}$ unter f_{n+1} gleich ist. Auf diese Weise kann man eine Abbildung g von $\mathcal{P}_n(\kappa)$ nach γ definieren und erhält mit der Induktionsvoraussetzung eine für g homogene Menge Z.
Die Menge $Z \cap \Big(\bigcap_{S\in\mathcal{P}_n(\kappa)} Y_S \Big)$ wäre dann homogen für f. Doch sie ist nicht unbedingt ein Element des Ultrafilters $\mathcal{U}$, da der Schnitt über κ viele Mengen gebildet wird. Durch Zuhilfenahme des Diagonalschnittes kann dieses Problem gelöst werden, und man erhält eine homogene Menge für f_{n+1} im Ultrafilter $\mathcal{U}$.

<u>Beweis:</u>
<u>IA</u> $n = 0$: Sei $f_0 : \mathcal{P}_0(\kappa) \to \gamma$.
Sei $H_0 := \kappa \in \mathcal{U}$. Dann ist offensichtlich H_0 homogen für f_0.

Die Behauptung sei nun für n bewiesen.
<u>IS</u> $n \to n+1$: Sei $f_{n+1} : \mathcal{P}_{n+1}(\kappa) \to \gamma$.
Für $S \in \mathcal{P}_n(\kappa)$ definieren wir die Abbildung $f_S : \kappa \to \gamma$ durch:

$$f_S(\beta) = \begin{cases} f_{n+1}(S \cup \{\beta\}) & , \quad \text{falls } \max(S) < \beta \\ 0 & \quad\ \ \text{sonst.} \end{cases} \qquad (*)$$

<u>Beh.:</u> Es existiert ein eindeutig bestimmtes $Y_S \in \mathcal{U}$, das homogen für f_S ist, d.h. $|f_S[Y_S]| = 1$.

Beweis: Zunächst zeigen wir die Existenz.
Angenommen für alle $\nu \in \gamma$ gilt: $f_S^{-1}[\{\nu\}] \notin \mathcal{U}$.
Dann folgt, da $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger Ultrafilter ist:

$$\varnothing = \bigcap_{\nu \in \gamma} \Big(\kappa - f_S^{-1}[\{\nu\}]\Big) \in \mathcal{U}, \quad \text{Widerspruch!}$$

Also existiert ein $\nu \in \gamma$ mit $Y_S := f_S^{-1}[\{\nu\}] \in \mathcal{U}$, d.h. $f_S[\mathcal{P}_1(Y_S)] = \{\nu\}$.
Dabei ist Y_S eindeutig bestimmt. Denn angenommen es existiert ein $\mu \in \gamma$ mit $\mu \neq \nu$ und $f_S^{-1}[\{\mu\}] \in \mathcal{U}$, so ist

$$f_S^{-1}[\{\nu\}] \cap f_S^{-1}[\{\mu\}] = f_S^{-1}[\{\nu\} \cap \{\mu\}] = f_S^{-1}[\varnothing] = \varnothing \in \mathcal{U} \ ,$$

Widerspruch!

Wir betrachten nun die folgende Abbildung: $g : \mathcal{P}_n(\kappa) \to \gamma, \ S \mapsto f_S[Y_S]$.
Nach der Induktionsvoraussetzung existiert eine eindeutig bestimmte homogene Menge für g, d.h. es existieren $Z \in \mathcal{U}$ und $\delta \in \gamma$ mit:

$$\forall\, S \in \mathcal{P}_n(Z) : \quad g(S) = f_S[Y_S] = \delta. \qquad (**)$$

Für alle $\alpha \in \kappa$ sei $Z_\alpha := \bigcap_{\substack{S \in \mathcal{P}_n(\kappa) \\ \max(S) \leq \alpha}} Y_S$.

Da $\mathcal{U}$ κ-vollständig ist, gilt $Z_\alpha \in \mathcal{U}$ für alle $\alpha \in \kappa$, und aus der Normalität von $\mathcal{U}$ folgt: $\triangle_{\alpha \in \kappa} Z_\alpha \in \mathcal{U}$. Somit gilt:

$$H_{n+1} := Z \cap \triangle_{\alpha \in \kappa} Z_\alpha \in \mathcal{U}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß H_{n+1} für f_{n+1} homogen ist.
<u>Beh.:</u> $f_{n+1}[\mathcal{P}_{n+1}(H_{n+1})] = \{\delta\}$.
Beweis: Sei $T \in \mathcal{P}_{n+1}(H_{n+1})$. Dann ist $T = S \cup \{\beta\}$, wobei $\beta = \max(T)$.
Somit gilt: $\max(S) < \beta$. Es folgt mit $(*)$: $f_{n+1}(T) = f_S(\beta)$.
Wegen $\beta \in H_{n+1}$ gilt:

$$\beta \ \in \ \triangle_{\alpha \in \kappa} Z_\alpha \ = \ \{\tau \in \kappa;\ \tau \in \bigcap_{\alpha \in \tau} Z_\alpha\}$$

und folglich: $\beta \in \bigcap_{\alpha \in \beta} Z_\alpha \subseteq Z_{\max(S)}$, da $\max(S) < \beta$.

Daraus folgt:

$$\beta \in Z_{\max(S)} = \bigcap_{\substack{S' \in \mathcal{P}_n(\kappa) \\ \max(S') \leq \max(S)}} Y_{S'} \subseteq Y_S.$$

Somit gilt: $f_{n+1}(T) = f_S(\beta) = f_S\big[Y_S\big]$ und aus $S \subseteq H_{n+1} \subseteq Z$ folgt: $S \in \mathcal{P}_n(Z)$, also mit $(**)$:

$$f_{n+1}(T) = f_S\big[Y_S\big] = \delta.$$

$\square$

5.3 Sharps und Ununterscheidbare

Die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen läßt sich schon aus einer leicht schwächeren Voraussetzung als der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl folgern, nämlich aus der Existenz von Sharps.

In diesem Abschnitt möchte ich eine kurze Einführung in Sharps geben, sowie einige wichtige Folgerungen aus der Existenz von Sharps ziehen.

Eine umfassendere Beschäftigung mit der Thematik würde einen tiefen Einstieg in die Modelltheorie erfordern; sie ist auch nicht nötig, da ich im folgenden nur einige wenige Konsequenzen der Sharps benutze.

Die Theorie von $0^\#$ geht auf Jack Silver zurück, der sie in seiner Dissertation von 1966 entwickelte.[2]

Silver benutzte Resultate aus der Modelltheorie, welche von Andrzej Ehrenfeucht und Andrzej Mostowski stammen.

Grundlegend für die Theorie ist der Begriff „Ununterscheidbare“ für eine Struktur, die wir nun für Strukturen der Sprache der Mengenlehre definieren.

Definition 5.15 Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ ein transitives Modell der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ZSF}}$ der Mengenlehre.

Eine Menge $\mathcal{I} \subseteq M \cap \Omega$ von Ordinalzahlen in M heißt *Menge von Ununterscheidbaren*, falls für jede Formel $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ZSF}}$ und für beliebige Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ aus $\mathcal{I}$ mit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ und $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ gilt:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[\beta_1, \ldots, \beta_n].$$

[2] $0^\#$ wird im Englischen „zero sharp“ oder „o sharp“ und auf deutsch meist „Null sharp“ ausgesprochen.

Um die Bezeichnung „Ununterscheidbare“ zu motivieren, betrachten wir ein Element α einer Menge $\mathcal{I}$, die obiger Definition genügt. Wir nehmen an, wir könnten es als „das einzige Objekt, welches die Eigenschaft $\Phi(x)$ hat“ charakterisieren. Wir betrachten die folgende Formel φ:

$$\varphi(x) \iff \Phi(x) \;\;\&\;\; \forall y \left(y \neq x \;\Rightarrow\; \neg\, \Phi(y)\right).$$

Offensichtlich gilt $\varphi(\alpha)$. Aber weil $\mathcal{I}$ eine Menge von Ununterscheidbaren ist, gilt dann auch $\varphi(\beta)$ für alle anderen $\beta \in \mathcal{I}$. Somit gilt auch $\Phi(\beta)$ im Widerspruch zu unserer Annahme!
Folglich kann man Ununterscheidbare nicht auf die oben angegebene Weise eindeutig charakterisieren.

Anstatt die üblichen Definition von $0^{\#}$ anzugeben, wähle ich eine äquivalente Charakterisierung, die für die Verwendung des Konzepts in diesem Zusammenhang sinnvoller erscheint.
Eine ausführliche Einführung in Sharps findet sich beispielsweise in Kanamori [11, § 9] und in Jech [9, § 30], worauf auch die Darstellung hier beruht.

Die dem gesamten Abschnitt zugrundeliegende Theorie ist ZSF.

Definition 5.16

$0^{\#}$ existiert $\quad :\iff \quad$ Es existiert eine Limesordinalzahl λ, so daß das Modell $\langle \mathbf{L}_\lambda, \in \rangle$ eine überabzählbare Menge von Ununterscheidbaren besitzt.

Aus dem nächsten Satz folgt, daß $0^{\#}$ existiert, falls es eine meßbare Kardinalzahl gibt.

Satz 5.17 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und α eine Limesordinalzahl. Wenn die Partitionsrelation*

$$\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$$

gilt,[3] *so hat jedes Modell $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ mit $\kappa \subseteq M$ eine Menge von Ununterscheidbaren vom Ordnungstyp α.*

[3] $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ bedeutet, daß für jede Partition der Menge $\mathcal{P}_{<\omega}(\kappa)$ der endlichen Teilmengen von κ in 2 Teile eine Menge $H \subseteq \kappa$ vom Ordnungstyp α existiert, so daß für jedes $n \in \omega$ gilt: $\mathcal{P}_n(H)$ liegt in einem der Teile der Partition.

Beweis: Da die Sprache $\mathcal{L}_{\text{ZSF}}$ abzählbar ist, ist auch die Menge aller Formeln abzählbar. Wir wählen eine Abzählung $\{\varphi_n;\ n \in \omega\}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \omega$ die Formel φ_n höchstens n freie Variablen besitzt.
$\mathrm{Fr}(n)$ für $n \in \omega$ sei die Anzahl der freien Variablen von φ_n.
Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ ein Modell der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ZSF}}$.
Wir definieren eine Partition $\mathcal{P}_{<\omega}(\kappa) = A_0 \,\dot{\cup}\, A_1$ der endlichen Teilmengen von κ wie folgt: Sei $X \in \mathcal{P}_{<\omega}(\kappa)$. Dann ist $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ für eine $n \in \omega$.
Nun sei

$$X \in A_0 \iff \mathfrak{M} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{Fr(n)}}]$$

und

$$X \in A_1 \iff \mathfrak{M} \not\models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{Fr(n)}}].$$

Diese Definition ist möglich, weil aus $\kappa \subseteq M$ folgt, daß $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ sind, und für jedes $n \in \omega$ gilt: $\mathrm{Fr}(n) \leq n$.
Sei nun $H \subseteq \kappa$ eine Menge vom Ordnungstyp α, die homogen für diese Partition ist.
Beh.: H ist eine Menge von Ununterscheidbaren für $\mathfrak{M}$.
Beweis: Offensichtlich ist $H \subseteq M \cap \Omega$.
Sei $\varphi_n(v_1, \ldots v_k)$ eine Formel mit $\mathrm{Fr}(n) = k \leq n$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und $\beta_1, \ldots, \beta_k$ aus H beliebig mit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k$ und $\beta_1 < \ldots < \beta_k$.
Da der Ordnungstyp von H eine Limesordinalzahl ist, können Elemente $\alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_n$ und $\beta_{k+1} < \ldots < \beta_n$ aus H mit $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ und $\beta_k < \beta_{k+1}$ ausgewählt werden. Die n-elementigen Teilmengen $\{\alpha_i;\ 1 \leq i \leq n\}$ und $\{\beta_i;\ 1 \leq i \leq n\}$ liegen dann entweder beide in A_0 oder beide in A_1.
Somit gilt: $\mathfrak{M} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_k] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[\beta_1, \ldots, \beta_k]$.

□

Korollar 5.18 [ZSF + DC]
Wenn eine meßbare Kardinalzahl existiert, so existiert $0^{\#}$.

Beweis: Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Dann existiert nach Korollar 5.13 ein normaler, κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ. (Für dieses Resultat wird DC benötigt.)

Nach dem Satz 5.14 von Rowbottom folgt daraus die Partitionsrelation

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)_2^{<\omega}.$$

Somit gilt nach obigem Satz 5.17 für jede Ordinalzahl α mit $\kappa \leq \alpha$, daß das Modell $\langle \mathbf{L}_\alpha, \in \rangle$ eine Menge von Ununterscheidbaren der Mächtigkeit κ besitzt. Also existiert $0^\#$.

□

Wenn $0^\#$ existiert, so gibt es nicht nur für ein einziges $\langle \mathbf{L}_\lambda, \in \rangle$, λ Limesordinalzahl, eine Menge von Ununterscheidbaren, sondern auch für jedes $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$, wobei $\kappa > \omega$ eine Kardinalzahl ist. Diese Aussage ist Teil des folgenden Satzes, der die Resultate von Silver zusammenfaßt.

Satz 5.19 (Silver, 1966)
Wenn $0^\#$ existiert, dann gilt:

(1) *Es gibt eine Klasse $\mathcal{I}$ von Ordinalzahlen, die alle überabzählbaren Kardinalzahlen umfaßt, so daß für jede überabzählbare Kardinalzahl κ gilt:*

  (a) *$\mathcal{I} \cap \kappa$ hat Ordnungstyp κ.*

  (b) *Falls κ regulär ist, so ist $\mathcal{I} \cap \kappa$ eine club–Menge in κ.*

  (c) *$\mathcal{I} \cap \kappa$ ist eine Menge von Ununterscheidbaren für das Modell $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$.*

  (d) *Für jedes $a \in \mathbf{L}_\kappa$ gilt: a ist in $\mathbf{L}_\kappa$ $\mathcal{I} \cap \kappa$-definierbar, d.h. es existiert eine Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{I} \cap \kappa$ mit*

$$\mathbf{L}_\kappa \models a \text{ ist das einzige } x \text{ mit } \varphi[x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n].$$

(2) *Seien κ, λ Kardinalzahlen mit $\omega < \kappa < \lambda$. Dann ist $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$ ein elementares Submodell von $\langle \mathbf{L}_\lambda, \in \rangle$.*

  D.h. für jede Formel $\varphi(v_1, \ldots v_n)$ und für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{L}_\kappa$ gilt:

$$\mathbf{L}_\kappa \models \varphi[x_1, \ldots x_n] \iff \mathbf{L}_\lambda \models \varphi[x_1, \ldots x_n].$$

Bemerkungen:

- Die Klasse $\mathcal{I}$ heißt Klasse der *(Silver–)Ununterscheidbaren für* $\mathbf{L}$.
- Es gilt auch die Umkehrung des Satzes. Dies ist mit unserer Definition von „$0^\#$ existiert“ offensichtlich, denn danach genügt es, daß eine solche Klasse $\mathcal{I}$ existiert, die (1)(c) erfüllt.

Der Beweis des Satzes erfordert einigen Aufwand; er findet sich beispielsweise bei Jech [9, Theorem 72 und 73].
Aus dem Satz lassen sich einige direkte und zum Teil überraschende Folgerungen für $\mathbf{L}$ ableiten.

Korollar 5.20 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl.*
Dann ist $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in\rangle$ ein elementares Submodell von $\langle \mathbf{L}, \in\rangle$.

Beweis: Sei $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ eine Formel und $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{L}_\kappa$.
Nach dem ZFS–Reflexionsprinzip 1.10 existiert eine Kardinalzahl $\lambda > \kappa$, so daß für alle $x_1, \dots x_n \in \mathbf{L}_\lambda$ gilt:

$$\mathbf{L} \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \iff \mathbf{L}_\lambda \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Wegen Satz 5.19(2) gilt für alle $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{L}_\kappa$:

$$\mathbf{L}_\kappa \models \varphi[y_1, \dots, y_n] \iff \mathbf{L}_\lambda \models \varphi[y_1, \dots, y_n].$$

Damit folgt:

$$\mathbf{L}_\kappa \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathbf{L} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

□

Korollar 5.21 *Angenommen $0^\#$ existiert.*
Dann gilt für jede Formel $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{ZSF}}$ und für beliebige $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{I}$ mit $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ und $\beta_1 < \dots < \beta_n$:

$$\mathbf{L} \models \varphi[\alpha_1, \dots \alpha_n] \iff \mathbf{L} \models \varphi[\beta_1, \dots \beta_n].$$

Beweis: Sei $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ eine Formel und $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ wie in der Behauptung.
Sei κ eine Kardinalzahl mit $\kappa > \max\{\alpha_n, \beta_n, \omega\}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \models \varphi[\alpha_1, \dots \alpha_n] \overset{5.20}{\iff} \mathbf{L}_\kappa \models \varphi[\alpha_1, \dots \alpha_n] &\overset{5.19(1)(iii)}{\iff} \mathbf{L}_\kappa \models \varphi[\beta_1, \dots \beta_n] \\ &\overset{5.20}{\iff} \mathbf{L} \models \varphi[\beta_1, \dots \beta_n]. \end{aligned}$$

□

Die Elemente von $\mathcal{I}$ verhalten sich somit auch bezüglich der Klasse $\mathbf{L}$ wie Ununterscheidbare.

Korollar 5.22 *Jedes Element von* $\mathbf{L}$ *ist* $\mathcal{I}$*-definierbar.*

Beweis: Sei $a \in \mathbf{L}$. Dann existiert eine Kardinalzahl κ mit $\kappa > \omega$ und $a \in \mathbf{L}_\kappa$. Nach 5.19(1)(iv) existieren eine Formel $\varphi(v_0, v_1, \dots v_n)$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{I} \cap \kappa$ mit $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, so daß gilt:

$$\mathbf{L}_\kappa \models \varphi[a, \alpha_1, \dots \alpha_n] \wedge \forall x\big(\varphi(x, \alpha_1, \dots \alpha_n) \Rightarrow x = a\big).$$

Nach 5.20 folgt, da $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{L}_\kappa$ ist,

$$\mathbf{L} \models \varphi[a, \alpha_1, \dots \alpha_n] \wedge \forall x\big(\varphi(x, \alpha_1, \dots \alpha_n) \Rightarrow x = a\big).$$

Somit ist a in $\mathbf{L}$ $\mathcal{I}$-definierbar.

□

Korollar 5.23
Angenommen $\big(\mathbf{V} \models$ *Es existiert eine reguläre Kardinalzahl* $\kappa > \omega\big)$.
Dann ist jede überabzählbare Kardinalzahl in $\mathbf{L}$ *stark–unerreichbar.*
Insbesondere gilt für jede unendliche Menge $X \in \mathbf{L}$*:* $|\mathcal{P}(X)^{\mathbf{L}}| = |X|$.

Beweis: Sei $\kappa > \omega$ eine (in $\mathbf{V}$) reguläre Kardinalzahl.
„λ ist regulär“ ist eine Π_1^{ZSF}-Formel, somit gilt:

$$\mathbf{L} \models \kappa \text{ ist regulär.}$$

Da $\mathcal{I}$ alle überabzählbaren Kardinalzahlen enthält, folgt mit Korollar 5.21:

$$\mathbf{L} \models \lambda \text{ ist regulär.}$$

für jede $\mathbf{V}$-Kardinalzahl λ mit $\omega < \lambda$.
„λ ist Limeskardinalzahl" ist ebenfalls eine Π_1^{ZSF}-Formel, und somit gilt:

$$\mathbf{L} \models \aleph_\omega^{\mathbf{V}} \text{ ist Limeskardinalzahl.}$$

Es folgt analog für jede $\mathbf{V}$-Kardinalzahl λ mit $\omega < \lambda$:

$$\mathbf{L} \models \lambda \text{ ist Limeskardinalzahl.}$$

Also ist jede (in $\mathbf{V}$) überabzählbare $\mathbf{V}$-Kardinalzahl in $\mathbf{L}$ schwach–unerreichbar und somit, weil GCH in $\mathbf{L}$ gilt, auch stark–unerreichbar.

Sei nun $X \in \mathbf{L}$ eine unendliche Menge.
Der $\mathbf{V}$-Nachfolger der $\mathbf{L}$-Kardinalität von X, also $\left((|X|^{\mathbf{L}})^+\right)^{\mathbf{V}}$ ist eine überabzählbare Kardinalzahl, also in $\mathbf{L}$ stark–unerreichbar.
Es folgt $\left(|\mathcal{P}(X)^{\mathbf{L}}| < \left((|X|^{\mathbf{L}})^+\right)^{\mathbf{V}}\right)^{\mathbf{V}}$, d.h. $\left(|\mathcal{P}(X)^{\mathbf{L}}| = |X|\right)^{\mathbf{V}}$.

□

Bemerkung 5.24 Man kann alle Resultate über $0^\#$ und Ununterscheidbare für $\mathbf{L}$ auch auf die Modelle $\mathbf{L}[a]$ für ein $a \in \omega^\omega$ relativieren.
Die grundlegende Definition lautet dann:

Definition 5.25 Sei $a \in \omega^\omega$.

$a^\#$ existiert $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Limesordinalzahl λ, so daß das Modell $\langle \mathbf{L}_\lambda[a], \in\rangle$ eine überabzählbare Menge von Ununterscheidbaren besitzt.

Aus der Gültigkeit der Partitionsrelation $\kappa \longrightarrow (\alpha)_2^{<\omega}$ für eine unendliche Kardinalzahl κ und eine überabzählbare Limesordinalzahl α folgt dann nach Satz 5.17 die Existenz von $a^\#$ für alle $a \in \omega^\omega$.
Es gilt auch das Analogon zu Satz 5.19 sowie zu den daraus gefolgerten Korollaren, wobei jeweils $\mathbf{L}$ durch $\mathbf{L}[a]$ und $\mathbf{L}_\kappa$ durch $\mathbf{L}_\kappa[a]$ ersetzt werden.
Die Klasse der Ununterscheidbaren für $\mathbf{L}[a]$, die dann nach dem Analogon zu Satz 5.19 existiert, wird mit $\mathcal{I}_a$ bezeichnet.

Kapitel 6

$\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen und Bäume

Im folgenden werden einige Resultate aus der Deskriptiven Mengenlehre vorgestellt, die für den Beweis des Hauptresultats im nächsten Kapitel benötigt werden. Zentral ist der Satz über die Darstellung von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen durch Bäume. Er wurde bereits von Nikolai Lusin und Wacław Sierpiński [18] bewiesen.
Es gilt auch eine Version dieses Satzes für die effektive Deskriptive Mengenlehre, die auf die Arbeit von Stephen Kleene [15] zurückgeht.
Einen historischen Überblick über diese Thematik gibt Moschovakis [27, 4G].

6.1 Darstellung von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen durch Bäume

Ich stelle die Resultate in einer modernen Form vor, wie sie sich etwa bei Kanamori [11, Proposition 12.10, Theorem 13.1] und Moschovakis [27, Theorem 4A.3] findet.
Zunächst zeigen wir, daß jede abgeschlossene Menge als Menge der unendlichen Zweige eines Baumes betrachtet werden kann.

Proposition 6.1 *Sei $k \in \omega$ und $A \subseteq (\omega^\omega)^k$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn ein Baum B auf ω^k existiert mit $A = [B]$.*

Beweis: Wir nehmen oBdA $k = 1$ an.
Sei $A \subseteq \omega^\omega$.
„$\Rightarrow$“ Wir setzen

$$B := \{x \upharpoonright m;\ x \in A \ \ \& \ \ m \in \omega\} \ .$$

Dann ist B ein Baum auf ω und $A \subseteq [B]$.

Da $\omega^\omega - A$ offen ist, existiert für alle $y \in \omega^\omega - A$ ein $m \in \omega$, so daß $U_{y\upharpoonright m} \subseteq \omega^\omega - A$ gilt.
Somit gilt für alle $x \in A:\ x\upharpoonright m \neq y\upharpoonright m,$ also $y\upharpoonright m \notin B.$
Damit ist $y \notin [B]$ und es folgt: $\omega^\omega - A \subseteq \omega^\omega - [B]$ und somit $[B] \subseteq A.$

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt B ein Baum auf ω mit $A = [B]$.
Sei $x \in \omega^\omega - [B]$. Dann existiert $m \in \omega$ mit $x\upharpoonright m \notin B.$ Es folgt $y \notin B$ für alle $y \in \omega^\omega$ mit $y\upharpoonright m = x\upharpoonright m$, d.h. $U_{x\upharpoonright m} \subseteq \omega^\omega - [B].$
Also ist $\omega^\omega - [B]$ offen und damit A abgeschlossen.

□

Um das zentrale Resultat von Lusin und Sierpiński folgern zu können, führe ich den Begriff des fundierten Baumes ein.

Definition 6.2 Sei B ein Baum auf $\omega \times Y$.

- B heißt *fundiert*, wenn gilt: $[B] = \varnothing$,

  d.h. ein Baum ist fundiert, wenn er keine unendlichen Zweige besitzt.

- Die *umgekehrte koordinatenweise Inklusion* $\supset$ sei:

$$\langle s,u\rangle \supset \langle s',u'\rangle \ \Leftrightarrow\ s' \subset s \text{ und } u' \subset u \qquad \forall\, \langle s,u\rangle,\ \langle s',u'\rangle \in B.$$

Unter der Annahme von DC ist B genau dann fundiert, wenn die $\supset$ eine fundierte Relation auf B ist.

Bemerkung 6.3 *Sei B ein Baum auf $\omega \times Y$. Dann gilt:*

(i) Die Relation $\supset$ ist fundiert $\implies$ $[B] = \varnothing$,

(ii) $[B] = \varnothing \ \overset{\text{DC}}{\Longrightarrow}$ Die Relation $\supset$ ist fundiert.

Beweis: (i) Angenommen $[B] \neq \varnothing$. Dann existiert ein $\langle x,y\rangle \in [B]$ und damit hat die Menge $\{\langle x\upharpoonright m,\ y\upharpoonright m\rangle;\ n \in \omega\} \subseteq B$ kein minimales Element. Denn für alle $m \in \omega$ existiert zu $\langle x\upharpoonright m,\ y\upharpoonright m\rangle$ das bezüglich $\supset$ kleinere $\langle x\upharpoonright m{+}1,\ y\upharpoonright m{+}1\rangle$. Damit ist die Relation $\supset$ nicht fundiert.

(ii) Angenommen die Relation $\supset$ ist nicht fundiert. Dann existiert eine Teilmenge $S \subseteq B$ ohne $\supset$-minimales Element. Mit DC können wir eine Folge $\langle\langle s,u\rangle_i;\ i \in \omega\rangle$ aus S auswählen, so daß für alle $i \in \omega$ gilt: $\langle s,u\rangle_{i+1} \supset \langle s,u\rangle_i.$
Dann ist $\langle x,y\rangle := \bigcup_{i\in\omega} \langle s,u\rangle_i \in [B].$

□

Falls Y wohlgeordnet ist, wird für obige Aussage DC nicht benötigt.

Definition 6.4 Sei B ein Baum auf $\omega \times Y$ und $\supset$ eine fundierte Relation auf B. Wie schon in Abschnitt 1.3 können wir nun eine Rangfunktion $\rho_B : B \to \Omega$ definieren durch:

$$\rho_B(v) = \bigcup\{\rho_B(w)+1;\ w \in B \ \ \& \ \ w \supset v\}.$$

Bemerkung:

- Falls $v \in B$ minimal ist bezüglich $\supset$, also ein maximaler Zweig von B bezüglich $\subset$, so gilt: $\rho_B(v) = \bigcup \varnothing = 0$.
- ρ_B ist eine ordnungserhaltende Abbildung von $\langle B, \supset\rangle$ nach $\langle \Omega, \in\rangle$. Denn:

  Für $v, v' \in B$ mit $v \supset v'$ gilt: $\{w \in B;\ w \supset v\} \subset \{w \in B;\ w \supset v'\}$ und somit $\rho_B(v) \leq \rho_B(v')$. Wegen $v \in \{w \in B;\ w \supset v'\}$ ist $\rho_B(v) < \rho_B(v')$.
- $\|B\| := \bigcup\limits_{v \in B} \rho_B(v) + 1$ heißt *Höhe* des fundierten Baums B.

Satz 6.5 (Lusin-Sierpiński)
Sei $A \subseteq \omega^\omega$. Dann ist A genau dann eine $\mathbf{\Pi}^1_1$- Menge, wenn ein Baum B auf $\omega \times \omega$ existiert, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad B_x \textit{ ist fundiert.}$$

Beweis: Sei $A \in \mathbf{\Pi}^1_1$. Dann ist $\omega^\omega - A$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Menge, also Projektion einer abgeschlossenen Menge $C \subseteq (\omega^\omega)^2$. Gemäß Proposition 6.1 existiert ein Baum B auf $\omega \times \omega$ mit $C = [B]$.
Dann gilt für alle $x \in \omega^\omega$:

$$\begin{aligned} x \in \omega^\omega - A &\Leftrightarrow \exists\, y \in \omega^\omega : \langle x, y\rangle \in [B] \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \omega^\omega\ \forall\, m \in \omega : \langle x{\restriction} m, y{\restriction} m\rangle \in B \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \omega^\omega\ \forall\, m \in \omega : y{\restriction} m \in B_x \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \omega : y \in [B_x] \\ &\Leftrightarrow [B_x] \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $x \in A \ \Leftrightarrow\ [B_x] = \varnothing \ \Leftrightarrow\ B_x$ ist fundiert.

Sei umgekehrt B ein Baum auf $\omega \times \omega$, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:
$x \in A \;\Leftrightarrow\; B_x$ ist fundiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} x \in \omega^\omega - A &\Leftrightarrow [B_x] \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists\, y \in \omega^\omega : \langle x, y\rangle \in [B] \\ &\Leftrightarrow x \in p[B]. \end{aligned}$$

Nach Proposition 6.1 ist $[B]$ abgeschlossen und somit A eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge.

$\square$

Wir beweisen nun die effektive Version des obigen Satzes. Dieser kann dann als ein Korollar des effektiven Resultats gesehen werden.

Satz 6.6 (Lusin-Sierpiński, Kleene)
Sei $A \subseteq \omega^\omega$, $a \in \omega^\omega$. Dann ist A genau dann eine $\Pi^1_1(a)$-Menge, wenn ein Baum B auf $\omega \times \omega$ existiert, der $\Delta^0_0(a)$ ist, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; B_x \text{ ist fundiert.}$$

Beweis: Sei $A \in \Pi^1_1(a)$. Dann existiert eine Relation $\hat{R} \subseteq \omega^3$, welche $\Delta^0_0(a)$ ist, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$x \in A \iff \forall^1 y\, \exists^0 m : \\ \hat{R}\left(m\,,\; p_0^{x(0)+1} \cdot p_1^{x(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{x(m-1)+1}\,,\; p_0^{y(0)+1} \cdot p_1^{y(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{y(m-1)+1}\right).$$

Wir definieren nun einen Baum B auf $\omega \times \omega$:
Für $s, t \in \omega^{<\omega}$ mit $|s| = |t|$ gelte: $\langle s, t\rangle \in B \;:\Longleftrightarrow\; \forall^0 n \leq |s|$:

$$\neg\hat{R}\left(n\,,\; p_0^{s(0)+1} \cdot p_1^{s(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{s(m-1)+1}\,,\; p_0^{t(0)+1} \cdot p_1^{t(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{t(m-1)+1}\right).$$

Da $\hat{R}$ eine $\Delta^0_0(a)$-Relation ist, ist auch $B \in \Delta^0_0(a)$.

Offensichtlich ist B ein Baum und es gilt:

$$
\begin{aligned}
x \in A \;\; &\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m : \hat{R}\Big(m\,,\; p_0^{x(0)+1} \cdot p_1^{x(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{x(m-1)+1}\,,\; p_0^{y(0)+1} \cdot p_1^{y(1)+1} \cdot \\
&\qquad\qquad \ldots \cdot p_{m-1}^{y(m-1)+1}\Big) \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m\; \exists^0 n \le m : \hat{R}\Big(n\,,\; p_0^{x(0)+1} \cdot p_1^{x(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{x(m-1)+1}\,,\; p_0^{y(0)+1} \\
&\qquad\qquad \cdot p_1^{y(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{y(m-1)+1}\Big) \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m : \langle x{\restriction} m, y{\restriction} m\rangle \notin B \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m : y{\restriction} m \notin B_x \\
&\Leftrightarrow\;\; [B_x] = \varnothing \\
&\Leftrightarrow\;\; B_x \text{ ist fundiert.}
\end{aligned}
$$

Sei umgekehrt B ein Baum, der $\Delta^0_0(a)$ ist, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:
$x \in A \;\Leftrightarrow\; B_x$ ist fundiert. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
x \in A \;\; &\Leftrightarrow\;\; [B_x] = \varnothing \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m : y{\restriction} m \notin B_x \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m\; \exists^0 n\; (s_n = y{\restriction} m \;\wedge\; s_n \notin B_x) \\
&\Leftrightarrow\;\; \forall^1 y\; \exists^0 m\; \exists^0 n\; (s_n = y{\restriction} m \;\wedge\; \neg R(n,x))\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist die Relation $R \subseteq \omega \times \omega^\omega$ wie folgt definiert:

$$R(i,x) \;\Leftrightarrow\; s_i \in B_x \;\Leftrightarrow\; \langle x{\restriction} |s_i|,\, s_i\rangle \in B$$

für alle $i \in \omega,\; x \in \omega^\omega$.
In dieser Definition wird die Δ^0_0-Abzählung von $\omega^{<\omega}$ aus 1.1 benutzt.
Da auch $B \in \Delta^0_0(a)$ ist, gilt dies ebenfalls für R.
Es folgt: A ist eine $\Pi^1_1(a)$-Menge.

□

6.2 Bäume und Wohlordnungen

Indem man die Relation $\supset$ zu einer linearen Ordnung $<_{\mathrm{KB}}$ erweitert, kann man das obige Resultat noch verbessern. Es gilt dann, daß $x \in \omega^\omega$ genau dann ein

Element von A ist, wenn der zugehörige Baum B_x wohlgeordnet ist bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$.
Mit Hilfe von $<_{\mathrm{KB}}$ werden wir dann jedem $x \in \omega^\omega$ eine lineare Ordnung auf ω zuordnen, die genau dann eine Wohlordnung ist, wenn x ein Element von A ist. Diese Äquivalenz wird beim Beweis der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit wichtig sein.
Für diesen Abschnitt vgl. Kanamori [11, Ex. 13.2, § 15, S.192f.].

Definition 6.7 Seien $s, t \in \omega^{<\omega}$.

$$s <_{\mathrm{KB}} t \iff \begin{cases} s \supset t \text{ oder} \\ s \not\supseteq t \text{ und für } m = \min\{i \in \omega;\ s(i) \neq t(i)\} \text{ gilt: } s(m) < t(m)\,. \end{cases}$$

$<_{\mathrm{KB}}$ wird *Kleene-Brouwer-Ordnung* oder *Lusin-Sierpiński-Ordnung* genannt. Sie wurde in der Tat sowohl von Lusin und Sierpiński [18], als auch von Kleene [15] in ihren Arbeiten definiert. Letzterer schreibt, daß er sie von Luitzen Brouwer übernommen hat.
$<_{\mathrm{KB}}$ ist eine strikt lineare Ordnung auf $\omega^{<\omega}$.
Da $s \supset \varnothing$ für alle $s \in \omega^{<\omega}$ gilt, ist $\varnothing$ das Maximum bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$.

Proposition 6.8 *Sei B ein Baum auf ω. Dann gilt:*

$$B \textit{ ist fundiert} \iff B \textit{ ist wohlgeordnet bezüglich } <_{\mathrm{KB}}\,.$$

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei $\varnothing \neq M \subseteq B$. Da B bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$ wohlgeordnet ist, existiert $m := \min_{<_{\mathrm{KB}}}(M)$. $<_{\mathrm{KB}}$ erweitert die Ordnung $\supset$. Somit existiert kein $t \in M$ mit $t \supset m$. Also ist m minimal bezüglich $\supset$ in M und somit $\supset$ eine fundierte Relation auf B.
Da ω eine wohlgeordnete Menge ist, folgt die Fundiertheit des Baumes B.
„$\Rightarrow$“ Angenommen B wäre durch $<_{\mathrm{KB}}$ nicht wohlgeordnet. Dann existiert eine Teilmenge $\varnothing \neq M \subseteq B$, die kein Minimum bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$ besitzt. Da $<_{\mathrm{KB}}$ eine lineare Ordnung ist, ist M eine unendliche Menge. Wegen $M \subseteq B \subseteq \omega^{<\omega}$ ist M abzählbar.
Die Elemente von M bilden eine bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$ eine strikt absteigende Kette $\langle t_i;\ i \in \omega\rangle$ in B.

<u>Beh.:</u> Für jedes $n \in \omega$ existiert ein $k_n \in \omega$ mit $k_{n-1} < k_n$ (für $n < 0$) und $|t_{k_n}| \geq n+1$ sowie $t_{k_n} \restriction (n+1) = t_i \restriction (n+1)$ für alle $k_n \leq i \in \omega$.

Damit kann man dann eine Folge $y \in \omega^\omega$ definieren:

Sei $n \in \omega$. Setze

$$y(n) := t_{k_n}(n).$$

Dann gilt für alle $n \in \omega : \; y \upharpoonright (n+1) = t_{k_n} \upharpoonright (n+1) \in B$.
Daraus folgt: $y \in [B]$ und somit $[B] \neq \varnothing$. Also ist B nicht fundiert.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion:
$\underline{n = 0}$: Die Folge der t_i ist strikt absteigend. Da $\varnothing$ das Maximum bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$ ist, gilt: $t_i \neq \varnothing$ für $i \geq 1$.
Für alle $1 < i \in \omega$ ist $t_{i+1} <_{\mathrm{KB}} t_i <_{\mathrm{KB}} t_1$, somit gilt:

$$0 \leq t_{i+1}(0) \leq t_i(0) \leq t_1(0) \in \omega.$$

Also wird die Folge $\langle t_i(0);\; 0 < i \in \omega \rangle$ ab einem $k_0 \in \omega$ konstant, d.h.

$$t_i(0) = t_{k_0}(0) \quad \forall\, k_0 \leq i \in \omega\ .$$

Damit ist $|t_{k_0}| \geq 1$ und $t_{k_0} \upharpoonright 1 = t_i \upharpoonright 1 \;\; \forall\, k_0 \leq i \in \omega$.

$\underline{n \to n+1}$: Es gilt für alle $i \in \omega$ mit $i > k_n$: $|t_i| > n+1$. $\quad (\star)$
Denn nach der Induktionsvoraussetzung ist $|t_{k_n}| \geq n+1$ und $t_{k_n} \upharpoonright (n+1) = t_i \upharpoonright (n+1)$ für $i \geq k_n$.
Angenommen $|t_i| \leq n+1$, d.h. $|t_i| = n+1$. Dann würde aus $t_i <_{\mathrm{KB}} t_{k_n}$ entweder $t_i \supset t_{k_n}$ oder $t_i(m) < t_{k_n}(m)$ für $m := \min\{j \in \omega;\; t_i(j) \neq t_{k_n}(j)\}$ folgen, Widerspruch!
Wegen $t_{i+1} <_{\mathrm{KB}} t_i <_{\mathrm{KB}} t_{k_n}$ und $t_{i+1} \upharpoonright (n+1) = t_i \upharpoonright (n+1) = t_{k_n} \upharpoonright (n+1)$ für alle $i > k_n$ folgt:

$$0 \leq t_{i+1}(n+1) \leq t_i(n+1) \leq t_{k_n}(n+1).$$

Also existiert ein $k_{n+1} \in \omega$ mit $k_n < k_{n+1}$ und

$$t_i(n+1) = t_{k_{n+1}}(n+1) \quad \forall\, k_{n+1} \leq i \in \omega.$$

Es folgt $t_i \upharpoonright (n+2) = t_{k_{n+1}} \upharpoonright (n+2)$ für $k_{n+1} \leq i \in \omega$ und wegen $(\star)$ ist $|t_{k_{n+1}}| \geq n+2$.

$\square$

Mit Hilfe der Kleene-Brouwer-Ordnung und einem Baum auf $\omega \times \omega$ definieren wir nun zu jedem $x \in \omega^\omega$ eine lineare Ordnung auf ω.

Sei im folgenden B ein Baum auf $\omega \times \omega$. Dann ist $B_x \subseteq \omega^{<\omega}$ für jedes $x \in \omega^\omega$ ein Baum auf ω.

Definition 6.9 Sei $x \in \omega^\omega$. Für $i, j \in \omega$ sei:

$$i <_x j \iff \begin{cases} s_i \notin B_x \;\;\&\;\; s_j \notin B_x \;\;\&\;\; i < j \text{ oder} \\ s_i \notin B_x \;\;\&\;\; s_j \in B_x \text{ oder} \\ s_i \in B_x \;\;\&\;\; s_j \in B_x \;\;\&\;\; s_i <_{\mathrm{KB}} s_j. \end{cases}$$

Dabei wird die Abzählung $\{\langle i, s_i\rangle;\; i \in \omega\}$ von $\omega^{<\omega}$ aus 1.1 gewählt.

Die Relation $<_x$ ist eine strikte lineare Ordnung auf ω. Dabei kommen diejenigen i zuerst, für die s_i nicht im Baum B_x liegt, und sie werden durch die übliche Relation $\in$ auf ω geordnet. Danach kommen die i, deren s_i im Baum liegt, geordnet durch $<_{\mathrm{KB}}$.
Für jedes $x \in \omega^\omega$ ist 0 das Maximum bezüglich $<_x$. Denn $s_0 = \varnothing \in B_x$ und $\varnothing$ ist das Maximum bezüglich $<_{\mathrm{KB}}$.

Bemerkung 6.10 Sei $x \in \omega^\omega$. Dann gilt:

$$\langle \omega, <_x\rangle \text{ ist eine Wohlordnung.} \iff \langle B_x, <_{\mathrm{KB}}\rangle \text{ ist eine Wohlordnung.}$$

Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei $\varnothing \neq M \subseteq B_x$. Da $<_x$ eine Wohlordnung auf ω ist, existiert $m := \min_{<_x}\{i \in \omega;\; s_i \in M\}$.
Also gilt: $s_m \in M$ und $s_m <_{\mathrm{KB}} t$ für alle $t \in M - \{s\}$. Das bedeutet: $s_m = \min_{<_{\mathrm{KB}}}(M)$.
„$\Leftarrow$“ Sei $\varnothing \neq N \subseteq \omega$.
<u>1. Fall:</u> $\{s_i;\; i \in N\} \not\subseteq B_x$. Dann ist $\varnothing \neq \{i \in N;\; s_i \notin B_x\} \subseteq \omega$ und es existiert $m := \min_{<}\{i \in N;\; s_i \notin B_x\}$.
Es folgt: $m \in N$ und $m <_x n$ für alle $n \in N - \{m\}$.
<u>2. Fall:</u> $\{s_i;\; i \in N\} \subseteq B_x$. Da $<_{\mathrm{KB}}$ eine Wohlordnung auf B_x ist, existiert $s_m := \min_{<_{\mathrm{KB}}}\{s_i;\; i \in N\}$.
Es folgt: $m \in N$ und $m <_x n$ für alle $n \in N - \{m\}$.

□

Bemerkung 6.11 Aus dem bisher gezeigten, folgt: Wenn $A \subseteq \omega^\omega$ eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge ist, so existiert ein Baum B auf $\omega \times \omega$ und es gilt für alle $x \in \omega^\omega$:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \langle B_x, <_{\mathrm{KB}} \rangle \text{ wohlgeordnet.} \\ &\iff \langle \omega, <_x \rangle \text{ wohlgeordnet.} \end{aligned}$$

Dabei ist $<_x$ abhängig von B_x wie oben definiert.

Um Spielzustände zu endlichen Zeitpunkten untersuchen zu können, betrachten wir Teilrelationen von $<_x$, die bereits definiert sind, wenn die Folge x nur bis zu einer endlichen Länge konstruiert worden ist. Dazu erklären wir nun analog zu B_x und $<_x$ einen Baum B_s und eine Ordnung $<_s$ für $s \in \omega^{<\omega}$.

Sei B ein Baum auf $\omega \times \omega$.

Definition 6.12 Sei $s \in \omega^{<\omega}$.

- Sei

  $B_s = \{t \in \omega^{<\omega};\ \exists\, m < |s| :\ \langle s \upharpoonright m, t \rangle \in B\} = \{t \in \omega^{<\omega};\ \langle s \upharpoonright |t|, t \rangle \in B\}$.

  B_s ist ein Baum auf ω.

- Für $i, j \in \omega$ mit $i, j < |s|$ sei

  $$i <_s j \iff \begin{cases} t_i \notin B_s \ \ \& \ \ t_j \notin B_s \ \ \& \ \ i < j \text{ oder} \\ t_i \notin B_s \ \ \& \ \ t_j \in B_s \text{ oder} \\ t_i \in B_s \ \ \& \ \ t_j \in B_s \ \ \& \ \ t_i <_{\mathrm{KB}} t_j. \end{cases}$$

  Dabei wird wieder die Abzählung $\{\langle i, t_i \rangle;\ i \in \omega\}$ von $\omega^{<\omega}$ aus 1.1 gewählt.

  Die Relation $<_s$ ist eine strikte lineare Ordnung auf $|s|$.

  Wie im Falle von $<_x$ für ein $x \in \omega^\omega$ folgt auch hier:

  Falls $s \neq \varnothing$, ist 0 das Maximum bezüglich $<_s$.

Proposition 6.13

(i) Seien $s, s' \in \omega^{<\omega}$ mit $s \subseteq s'$. Dann gilt:

$$<_s \subseteq <'_s .$$

Das heißt $<_s$ wird durch $<'_s$ fortgesetzt.

(ii) Sei $x \in \omega^\omega$. Dann gilt:

$$<_x \; = \; \bigcup_{m \in \omega} <_{x \upharpoonright m} \quad .$$

Beweis: (i) Für alle $t \in \omega^{<\omega}$ mit $|t| < |s| \leq |s'|$ ist $\langle s \upharpoonright |t|, t \rangle = \langle s' \upharpoonright |t|, t \rangle$.
Damit gilt:

$$t \in B_s \iff t \in B_{s'} \; .$$

Seien $i, j < |s|$. Dann folgt wegen $|t_i| \leq i < |s|$ und $|t_j| \leq j < |s|$ aus der Definition von $<_s$ bzw. $<_{s'}$:

$$i <_s j \iff i <_{s'} j \; .$$

(ii) Sei $m \in \omega$ und $0 \leq i < m$. Dann ist $|t_i| \leq i < m$ und es gilt:
$t_i \in B_{x \upharpoonright m} \; \Leftrightarrow \; \langle (x \upharpoonright m) \upharpoonright |t_i|, t_i \rangle \in B \; \Leftrightarrow \; \langle x \upharpoonright |t_i|, t_i \rangle \in B \; \Leftrightarrow \; t_i \in B_x$.
Für $i, j \in \omega$ mit $i, j < m$ gilt also

$$i <_x j \iff i <_{x \upharpoonright m} j \; .$$

□

Kapitel 7

$\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit

Wir sind nun in der Lage, das Resultat von Martin [19] zu beweisen, daß aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl die Determiniertheit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen folgt. Danach zeige ich dann einen Satz, der dieses Resultat verfeinert, nämlich daß die Existenz von $x^\#$ für ein $x \in \omega^\omega$ die Determiniertheit der $\Pi^1_1(x)$-Mengen impliziert. Somit ist $\mathrm{Det}\,(\,\mathbf{\Pi}^1_1\,)$ auch unter der Voraussetzung, daß $x^\#$ für alle $x \in \omega^\omega$ existiert, beweisbar. Diese Voraussetzung folgt nach 5.24 aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl.
Interessant am zweiten Resultat ist, daß die Umkehrung gilt. Dies bewies Leo Harrington 1978.

7.1 Die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl impliziert Det($\mathbf{\Pi}^1_1$)

Satz 7.1 (Martin, 1970) [ZSF + AC]
Angenommen es existiert eine meßbare Kardinalzahl.
Dann gilt $\mathrm{Det}\,(\,\mathbf{\Pi}^1_1\,)$.

Beweisidee: Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und $A \subseteq \omega^\omega$ eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge. Um die Determiniertheit des Spiels $G(A)$ zu beweisen, definieren wir zuerst ein Hilfsspiel G^*, dessen Determiniertheit sehr leicht zu sehen ist und Übertragen dann die Gewinnstrategien.
Wie schon bei der Borel–Determiniertheit, so besitzt auch hier das Hilfsspiel eine kompliziertere Struktur, und genau diese Zusatzinformationen bewirken, daß

in jeder Partie ein endlicher Zeitpunkt erreicht wird, so daß die Menge der ab da noch möglichen Partien offen oder abgeschlossen, also determiniert ist. Das Übertragen von Partien in G^* auf Partien in $G(A)$ geschieht wieder durch Weglassen der Zusatzinformation, während das übertragen der Gewinnstrategien die Hauptarbeit sein wird.

Eine Partie von G^* hat die Gestalt, daß beide Spieler abwechselnd Elemente $x(i) \in \omega$ $(i \in \omega)$ spielen, und Spieler I zusätzlich Elemente $g(i) \in \kappa$ spielt. Die Folge $x \in \omega^\omega$ induziert nach Definition 6.9 eine lineare Ordnung $<_x$ auf ω.

Spieler I gewinnt nun die Partie genau dann, wenn $g \in \kappa^\omega$ eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle \omega, <_x \rangle$ nach $\langle \kappa, \in \rangle$ ist. Dann muß x ein Element von A sein.

Das Übertragen der Gewinnstrategie für Spieler I geschieht einfach durch Weglassen der Elemente von κ.

Bei Spieler II ist die Situation komplizierter. Wenn er eine Gewinnstrategie τ^* im Hilfsspiel G^* hat, so hängen deren Antworten nicht nur von den Elementen von ω sondern auch von den Elementen von κ ab, die I zusätzlich in G^* spielt.

Hier wird nun die Meßbarkeit von κ benutzt, indem wir mit Hilfe des normalen Ultrafilters aus κ für alle $x \in A$ eine überabzählbare Teilmenge H von κ mit folgender Eigenschaft konstruieren:

τ^* reagiert auf alle ordnungserhaltenden Injektionen g von $\langle \omega, <_x \rangle$ nach $\langle H, \in \rangle$ gleich. D.h. wenn Spieler I die $x(2i)$ spielt und Spieler II gemäß τ^* mit den $x(2i+1)$ $(i \in \omega)$ antwortet, so sind dessen Züge unabhängig von den von I gespielten $g(i) \in \kappa$, falls g eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle \omega, <_x \rangle$ nach $\langle H, \in \rangle$ ist.

Wenn diese Menge H gefunden ist, kann man für Partien $x \in A$ die Strategie τ für II für das Spiel $G(A)$ so definieren, daß sie ebenso reagiert wie τ^* in der entsprechenden Partie in G^*, in der Spieler I zusätzlich ein ordnungserhaltendes $g \in H^\omega$ spielt.

Wenn nun II in $G(A)$ gemäß τ spielt und verliert, dann liegt die resultierende Partie x in A. Doch dabei hat τ wie τ^* in einer Partie in G^* reagiert, in der für die resultierende Folge $\langle x, g \rangle$ gilt, daß g eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle \omega, <_x \rangle$ nach $\langle H, \in \rangle$ ist. Dies bedeutet, daß Spieler II verliert, obwohl er nach seiner Gewinnstrategie τ^* gespielt hat.

Somit muß auch τ eine Gewinnstrategie sein.

Beweis: Sei κ eine meßbare Kardinalzahl.
Sei $A \subseteq \omega^\omega$ eine $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge. Wir zeigen, daß das Spiel $G(A)$ determiniert ist.
Wie in Kapitel 6 gezeigt wurde (vgl. 6.11), existiert ein Baum B auf $\omega \times \omega$, so daß für alle $x \in \omega^\omega$ gilt:

$$x \in A \iff \langle B_x, <_{\mathrm{KB}} \rangle \text{ wohlgeordnet.}$$

Sei nun

$$B^* := \{\langle s,u\rangle \in \omega^{<\omega} \times \kappa^{<\omega};\ \ |s| = |u|\ \ \&\ \ \forall\, i,j < |s|\ \ (u(i) \in u(j) \Leftrightarrow i <_s j)\}\,,$$

B^* ist ein Baum auf $\omega \times \kappa$[1]. Denn nach Proposition 6.13 gilt für $\langle s,u\rangle \in B^*$ und $m \leq |s|$:

$$i <_{s\restriction m} j \ \Leftrightarrow i <_s j \ \Leftrightarrow\ u(i) \in u(j)$$

für alle $i,j < m$.
Für $\langle s,u\rangle \in \omega^{<\omega} \times \kappa^{<\omega}$ mit $|s| = |u|$ gilt also genau dann $\langle s,u\rangle \in B^*$, wenn u eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle |s|, <_s\rangle$ nach $\langle \kappa, \in\rangle$ ist.
Mit Hilfe von B^* können wir eine neue Charakterisierung der Elemente von A angeben: Sei $x \in \omega^\omega$. Dann gilt:

$$x \in A \iff \exists\, g \in \kappa^\omega\ \ (\langle x,g\rangle \in [B^*])\,. \qquad (\star)$$

Beweis von $(\star)$: Da κ überabzählbar und nach Proposition 6.13 $<_x = \bigcup\limits_{m\in\omega} <_{x\restriction m}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
x \in A &\Leftrightarrow \langle \omega, <_x\rangle \text{ wohlgeordnet}\\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert eine ordnungserhaltende Injektion } g : \langle \omega, <_x\rangle \to \langle \kappa, \in\rangle\\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert } g : \omega \to \kappa \text{ , so daß für alle } m \in \omega \text{ die Abbildung } g\restriction m\\
&\qquad \text{eine ordnungserhaltende Injektion von } \langle m, <_{x\restriction m}\rangle \text{ nach } \langle \kappa, \in\rangle \text{ ist}\\
&\Leftrightarrow \exists\, g \in \kappa^\omega\ \forall\, m \in \omega\ \ \langle x\restriction m, g\restriction m\rangle \in B^*\\
&\Leftrightarrow \exists\, g \in \kappa^\omega :\ \langle x,g\rangle \in [B^*].
\end{aligned}$$

Um die Determiniertheit von $G(A)$ zu beweisen, werden wir nun ein Hilfsspiel $G(\,[B^*]\,)$ angeben und zeigen, daß dieses determiniert ist. Anschließend beweisen wir, daß man die Determiniertheit von $G(\,[B^*]\,)$ auf $G(A)$ übertragen kann.

[1]Der Baum B^* wird auch *Martin–Solovay–Baum* genannt.

Das Spiel $G(\,[B^*]\,)$ sei wie folgt definiert:
Spieler I und II spielen nacheinander natürliche Zahlen $x(i)$, und I spielt zusätzlich Elemente $g(i)$ von κ $(i \in \omega)$.

I	$\langle\, x(0), g(0)\,\rangle$		$\langle\, x(2), g(1)\,\rangle$		$\langle\, x(4), g(2)\,\rangle$	$\ldots$	
II		$x(1)$		$x(3)$		$x(5)$	$\ldots$

I gewinnt, falls $\langle x, g\rangle \in [B^*]$ gilt, ansonsten gewinnt II.
I und II konstruieren also gemeinsam eine Folge $x \in \omega^\omega$ und Spieler I zusätzlich eine Funktion $g:\ \omega \to \kappa$:
Die Bedingung $\langle x, g\rangle \in [B^*]$ bedeutet, daß g eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle \omega, <_x\rangle$ in $\langle \kappa, \in\rangle$ ist, und daraus folgt nach $(\star)$: $x \in A$.

Die Determiniertheit von $G(\,[B^*]\,)$ zeigen wir mit einem ähnlichen Endlichkeitsargument, wie im Beweis, daß offene Mengen determiniert sind.
Wir zeigen: Wenn Spieler II keine Gewinnstrategie in $G(\,[B^*]\,)$ besitzt, dann hat Spieler I eine.

<u>Beh. 1:</u> Wenn Spieler I in $G(\,[B^*]\,)$ verliert, so steht dies bereits zu einem endlichen Zeitpunkt fest.
Beweis: Wenn Spieler I in $G(\,[B^*]\,)$ verliert, so ist $\langle x, g\rangle \notin [B^*]$. Das heißt, es existiert ein $m \in \omega$ mit $\langle x{\restriction}m, g{\restriction}m\rangle \notin B^*$. Dann ist $g{\restriction}m$ keine ordnungserhaltende Injektion von $\langle m, <_{x\restriction m}\rangle$ nach $\langle \kappa, \in\rangle$.
Somit steht bereits nach dem $(2m)$-ten Zug also zu einem endlichen Zeitpunkt fest, daß Spieler I verliert.

Wir betrachten nun das Teilspiel von $G(\,[B^*]\,)\,/\,s$ für

$$s \;=\; \big\langle\, \langle\, x(0), g(0)\,\rangle,\ x(1),\ \langle\, x(2), g(1)\,\rangle,\ x(3),\ \ldots\ ,\ \langle\, x(2n), g(n)\,\rangle\,\big\rangle$$

mit $n \in \omega$.
In diesem Spiel beginnt Spieler II, und beide Spieler ziehen wie in $G(\,[B^*]\,)$. Falls für die resultierende Partie $\langle y, h\rangle \in \omega^\omega \times \kappa^\omega$ gilt, daß $s\hat{}\langle y, h\rangle \in [B^*]$ ist, so gewinnt I; ansonsten gewinnt II.

<u>Beh. 2:</u> Wenn Spieler II in $G(\,[B^*]\,)\,/\,s$ keine Gewinnstrategie hat, dann existiert für alle $i \in \omega$ ein Paar $\langle\, j, \gamma\,\rangle \in \omega \times \kappa$, so daß II auch im Spiel $G(\,[B^*]\,)\,/\,s'$ mit $s' = s\hat{}\langle\, i,\ \langle\, j, \gamma\,\rangle\,\rangle$ keine Gewinnstrategie hat.
Beweis: Angenommen es existieren $i \in \omega$, so daß für alle $j \in \omega$ und für alle $\gamma \in \kappa$ gilt: II hat eine Gewinnstrategie $\tau^*_{s'}$ im Spiel $G(\,[B^*]\,)\,/\,s'$.

Dann ist aber „Spiele i und dann gemäß $\tau^*_{s'}$ “ eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G([B^*])\,/\,s$. Widerspruch!

<u>Beh. 3:</u> Wenn Spieler II in $G([B^*])$ keine Gewinnstrategie besitzt, dann hat I eine.

Beweis: Angenommen Spieler II habe keine Gewinnstrategie in $G([B^*])$. Wir definieren mit Hilfe von Behauptung 2 rekursiv eine Strategie σ für Spieler I.
Da II keine Gewinnstrategie in $G([B^*])$ hat, existiert aufgrund derselben Argumentation wie im Beweis von Beh. 2 ein Paar $\langle x(0), g(0)\rangle \in \omega \times \kappa$, so daß II im Spiel $G([B^*])\,/\,\langle x(0), g(0)\rangle$ keine Gewinnstrategie besitzt.
Sei das Paar $\langle x(0), g(0)\rangle \in \omega \times \kappa$ minimal (bzgl. der lexikographischen Ordnung auf $\omega \times \kappa$) mit obiger Eigenschaft gewählt.
Sei $\sigma(\varnothing) := \langle x(0), g(0)\rangle$.
Sei nun
$s = \big\langle \langle x(0), g(0)\rangle, x(1), \langle x(2), g(1)\rangle, x(3), \ldots, \langle x(2n-2), g(n-1)\rangle, x(2n-1) \big\rangle$
für $n \geq 1$.
Wir möchten $\sigma(s)$ definieren. Wenn Spieler II im Spiel
$G([B^*])\,/\big\langle \langle x(0), g(0)\rangle, x(1), \langle x(2), g(1)\rangle, x(3), \ldots, \langle x(2n-2), g(n-1)\rangle \big\rangle$
keine Gewinnstrategie besitzt, so existiert nach Beh. 2 für den Zug $x(2n-1)$ von II ein Paar $\langle x(2n), g(n)\rangle \in \omega \times \kappa$, so daß II im Spiel $G([B^*])\,/s\hat{\ }\langle x(2n), g(n)\rangle$ auch keine Gewinnstrategie besitzt.
Sei $\langle x(2n), g(n)\rangle$ mit obiger Eigenschaft minimal in $\omega \times \kappa$ gewählt. Setze

$$\sigma(s) := \langle x(2n), g(n)\rangle.$$

Wenn II im Spiel
$G([B^*])\,/\big\langle \langle x(0), g(0)\rangle, x(1), \langle x(2), g(1)\rangle, x(3), \ldots, \langle x(2n-2), g(n-1)\rangle \big\rangle$
eine Gewinnstrategie besitzt, so setze $\sigma(s) := \langle 0, 0\rangle$.

Wir zeigen nun, daß σ eine Gewinnstrategie für I ist.
Angenommen I spielt gemäß σ und verliert. Dann steht das mit Behauptung 1 bereits zu einem endlichen Zeitpunkt fest, d.h. es existiert ein $m \in \omega$, so daß I bereits im m-ten Zug verloren hat. Dann hatte aber Spieler II ab diesem (endlichen) Zeitpunkt eine Gewinnstrategie, im Widerspruch zur Definition von σ!

Also ist $G([B^*])$ determiniert.

Nun werden wir die Determiniertheit von $G([B^*])$ auf $G(A)$ übertragen.
Beh. 4: Wenn Spieler I eine Gewinnstrategie in $G([B^*])$ hat, dann besitzt I auch eine Gewinnstrategie in $G(A)$.
Beweis: Sei σ^* eine Gewinnstrategie für Spieler I im Spiel $G([B^*])$. Wir definieren nun mit Hilfe von σ^* eine Strategie σ für Spieler I im Spiel $G(A)$. Dazu simulieren wir zu jeder Partie in $G(A)$ eine in $G([B^*])$, indem wir die Züge von II in $G(A)$ übernehmen. Spieler I spielt dann jeweils die $x(i)$, die ihm σ^* angibt und läßt die Elemente von κ einfach weg.
Sei also

$$\sigma(\varnothing) := x(0), \quad \text{falls } \sigma^*(\varnothing) = \langle x(0), g(0)\rangle.$$

und

$$\sigma\big(\langle x(0), \ldots, x(2n-1)\rangle\big) := x(2n),$$

falls $\sigma^*\big(\big\langle \langle x(0), g(0)\rangle, x(1), \ldots, x(2n-1)\big\rangle\big) = \langle x(2n), g(n)\rangle \quad (\forall n \in \omega)$.
Sei nun $x \in \omega^\omega$ eine Partie von $G(A)$, in der Spieler I gemäß σ gespielt hat. Dann existiert dazu eine Partie $\big\langle \langle x(0), g(0)\rangle, x(1), \langle x(2), g(1)\rangle, \ldots \big\rangle$ im Spiel $G([B^*])$, in der I gemäß σ^* spielte.
Da σ^* eine Gewinnstrategie ist, folgt $\langle x, g\rangle \in [B^*]$, also mit $(\star)$: $x \in A$.
Somit ist σ eine Gewinnstrategie im Spiel $G(A)$.

Sei nun τ^* eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G([B^*])$.
Für $n \in \omega$, $s \in \omega^{2n+1}$ und $u \in \kappa^{n+1}$ benutzen wir folgende Notation:

$$\tau^*(s, u) = \tau^*\big(\big\langle\langle s(0), u(0)\rangle, s(1), \ldots, \langle s(2n), u(n)\rangle\big\rangle\big).$$

Wir werden aus τ^* eine Gewinnstrategie τ für II in $G(A)$ konstruieren. Dabei besteht das Problem, daß, um eine Partie in $G([B^*])$ zu simulieren, nicht einfach die Züge von I einer entsprechenden Partie in $G(A)$ übertragen werden können, weil auch noch ein $g \in \kappa^\omega$ gespielt werden muß.
Wenn Spieler II eine Partie x von $G(A)$ verliert, so liegt die Folge x in der Menge A.
Wir wollen eine Strategie τ für II in $G(A)$ so definieren, daß zu jedem $x \in A$ ein $g \in \kappa^\omega$ mit folgender Eigenschaft existiert:
$\langle x, g\rangle \in [B^*]$ und wenn II gemäß τ in $G(A)$ spielt und verliert, dann reagiert τ genauso wie τ^*, wenn I in $G([B^*])$ die Folge $\big\langle\langle x(0), g(0)\rangle, \langle x(2), g(1)\rangle, \ldots\big\rangle$ spielt, was bedeutet, daß II auch in $G([B^*])$ verliert.

Wir zerlegen zunächst für ein $s \in \omega^{<\omega}$ die Menge der Folgen aus $\kappa^{|s|}$, die Spieler I bis zum $|s|$-ten Zug spielen kann. Dabei betrachten wir zwei Elemente u, u' dieser Menge als äquivalent, wenn die Reaktion von τ^* auf beide gleich ist, d.h. wenn gilt: $\tau^*(s, u) = \tau^*(s, u')$.
Mit Hilfe des normalen Ultrafilters auf κ und dieser Zerlegung definieren wir dann die Strategie τ.

Zu $s \in \omega^{<\omega}$ definieren wir

$$\begin{aligned} E_s &:= \{u \in \kappa^{<\omega};\ \langle\, s, u\,\rangle \in B^*\} \\ &= \big\{u \in \kappa^{|s|};\ \forall\, i, j < |s|\ (\, u(i) \in u(j)\ \Leftrightarrow\ i <_s j\,)\big\}\,. \end{aligned}$$

E_s besteht also aus den ordnungserhaltenden Injektionen von $\langle |s|, <_s\rangle$ nach $\langle \kappa, \in\rangle$. Wenn in den bisherigen Zügen Spieler I und II die Folge s konstruiert haben, so sind die Elemente von E_s gerade diejenigen $u \in \kappa^{|s|}$, die Spieler I in einer Partie in $G(\,[B^*]\,)$ bis zum $|2s-1|$-ten Zug gespielt haben muß, um noch gewinnen zu können.
Da jedes $u \in E_s$ eine ordnungserhaltende injektive Abbildung darstellt, ist ihr Bild Im(u) eine $|s|$-elementige Teilmenge von κ: Im(u) $\in \mathcal{P}_{|\mathrm{s}|}(\kappa)$.
Umgekehrt existiert für jedes $S \in \mathcal{P}_{|s|}(\kappa)$ genau eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle |s|, <_s\rangle$ nach $\langle \kappa, \in\rangle$, d.h. genau ein $u \in E_s$ mit Im(u) $=$ S.
Folglich ist $f : E_s \longrightarrow \mathcal{P}_{|s|}(\kappa)\ :\ u \mapsto \mathrm{Im(u)}$ eine Bijekiton.

Da κ eine meßbare Kardinalzahl ist und wir das Auswahlaxiom und somit insbesondere DC zur Verfügung haben, existiert nach Korollar 5.13 ein normaler, κ-vollständiger, freier Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ.
Mit Hilfe der Bijektion f konstruieren wir nun zu $s \in \omega^{<\omega} - \{\varnothing\}$ einen Ultrafilter $\mathcal{U}_s$ auf E_s durch:

$$X \in \mathcal{U}_s \iff X\ \subseteq\ E_s\ \ \&\ \ \exists\, H \in \mathcal{U}\ \big(\mathcal{P}_{|s|}(H)\ \subseteq\ f[X]\big)\,.$$

$\mathcal{U}_s$ besteht also genau aus den Teilmengen $X \subseteq E_s$, deren Bilder unter f alle $|s|$-elementigen Teilmengen einer Menge $H \subseteq \kappa$, welche im Filter $\mathcal{U}$ liegt, enthalten.

<u>Beh. 5:</u> $\mathcal{U}_s$ ist ein freier, κ-vollständiger Ultrafilter auf E_s.
Beweis:

- $E_s \in \mathcal{U}_s$, da $\mathcal{P}_{|s|}(\kappa)\ =\ f[E_s]$ und $\kappa \in \mathcal{U}$.

- $\varnothing \notin \mathcal{U}_s$, denn angenommen nicht, dann existiert ein $H \in \mathcal{U}$ mit $\mathcal{P}_{|s|}(H) \subseteq f[\varnothing] = \varnothing$. Dies ist ein Widerspruch, da nach Proposition 5.8 für alle $H \in \mathcal{U}$ gilt: $|H| = \kappa$, und weil $s \neq \varnothing$ ist, existieren $|s|$-elementige Teilmengen von H!

- Seien $X, Y \in \mathcal{U}_s$. Es folgt $X, Y \subseteq E_s$ & $\exists\, H_1, H_2 \in \mathcal{U}$:
  $\mathcal{P}_{|s|}(H_1) \subseteq f[X], \quad \mathcal{P}_{|s|}(H_2) \subseteq f[Y]$.
  Es ist $X \cap Y \subseteq E_s$ und $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{U}$. Weil f bijektiv ist, folgt:
  $\mathcal{P}_{|s|}(H_1 \cap H_2) = \mathcal{P}_{|s|}(H_1) \cap \mathcal{P}_{|s|}(H_2) \subseteq f[X] \cap f[Y] = f[X \cap Y]$
  $\Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{U}_s$.

- Sei $X \in \mathcal{U}_s$ und $X \subseteq Y \subseteq E_s$. Es gilt:
  $\exists\, H \in \mathcal{U} : \mathcal{P}_{|s|}(H) \subseteq f[X] \subseteq f[Y]$, also folgt $Y \in \mathcal{U}_s$.

- $\mathcal{U}_s$ ist Ultrafilter: Sei $X \subseteq E_s$.
  Wir betrachten die Partition $\mathcal{P}_{|s|}(\kappa) = f[X] \,\dot\cup\, \left(\mathcal{P}_{|s|}(\kappa) - f[X]\right)$.

  Da $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter ist, existiert nach Satz 5.14 eine für diese Partition homogene Menge $H \in \mathcal{U}$. Denn es folgt entweder $\mathcal{P}_{|s|}(H) \subseteq f[X]$un somit $X \in \mathcal{U}_s$ oder $\mathcal{P}_{|s|}(H) \subseteq \mathcal{P}_{|s|}(\kappa) - f[X] = f[E_s - X]$, also $E_s - X \in \mathcal{U}_s$.

- $\mathcal{U}_s$ ist κ-vollständig:
  Sei $\{X_\alpha;\ \alpha \in \gamma\} \subseteq \mathcal{U}_s$ für ein $\gamma \in \kappa$.
  Zu jedem $\alpha \in \gamma$ existiert (mit AC) ein $H_\alpha \in \mathcal{U}$ mit $\mathcal{P}_{|s|}(H_\alpha) \subseteq f[X_\alpha]$. Damit ist $\bigcap_{\alpha\in\gamma} X_\alpha \subseteq E_s$ und wegen der $\kappa-$Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ gilt: $\bigcap_{\alpha\in\gamma} H_\alpha \in \mathcal{U}$.
  Ferner ist $\mathcal{P}_{|s|}\left(\bigcap_{\alpha\in\gamma} H_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\gamma} \mathcal{P}_{|s|}(H_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\gamma} f[X_\alpha] = f\left[\bigcap_{\alpha\in\gamma} X_\alpha\right]$.
  Also ist $\bigcap_{\alpha\in\gamma} X_\alpha \in \mathcal{U}_s$.

  Bemerkung: Dies ist die einzige Stelle im Beweis, wo das Auswahlaxiom benötigt wird.

- $\mathcal{U}_s$ ist frei:

  Da $\mathcal{U}$ ein freier Filter ist, gilt: $\bigcap_{H\in\mathcal{U}} H = \varnothing$.

  Für jedes $H \in \mathcal{U}$ ist $f^{-1}\left[\mathcal{P}_{|s|}(H)\right] \in \mathcal{U}_s$, denn $\mathcal{P}_{|s|}(H) = f\left[f^{-1}\left[\mathcal{P}_{|s|}(H)\right]\right]$.
  Es folgt:

$$\bigcap_{Z \in \mathcal{U}_s} Z \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{U}} f^{-1}\big[\mathcal{P}_{|s|}(H)\big] = f^{-1}\Bigg[\bigcap_{H \in \mathcal{U}} \mathcal{P}_{|s|}(H)\Bigg] = f^{-1}\Bigg[\mathcal{P}_{|s|}\Bigg(\bigcap_{H \in \mathcal{U}} H\Bigg)\Bigg]$$
$$= f^{-1}\big[\mathcal{P}_{|s|}(\varnothing)\big] = \varnothing, \quad \text{denn es ist } |s| > 0.$$

Die $E_s,\ s \in \omega^{<\omega}$, bestehen aus endlichen Anfangsstücken der möglichen $g \in \kappa^\omega$, die nach $(\star)$ für Folgen aus A existieren, d.h. aus den Elementen von $\kappa^{|s|}$, die Spieler I spielen muß, um gewinnen zu können, sofern die von den Spielern bisher konstruierte Folge natürlicher Zahlen mit s beginnt. Nun werden wir die E_s jeweils mit Hilfe der Gewinnstrategie τ^* in Teilmengen zerlegen, wobei wir zwei Elemente als äquivalent betrachten, wenn die Reaktion von τ^* auf beide gleich ist.

Dabei ist für $n \in \omega,\ s \in \omega^{2n+1}$ und $u \in \kappa^{n+1}$

$$\tau^*(\,s, u\,) \;=\; \tau^*\big(\,\big\langle\langle\, s(0), u(0)\,\rangle, s(1), \ldots, \langle\, s(2n), u(n)\,\rangle\big\rangle\,\big).$$

Für $s \in \omega^{2n+1},\ n, k \in \omega$ sei

$$Z_{s,k} \;=\; \big\{\, u \,\in\, E_{s\restriction(n+1)}\,;\;\; \tau^*(s,u) = k \,\big\}\,.$$

Dann ist $E_{s\restriction(n+1)} = \dot{\bigcup\limits_{k\in\omega}} Z_{s,k}$, d.h. für festes s bilden die $Z_{s,k}$ eine Partition von $E_{s\restriction(n+1)}$. Wir zeigen nun, daß für jede dieser Partitionen genau eine der beteiligten Mengen im zugehörigen Ultrafilter liegt.

<u>Beh. 6:</u> Für jedes $n \in \omega$ und jedes $s \in \omega^{2n+1}$ existiert genau ein $k \in \omega$ mit $Z_{s,k} \in \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$.
Beweis: Zunächst zeigen wir, daß es ein solches k gibt. Angenommen es existiert ein $n \in \omega$ und ein $s \in \omega^{2n+1}$, so daß für alle $k \in \omega$ gilt:

$$Z_{s,k} \notin \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)},$$

dann folgt, weil $\mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$ ein Ultrafilter auf $E_{s\restriction(n+1)}$ ist:

$$\forall\, k \in \omega: \;\; E_{s\restriction(n+1)} \;-\; Z_{s,k} \;\in\; \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$$

und wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$ folgt

$$\varnothing \;=\; E_{s\restriction(n+1)} \;-\; \bigcup_{k\in\omega} Z_{s,k} \;=\; \bigcap_{k\in\omega} \big(E_{s\restriction(n+1)} \;-\; Z_{s,k}\big) \;\in\; \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}.$$

Widerspruch!

Es ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $k \in \omega$ mit $Z_{s,k} \in \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$. Angenommen, es existert ein $\ell \in \omega,\ \ell \neq k$ mit $Z_{s,\ell} \in \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$, dann gilt, da die $Z_{s,i}$ für $i \in \omega$ eine Partition von $E_{s\restriction(n+1)}$ bilden:
$\varnothing = Z_{s,k} \cap Z_{s,\ell} \in \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$ ein Filter ist.

Nun können wir die gewünschte Strategie τ für II im Spiel $G(A)$ angeben:
Mit Behauptung 6 ist die Abbildung, die jedem $s \in \omega^{2n+1}$ dasjenige k zuordnet, für das $Z_{s,k}$ im Filer $\mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}$ liegt, wohldefiniert.

Sei also

$$\tau \ : \ \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \longrightarrow \omega \ : \ s \mapsto k \ , \ \text{für } Z_{s,k} \in \mathcal{U}_{s\restriction(n+1)}.$$

Nun bleibt zu zeigen, daß τ eine Gewinnstrategie ist.
Wie bereits angekündigt zeigen wir, daß, falls Spieler II in $G(A)$ nach τ spielt und verliert, eine Folge g existiert, so daß, wenn Spieler I in der entsprechenden Partie in $G(\,[B^*]\,)$ dieselben Elemente aus ω wie in der Partie in $G(A)$ und zusätzlich dieses g spielt:

- τ wie τ^* reagiert, und
- II in $G(\,[B^*]\,)$ verliert.

Sei also x eine Partie in $G(A)$, in der II nach τ spielt und verliert. Dann liegt x in A.

<u>Beh. 7:</u> $\exists\, g \in \kappa^\omega \ : \langle\, x, g\,\rangle \in [B^*]$ und

$$\tau\big(x \restriction (2n+1)\big) \ = \ \tau^*\big(x \restriction (2n+1), g \restriction (n+1)\big) \quad \forall\, n \in \omega.$$

Beweis: Aus der Definition von τ folgt für alle $n \in \omega$, daß $\tau\big(x\restriction(2n+1)\big)$ dasjenige k ist, für das $Z_{x\restriction(2n+1),k} \in \mathcal{U}_{x\restriction(n+1)}$ ist. Also gilt:

$$Z_{x\restriction(2n+1),\tau(x\restriction(2n+1))} \in \ \mathcal{U}_{x\restriction(n+1)}.$$

Nach der Definition von $\mathcal{U}_{x\restriction(n+1)}$ existiert für jedes $n \in \omega$ ein $H_n \in \mathcal{U}$ mit:

$$\mathcal{P}_{|x\restriction(n+1)|}(H_n) \ \subseteq \ \mathcal{P}_{n+1}(H_n) \ \subseteq \ f\left[Z_{x\restriction(2n+1),\tau(x\restriction(2n+1))}\right]$$

[Wir benötigen hier AC_ω.]
Wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathcal{U}$ gilt:

$$H \ := \bigcap_{n\in\omega} H_n \ \in \mathcal{U}.$$

Damit ist $|H| = \kappa$ und $\langle H, \in\rangle$ eine Wohlordnung.
Aus $x \in A$ folgt wegen Bemerkung 6.11: $\langle \omega, <_x\rangle$ ist Wohlordnung.
Also existiert eine ordnungserhaltende Injektion $g : \langle\, \omega, <_x \rangle \longrightarrow \langle\, H, \in \rangle$.
Insgesamt folgt: $\exists\, g \in H^\omega \subseteq \kappa^\omega : \langle x, g\rangle \in [B^*]$ und somit ist $g \restriction (n+1) \in E_{x\restriction(n+1)} = \{u \in \kappa^{n+1};\ \langle x\restriction(n+1), u\rangle \in B^*\}$ für alle $n \in \omega$.

Die Anfangsstücke von g finden wir also unter den Elementen der entsprechenden $E_{x\restriction(n+1)}$ wieder $(n \in \omega)$. Diese hatten wir mit Hilfe der möglichen Antworten k gemäß τ^* in $Z_{x\restriction(2n+1),k}$ unterteilt.
Nun werden wir zeigen, daß jedes Anfangsstück $g \restriction (n+1)$ von g in dem $Z_{x\restriction(2n+1),k}$ liegt, das für die Antwort k gemäß τ^* festlegt: $k = \tau(x \restriction (2n+1))$.

Wegen $g\restriction(n+1) \in E_{x\restriction(n+1)}$ für alle $n \in \omega$ gilt:

$$f\big(g\restriction(n+1)\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{g}\restriction(\mathrm{n}+1)\big) \in \mathcal{P}_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{H}) = \mathcal{P}_{\mathrm{n}+1}\left(\bigcap_{\mathrm{k}\in\omega} \mathrm{H}_\mathrm{k}\right) \text{ und}$$

$$\mathcal{P}_{n+1}\left(\bigcap_{k\in\omega} H_k\right) = \bigcap_{k\in\omega} \mathcal{P}_{n+1}(H_k) \subseteq \mathcal{P}_{n+1}(H_n) \subseteq f\left[Z_{x\restriction(2n+1),\tau(x\restriction(2n+1))}\right].$$

Also ist $f\big(g\restriction(n+1)\big) \in f\left[Z_{x\restriction(2n+1),\tau(x\restriction(2n+1))}\right]$ und da f eine Bijektion ist, folgt:

$$g \restriction (n+1) \in Z_{x\restriction(2n+1),\tau(x\restriction(2n+1))} \qquad \forall n \in \omega\ .$$

und nach der Definition der $Z_{s,k}$ bedeutet das

$$\tau\big(\, x \restriction (2n+1)\big) = \tau^*\big(\, x \restriction (2n+1), g \restriction (n+1)\big) \quad \forall\, n \in \omega.$$

Damit gilt für diese Partie x, in der Spieler II gemäß τ spielt und verliert: Wenn Spieler I in einer Partie im Spiel $G([B^*])$ diese $x(2i)$ $(i \in \omega)$ und außerdem das hier gewählte $g \in \kappa^\omega$ spielt, so spielt II gemäß τ^* die $x(2i+1)$. Dann ist aber $\langle x, g\rangle \in [B^*]$, also gewinnt Spieler I, was im Widerspruch dazu steht, daß τ^* eine Gewinnstrategie für II in $G([B^*])$ ist!

$\square$

Bemerkung: In Martins Originalbeweis wird kein Ultrafilter auf einer meßbaren Kardinalzahl, sondern die Partitionsrelation $\kappa \longrightarrow (\omega_1)_2^{<\omega}$ verwendet. Diese folgt nach dem Satz 5.14 von Rowbottom aus der Annahme, daß κ meßbar ist, und stellt ihrerseits die Verbindung von meßbaren Kardinalzahlen zu den Sharps her. Den Beweis mit Hilfe der Ultrafilter $\mathcal{U}_s$ für $s \in \omega^{<\omega}$ zu formulieren hat den Vorteil, daß man so zeigen kann, daß der Baum B^* ein *κ-homogener Baum* ist. Für die Definition dieses Begriffes siehe Kanamori [11, § 32, S.450ff.].

Wir haben somit bewiesen, daß jede $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge die Projektion der unendlichen Zweige eines κ-homogenen Baumes ist. Solche Mengen heißen *κ-homogen Suslin.* Die Bedeutung dieses Begriffs liegt darin, daß jede Menge, die κ-homogen Suslin für eine überabzählbare Kardinalzahl κ ist, auch determiniert sein muß.
Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zum letzten Drittel des obigen Beweises von 7.1.
Es hat sich gezeigt, daß es oftmals einfacher ist, die Eigenschaft *homogen Suslin* (d.h. κ-homogen Suslin für eine überabzählbare Kardinalzahl κ) für eine Menge oder eine Klasse von Mengen nachzuweisen, als ihre Determiniertheit direkt zu zeigen.
Auf diesem Weg wurde auch das berühmte Resultat von Donald Martin und John Steel bewiesen, daß, wenn ω viele Woodin-Kardinalzahlen existieren, jede projektive Menge determiniert ist (vgl. Martin–Steel [25], [26]).

7.2 Die Existenz von $a^{\#}$ impliziert Det($\Pi^1_1(a)$)

Für den Beweis der Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen ist es entscheidend, daß man für ein Element x einer solchen Menge eine Menge H findet, so daß eine Gewinnstrategie τ^* für Spieler II im Hilfsspiel in allen Partien gleich reagiert, in denen Spieler I die $x(2i)$ ($i \in \omega$) und zusätzlich eine beliebige ordnungserhaltende Injektion $g \in H^\omega$ spielt.
Um ein solches H konstruieren zu können, reicht bereits eine schwächere Voraussetzung als die Existenz einer meßbaren Kardinalzahl aus, nämlich die Existenz von $a^{\#}$ für alle $a \in \omega^\omega$.
Dann kann man zu a eine überabzählbare Menge von Ununterscheidbaren für $\mathbf{L}[a]$ angeben. Gerade dies hat zur Folge, daß eine Gewinnstrategie τ^* für Spieler II im Hilfsspiel auf jede entsprechende Folge von Elementen dieser Menge von Ununterscheidbaren in obigem Sinn uniform reagiert.

Satz 7.2 (Martin) [ZSF + DC]
Sei $a \in \omega^\omega$. $a^{\#}$ existiert $\Longrightarrow$ Det($\Pi^1_1(a)$).

Beweis: (vgl. Kanamori [11, Theorem 31.2])
Sei $a \in \omega^\omega$ und es existiere $a^{\#}$. Sei $A \subseteq \omega^\omega$ eine $\Pi^1_1(a)$-Menge. Dann existiert

nach Kapitel 6 ein Baum B auf $\omega \times \omega$, der $\Delta_0^0(a)$ ist, mit der Eigenschaft

$$x \in A \iff B_x \text{ ist fundiert.}$$

Dann ist $B \subseteq \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$ durch eine $\Delta_0^0(a)$-Formel im Modell $\mathcal{A}^2(a)$ definiert und somit ist $B \in \mathbf{L}[a]$.

Für $x \in \omega^\omega$ und $s \in \omega^{<\omega}$ betrachten wir wieder die Bäume B_x und B_s sowie die linearen Ordnungen $<_x$ auf ω und $<_s$ auf $|s|$. Aus deren Definition in Kapitel 6 folgt, weil $B \in \mathbf{L}[a]$ ist, daß auch B_x und B_s und damit $x \in \omega^\omega$ und $s \in \omega^{<\omega}$ in $\mathbf{L}[a]$ liegen.

Wir definieren einen Baum B^* auf $\omega \times \omega_1^{\mathbf{V}}$, der ebenfalls ein Element von $\mathbf{L}[a]$ ist.

$$B^* := \left\{ \langle s, u \rangle \in \omega^{<\omega} \times \left(\omega_1^{\mathbf{V}}\right)^{<\omega} ;\ |s| = |u| \ \ \& \ \ \forall\, i, j < |s| \ (u(i) < u(j) \Leftrightarrow i <_s j) \right\}$$

$\langle s, u \rangle \in B^*$ gilt also genau dann, wenn u eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle |s|, <_s \rangle$ nach $\langle \omega_1, \in \rangle$ ist.

Wie in 7.1 folgt für $x \in \omega^\omega \cap \mathbf{L}[a]$:

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \langle\, \omega, <_x \rangle \text{ ist wohlgeordnet.} \\ &\iff \exists\, g \in {\omega_1}^{\omega} \cap \mathbf{L}[a] :\ \langle x, g \rangle \in [B^*] \cap \mathbf{L}[a]. \end{aligned}$$

Analog zu Satz 7.1 definieren wir das Spiel $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ in $\mathbf{L}[a]$. Beide Spieler spielen natürliche Zahlen $x(i)$ und I spielt zusätzlich Elemente $g(i)$ von ω_1 $(i \in \omega)$, wobei die Folgen x_{I} und x_{II} sowie g in $\mathbf{L}[a]$ liegen müssen.

Spieler I gewinnt, falls $\langle x, g \rangle \in [B^*] \cap \mathbf{L}[a]$ gilt, ansonsten gewinnt II.

Mit derselben Argumentation wie in Satz 7.1 folgt: $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ ist in $\mathbf{L}[a]$ determiniert, d.h. einer der Spieler hat eine Gewinnstrategie, die Element von $\mathbf{L}[a]$ ist.

Wir werden zeigen, daß daraus die Determiniertheit von $G(A)$ in $\mathbf{V}$ folgt.

<u>Beh. 1:</u> Wenn Spieler I in $\mathbf{L}[a]$ eine Gewinnstrategie σ^* im Spiel $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ besitzt, dann besitzt I auch eine Gewinnstrategie in $G(A)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß σ^* auch eine Gewinnstrategie für I im Spiel $G(\,[B^*]\,)$ in $\mathbf{V}$ ist. Dann folgt, indem I in $G(A)$ die $x(i)$ spielt, die σ^* vorgibt und die $g(i)$ für sich behält, wie im Beweis von Satz 7.1 die Behauptung.

Angenommen, I spielt in $\mathbf{V}$ gemäß σ^* und verliert, dann steht dies, wie in Beh.1 im Beweis von Satz 7.1 gezeigt, bereits zu einem endlichen Zeitpunkt fest. Die bis dahin gespielte endliche Folge liegt in $\mathbf{L}[a]$, d.h. es gibt eine Partie in $\mathbf{L}[a]$, die mit dieser Folge beginnt und in der I nach σ^* spielt und verliert.Widerspruch!

Wir konstruieren nun aus einer Gewinnstrategie von II in $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ eine für II in $G(A)$. Wie schon für Spieler I muß die Gewinnstrategie für II in $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ zuerst auf $G(\,[B^*]\,)$ übertragen werden. Um mit Hilfe dieser Strategie dann eine in $G(A)$ zu definieren, wird wie schon im Beweis von 7.1 die über ZSF + AC hinausgehende Voraussetzung benutzt.

Beh. 2: Wenn Spieler II in $\mathbf{L}[a]$ eine Gewinnstrategie τ^* im Spiel $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$ besitzt, dann ist τ^* auch in $\mathbf{V}$ im Spiel $G(\,[B^*]\,)$ eine.
Beweis: Sei P_{τ^*} die Menge aller Anfangsstücke von Partien von $G(\,[B^*]\,)$ in $\mathbf{V}$, in denen II nach τ^* spielt und noch nicht sicher gewonnen hat, d.h. derjenigen endlichen Folgen, die zu einer Partie verlängerbar sind, die I gewinnt.
Wir zeigen: $\langle P_{\tau^*}, \supset\rangle$ ist (in $\mathbf{V}$) fundiert. Damit ist dann τ^* eine Gewinnstrategie im Spiel $G(\,[B^*]\,)$. Denn angenommen es existiert eine Partie, in der II gemäß τ^* spielt und verliert, so liegen deren sämtliche endlichen Anfangsabschnitte in P_{τ^*} und bilden eine bezüglich $\supset$ absteigende Kette unendlicher Länge; Widerspruch!
Weil P_{τ^*} nur aus endlichen Folgen besteht, liegt P_{τ^*} in $\mathbf{L}[a]$. Angenommen $\langle P_{\tau^*}, \supset\rangle$ ist in $\mathbf{L}[a]$ nicht fundiert. Dann existiert (mit DC) eine unendliche, bezüglich $\supset$ absteigende Kette in P_{τ^*} , und es gibt eine Partie von $G(\,[B^*]\,)^{\mathbf{L}[a]}$, in der Spieler II gemäß seiner Gewinnstrategie τ^* spielt und zu keinem endlichen Zeitpunkt sicher gewonnen hat. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß, wenn Spieler I eine Partie verliert, dies bereits zu einem endlichen Zeitpunkt feststeht!
Da die Eigenschaft „fundiert“ nach Proposition 1.9 absolut für $\in$-transitive Modelle von ZSF ist, ist $\langle P_{\tau^*}, \supset\rangle$ auch in $\mathbf{V}$ fundiert.

Mit Hilfe von τ^* und der Klasse der Ununterscheidbaren für $\mathbf{L}[a]$ definieren wir nun eine Gewinnstrategie τ für II im Spiel $G(A)$:
Wegen der Existenz von $a^\#$ existiert die Klasse $\mathcal{I}_a$ der Ununterscheidbaren für $\mathbf{L}[a]$.
Da τ^* in $\mathbf{L}[a]$ liegt, ist τ^* in $\mathbf{L}[a]$ mit Hilfe von $\mathcal{I}_a$ definierbar.
D.h. es existiert eine Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_{m+p})$ und eine Folge $x_1 < \ldots < x_m < y_1 < \ldots < y_p$ $(m, p \in \omega)$ von Elementen von $\mathcal{I}_a$ mit $x_m < \omega_1 < y_1$ und

$$\mathbf{L}[a] \models \tau^* \text{ ist das einzige } u \text{ mit } \varphi[u, x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_p].$$

Wir definieren den Term t durch

$$t(v_1, \ldots, v_{m+p}) = \begin{cases} \text{das bezüglich } <_{\mathbf{L}[a]} \text{ kleinste } v_0 \text{ mit } \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_{m+p}), \\ \qquad\qquad \text{falls ein solches existiert} \\ \varnothing \qquad\qquad , \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $<_{\mathbf{L}[a]}$ die kanonische Wohlordnung von $\mathbf{L}[a]$.
Dann ist $\tau^* = t(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p)$.
Sei $H = \mathcal{I}_a \cap \big(\omega_1 - (x_m + 1)\big)$. Dann ist H eine Menge von Ununterscheidbaren aus $\mathcal{I}_a$ und $H \cap \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_p\} = \varnothing$.
Wegen $|\mathcal{I}_a \cap \omega_1| = \aleph_1$ (vgl. Satz 5.19) ist H eine überabzählbare Teilmenge von ω_1.

Wie bereits in der Definition der Ununterscheidbaren und dem Beweis von 5.17 angeklungen ist, besitzen Ununterscheidbare gewisse Homogenitätseigenschaften, die hier wie schon im Beweis von 7.1 zum Tragen kommen:
Die gesuchte Strategie τ wird so definiert, daß sie genauso reagiert wie τ^*, wenn I zusätzlich eine entsprechend geordnete Teilmenge von H spielt, und die Homogenität wird dabei die Wohldefiniertheit liefern.

Wir definieren $\tau : \bigcup\limits_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \longrightarrow \omega$ wie folgt:

$$\tau(s) = k \iff \exists\, u \in H^{n+1} \,\big(\, \langle s \restriction (n+1), u\rangle \in B^* \;\;\&\;\; \tau^*(s,u) = k \,\big),$$

wobei $\tau^*(s,u) := \tau^*\big(\, \langle s(0), u(0)\rangle, s(1), \ldots, \langle s(2n), u(n)\rangle \,\big)$.
Wir betrachten also nur diejenigen ordnungserhaltenden Injektionen von $\langle |s|, <_s \rangle$ nach $\langle \omega_1, \in \rangle$, deren Bild eine Teilmenge von H ist.

<u>Beh. 3:</u> τ ist wohldefiniert.
Beweis: Wir betrachten für $n \in \omega$, $s \in \omega^{2n+1}$ und $k \in \omega$ die folgende Formel ψ:

$$\begin{aligned} &\psi(v_1, \ldots, v_m,\, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n+1},\, v_{m+n+2}, \ldots, v_{m+n+p+1}) \\ &\qquad \longleftrightarrow \;\big\langle\, \big\langle\, \langle\, s(0), v_{m+1}\,\rangle, s(1), \ldots, \langle\, s(2n), v_{m+n+1}\,\rangle \,\big\rangle, k \,\big\rangle \\ &\qquad\qquad \in \; t(v_1, \ldots, v_m,\, v_{m+n+2}, \ldots, v_{m+n+p+1}). \end{aligned}$$

Sei nun $u \in H^{n+1}$ eine ordnungserhaltende Injektion von $\langle n+1, <_{s\restriction(n+1)}\rangle$ nach $\langle H, \in\rangle$. Wir ordnen die $u(i)$ für $i \in n+1$ der Größe nach. So entsteht eine strikt aufsteigende Folge $\langle u_0, u_1, \ldots, u_n\rangle$, wobei
$u_0 := \min\{u(j);\; j < n+1\}$ und
$u_i := \min\big\{u(j);\; j < n+1 \;\;\&\;\; u(j) \notin \{u_0, \ldots, u_{i-1}\}\big\}$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann gilt mit $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p \in \mathcal{I}_a$ wie oben:

$\psi(\, x_1, \dots, x_m,\, u_0, \dots, u_n,\, y_1, \dots, y_p\,)$

$\iff \Big\langle \langle\langle s(0), u(0)\rangle, s(1), \dots, \langle s(2n), u(n)\rangle\rangle, k \Big\rangle \in \tau^* \iff \tau^*(s,u) = k.$

Wegen der Ununterscheidbarkeit der Elemente von H folgt für beliebige $u' \in H^{n+1}$ mit $u'_0 < \dots < u'_n$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}[a] \models \psi(\, x_1, \dots, x_m,\, u_0, \dots, u_n,\, y_1, \dots, y_p\,) \\ \iff & \mathbf{L}[a] \models \psi(\, x_1, \dots, x_m,\, u'_0, \dots, u'_n,\, y_1, \dots, y_p,\,) \end{aligned}$$

und somit $\big(\mathbf{L}[a] \models \tau^*(s,u) = k\big) \iff \big(\mathbf{L}[a] \models \tau^*(s,u') = k\big)$.

Sei $s \in \omega^{2n+1}$.

Dann ist $<_{s\restriction(n+1)}$ eine Wohlordnung auf $n+1$. Also existiert eine ordnungserhaltende Injektion u von $\langle n+1, <_{s\restriction(n+1)}\rangle$ nach $\langle H, \in\rangle$; d.h. $\langle s\restriction(n+1), u\rangle \in B^*$.

Sei nun $u' \in H^{n+1}$ mit $\langle s\restriction(n+1), u'\rangle \in B^*$ gegeben. Dann folgt aus obiger Argumentation: $\tau^*(s,u') = \tau^*(s,u)$.

Damit ist τ wohldefiniert.

<u>Beh. 4:</u> τ ist eine Gewinnstrategie für II im Spiel $G(A)$.

Beweis: Angenommen nicht, dann existiert eine Partie in $G(A)$, in der Spieler II gemäß τ spielt und die resultierende Folge x in A liegt.

Damit ist $\langle \omega, <_x\rangle$ eine Wohlordnung. Da H überabzählbar ist, gibt es eine ordnungserhaltende Injektion $g:\ \langle \omega, <_x\rangle \longrightarrow \langle H, \in\rangle$.

Für alle $n \in \omega$ gilt: $g \restriction (n+1) \in H^{n+1}$ und $\langle x \restriction (n+1), g \restriction (n+1)\rangle \in B^*$.

Folglich gilt nach der Definition von τ:

$$\tau^*\big(x \restriction (2n+1), g \restriction (n+1)\big) \;=\; \tau\big(x \restriction (2n+1)\big) \quad \forall n \in \omega.$$

Also gibt es eine Partie in $G(\,[B^*]\,)$, in der Spieler II nach τ^* spielt und das Ergebnis $\langle x, g\rangle$ in $[B^*]$ liegt. Doch dann hätte II verloren, was im Widerspruch dazu steht, daß τ^* eine Gewinnstrategie für $G(\,[B^*]\,)$ ist!

$\square$

An diesem Satz ist bemerkenswert, daß auch die Umkehrung gilt. Leo Harrington hat 1978 bewiesen, daß die Determiniertheit von $\Pi^1_1(a)$-Mengen für ein $a \in \omega^\omega$ die Existenz von $a^\#$ impliziert (vgl. [8]).

Damit erhalten wir:

Satz 7.3 (Martin, 1970; Harrington, 1978) [ZSF+AC]
Sei $a \in \omega^\omega$. Dann gilt:

$$a^\# \textit{ existiert} \iff \mathrm{Det}\,(\,\Pi_1^1(a)\,).$$

Das bedeutet, daß es eine zur Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}_1^1$-Mengen äquivalente Aussage gibt, die sich in die Hierarchie der Axiome über große Kardinalzahlen einfügen läßt und von ihrem Ursprung her absolut nichts mit der Determiniertheit von Mengen zu tun hat.
Damit ist auch $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1)$ in diese Hierarchie, die durch relative Konsistenzstärke geordnet ist, eingefügt. Insbesondere ist $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^1)$ stärker als die Annahme der Existenz einer stark–unerreichbaren Kardinalzahl und schwächer als die der Existenz einer meßbaren.

Es werden im Literaturverzeichnis die folgenden Abkürzungen benutzt:

Fund. Math.	Fundamenta Mathematicae
AMS	American Mathematical Society
J. Symb. Logic	Journal of Symbolic Logic
Ann. Math. Logic	Annals of Mathematical Logic

Literaturverzeichnis

[1] DAVIS, M.: *Infinite Games of Perfect Information*, in: Dresher, M.; Shapley, L.S.; Tucker, A.W. (Hrsg.): Advances in Game Theory, Annals of Mathematical Studies **52**, Princeton University Press, Princeton 1964, S.85–101.

[2] EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W.: *Einführung in die mathematische Logik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford ^{4}1996.

[3] FELGNER, U.: *Vorlesung über Mengenlehre*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1996/1997 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[4] DERS.: *Modelle der Mengenlehre*, Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 1997 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[5] DERS.: *Infinitäre Kombinatorik*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 1997/1998 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[6] FRIEDMAN, H.M.: *Higher Set Theory and Mathematical Practice*, Ann. Math. Logic **2** (1971), S.326–357.

[7] GALE, D.; STEWART, F.M.: *Infinite games with perfect information*, in: Kuhn, H.W.; Tucker, A.W. (Hrsg.): Contributions to the Theory of Games Bd. 2, Annals of Mathematical Studies **28**, Princeton University Press, Princeton 1953, S.245–266.

[8] HARRINGTON, L.A.: *Analytic determinacy and* $0^{\#}$, J. Symb. Logic **43** (1978), S.685–693.

[9] JECH, T.J.: *Set Theory*, Academic Press, San Diego 1978.

[10] JENSEN, R.: *Innere Modelle und große Kardinalzahlen*, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung, Jubiläumstagung 100 Jahre DMV, Teubner, Stuttgart 1992, S.265–280.

[11] KANAMORI, A.: *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.

[12] DERS.; MAGIDOR, M.: *The Evolution of Large Cardinal Axioms in Set Theory*, in: Müller, G.H.; Scott, D. (Hrsg.): Higher Set Theory. Lecture Notes in Mathematics **669**, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1978, S.99–275.

[13] KECHRIS, A.S.: *Classical Descriptive Set Theory*, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.

[14] DERS.; SOLOVAY, R.M.: *On the Relative Consistency Strength of Determinacy Hypotheses*, Transactions of the AMS **290** (1985), S.179–211.

[15] KLEENE, S.C.: *On the forms of predicates in the theory of constructive ordinals (second paper)*, American Journal of Mathematics **77** (1955), S.405–428.

[16] LEBESGUE, H.: *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **(3)7** (1902), S.231–359. Nachgedruckt in: Oeuvres Scientifiques Bd. 1, Kundig, Genf 1972, S.203–331.

[17] LEVY, A.: *Basic Set Theory.* Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag, Berlin 1979.

[18] LUSIN, N.N.; SIERPIŃSKI, W.: *Sur un ensemble non mesurable B.* Journal de Mathématiques Pures et Appliqueés **(9)2** (1923), S.53–72. Nachgedruckt in: Hartmann, S. et al. (Hrsg.): Siersiński, Oeuvres Choisies Bd. 2, Państwowe Wydawnidwo Naukowe, Warschau 1975, S.504–519.

[19] MARTIN, D.A.: *Measurable Cardinals and Analytic Games*, Fund. Math. **66** (1970), S.287–291.

[20] DERS.: *Borel Determinacy*, Annals of Mathematics **102** (1975), S.363–371.

[21] DERS.: *A Purely Inductive Proof of Borel Determinacy*, in: Nerode, A.; Shore, R.A. (Hrsg.): Recursion Theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Bd. 42, AMS, Providence 1985, S.303–308.

[22] DERS.: *An Extension of Borel Determinacy*, in: Annals of Pure and Applies Logic **49** (1990), S.279–293.

[23] DERS.: *The Determinacy of Blackwell Games*, Vorabdruck, erscheint voraussichtlich im J. Symb. Logic.

[24] DERS.; KECHRIS, A.S.: *Infinite Games and Effective Descriptive Set Theory*, in: Rogers, C.A. et al.: Analytic Sets, Academic Press, London 1980, S.403–470.

[25] DERS.; STEEL; J.R.: *Projective Determinacy*, in: Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. **85** (1988), S.6582–6586.

[26] DERS.; STEEL; J.R.: *A Proof of Projective Determinacy* , in: Journal of the AMS **2** (1989), S.71–125.

[27] MOSCHOVAKIS, Y.N.: *Descriptive Set Theory*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1980.

[28] PARIS, J. B.: $ZF \vdash \Sigma^4_0$ *Determiniateness*, J. Symb. Logic **37** (1972), S.661–667.

[29] ROWBOTTOM, F.: *Some strong Axioms of Infinity Incompatible with the Axiom of Constructibility*, Ann. Math. Logic **3** (1971), S.1–44.

[30] SHOENFIELD, J.R.: *Measurable Cardinals*, in: Gandy, R.O.; Yates, C.M.E. (Hrsg.): Logic Colloquium 69. Proceedings of the Summer School and Colloquium in Mathematical Logic, Manchester 1969, North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1971, S.19–49.

[31] SPECTOR, M.: *Ultrapowers without the Axiom of Choice*, J. Symb. Logic **53** (1988), S.1208–1219.

[32] WOLFE, P.: *The Strict Determinateness of Certain Infinite Games*, Pacific Journal of Mathematics **5** (1955), S.841–847.