Prof. Dr. Ulrich Felgner Sommersemester 2002

Mathematische Logik

Übungsblatt 10

(1) φ und ψ seien $\mathcal{L}$-Formeln mit $v \notin \mathrm{Fr}(\psi)$. Zeigen Sie:

(i) $\vdash \exists v\,(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \exists v\,\varphi)$, (3 Punkte)

(ii) $\vdash \forall v\,(\varphi \to \psi) \to (\exists v\,\varphi \to \psi)$. (3 Punkte)

(2) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und

$$T_{\mathfrak{M}} = \{\varphi \in \mathcal{L};\ \mathrm{Fr}(\varphi) = \varnothing\ \ \&\ \ \mathfrak{M} \models \varphi\}$$

die Menge aller Aussagen, die in $\mathfrak{M}$ gelten.

Zeigen Sie, dass $T_{\mathfrak{M}}$ eine vollständige Theorie ist.

(1 Punkt)

(3) Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{L}(M)$ die Sprache, die aus $\mathcal{L}$ entsteht, indem man in das Alphabet von $\mathcal{L}$ für jedes Element $a \in M$ einen Namen $\dot{a}$ aufnimmt.
Sei $\mathfrak{M}^*$ die $\mathcal{L}$-Struktur, die aus $\mathfrak{M}$ entsteht, indem man jedes Element von M auszeichnet, also $\mathfrak{M}^* = \langle M, \ldots, a \rangle_{a \in M}$.

Zeigen Sie, dass $T_{\mathfrak{M}^*} = \{\varphi \in \mathcal{L}(M);\ \mathrm{Fr}(\varphi) = \varnothing\ \ \&\ \ \mathfrak{M}^* \models \varphi\}$ eine vollständige Henkin–Theorie ist.

(3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 3. Juli 2002.